

# 杭州电子科技大学

## 硕士学位论文

题目：普适细胞自动机若干动力学性质

研究生           司凌霄          

专业           应用数学          

指导教师           陈芳跃 教授          

完成日期           2012年10月



杭州电子科技大学硕士学位论文

普适细胞自动机若干动力学性质

研究生： 司凌霄

指导教师： 陈芳跃教授

2012年10月

**Dissertation Submitted to Hangzhou Dianzi University**  
**for the Degree of Master**

**Some Dynamics of Universal Cellular  
Automata**

Candidate: Lingxiao Si

Supervisor: Prof. Fangyue Chen

October, 2012

## 摘 要

从数学上看, 细胞自动机 (Cellular Automata, 简称 CA) 是一种时间、空间和状态都离散的动力系统。研究表明, 通过不同的局部映射, 细胞自动机可以表现出复杂丰富的动力学行为。比如, 初等细胞自动机规则 110 具有普适的计算功能, 是目前发现的最简单的图灵系统。同样, 在二维细胞自动机中, Conway 发明的生命游戏 (Game of Life) 是最早的从分析角度被证明的一个具有普适计算功能的规则, 其演化可以涌现出丰富的动力学现象, 如滑翔机 (Glider)、滑翔枪 (Glider gun)、碰撞 (Collision)、宇宙飞船 (Spaceship) 等。因此, 细胞自动机可以用来模拟许多现实的动态系统, 比如, 交通、人口和生态模型等。

本文主要在符号动力系统的观点下讨论一维的细胞自动机规则 110 和二维的细胞自动机规则 B2/S7 (Diffusion Rule) 和 B3/S23 (Game of Life) 的一些动力学性质。第一章介绍了细胞自动机的发展简史、基础知识、经验分类以及本文的主要结构和内容。第二章讨论了初等细胞自动机 110 号规则滑翔机  $E^3$ , 由此找到了它的全局映射的一个不变子系统, 讨论了在子系统上的动力学性质, 刻画了它的复杂性。例如, 拓扑传递、拓扑混合、正拓扑熵等, 从而得到它们是 Li-Yorke 和 Devaney 意义下混沌的。第三章介绍了二维细胞自动机符号动力学的基础知识, 用拓扑共轭的方法初步对二维 Moore 邻域 Outer Totalistic 细胞自动机规则进行了分类, 并且通过滑翔机讨论了二维细胞自动机规则 B2/S7 (Diffusion Rule) 和 B3/S23 (Game of Life) 的符号动力学, 得到了相应的结果。最后, 第四章对全文作了总结与展望。

**关键词:** 细胞自动机, 符号动力学, 滑翔机, 拓扑传递, 拓扑共轭, 混沌

## ABSTRACT

Cellular Automata (CA) are dynamical systems in which time, space and state are discrete from the viewpoint of mathematics. The past decades have witnessed that cellular automata can exhibit complex dynamical behaviors by designing different local mappings. For example, elementary cellular automaton rule 110 has universal computing power, which has been is the simplest Turing system until now. Meanwhile, the universal cellular automata, the Game of life introduced by Conway is one of the most famous two-dimensional cellular automata and the first rule to be proved universal by analysis, and its evolution can exhibit rich dynamics phenomena, such as gliders, glider guns, spacecraft and so on. Therefore, cellular automata can be used to simulate realistic dynamical system, such as transportation, population and ecological model.

In this thesis, dynamical properties of one-dimensional cellular automata rule 110 and two-dimensional cellular automata rules B2/S7 (Diffusion Rule) and B3/S23 (Game of Life) are discussed from the viewpoint of symbolic dynamics. In chapter one, a brief history of the development of cellular automata, basic knowledge and experience of classification are introduced and then, the main structure and content are described. In chapter two, the glider  $E^3$  of elementary cellular automata rule 110 is discussed and an invariant subsystem and its dynamic properties are studied, such as topological transitivity, topological mixing and positive topological entropy. It is, therefore, chaotic in the sense of both Li-Yorke and Devaney. In chapter three the basic knowledge of two-dimensional symbolic dynamics of cellular automata, and two-dimensional outer totalistic cellular automata rules with Moore neighborhood are introduced and classified via the tool of topological conjugate. Then, this chapter analyzes the symbolic dynamics of the Diffusion Rule and Game of Life based on gliders, and obtains some corresponding results. Finally, chapter four makes a brief summary on this thesis, presents some prospects for future studies.

**Keywords:** cellular automata, symbolic dynamics, glider, topological transitivity, topological conjugate, chaos

## 目 录

摘 要 .....	I
ABSTRACT .....	II
第一章 绪论 .....	1
1.1 细胞自动机的研究背景及现状 .....	1
1.2 CA 的定义及其基本理论 .....	2
1.3 CA 分类 .....	4
1.4 符号动力系统的相关理论 .....	6
1.5 本文的主要内容与结构 .....	8
第二章 从规则 110 的滑翔机 $E^3$ 得到的混沌不变子系统 .....	9
2.1 规则 110 的研究背景 .....	9
2.2 符号动力学和有向图 .....	9
2.2.1 符号序列空间 .....	9
2.2.3 SFT 和有向图 .....	11
2.3 滑翔机 $E^3$ 和有限型子移位 .....	11
2.3.1 规则 110 的滑翔机 $E^3$ .....	11
2.3.2 规则 110 的子系统 .....	12
2.3.3 规则 110 的混沌性质 .....	13
第三章 生命游戏的符号动力学 .....	15
3.1 二维符号动力学 .....	15
3.2 二维 Outer totalistic 规则拓扑共轭分类 .....	17
3.3 生命游戏的符号动力学 .....	20
3.3.1 Diffusion Rule 的滑翔动力学 .....	22
3.3.2 生命游戏的滑翔动力学 .....	26
第四章 总结与展望 .....	29
4.1 总结 .....	29
4.2 展望 .....	29
致谢 .....	30
参考文献 .....	31
附录 .....	35

# 第一章 绪论

## 1.1 细胞自动机的研究背景及现状

20 世纪 40-50 年代, 细胞自动机 (Cellular Automata, 简称 CA) 作为一种特殊的有限状态机由 John Von Neumann 正式提出<sup>[1]</sup>。1969 年 Hedlund 首先从数学角度把细胞自动机看作双边无穷符号序列空间上的移位映射的自同态, 刻画了所有满的和开的一维细胞自动机的一些动力学行为, 开创了细胞自动机的数学理论研究。继 Neumann 之后, A. W. Burks 开始了细胞自动机的理论研究, 但他提出的细胞自动机过于复杂, 极大的限制了细胞自动机的应用。20 世纪 70 年代, 英国数学家 Conway 提出了一种能够进行普适计算的 2 状态 Moore 邻域的二维细胞自动机生命游戏<sup>[2]</sup> (Game of life), 便在计算机科学、物理学、生物化学、经济学、数学、哲学等领域引起了研究热潮。80 年代 Wolfram 号召对 CA 进行简化, 他在大量的计算机模拟观察下, 创造性的提出了一种新科学<sup>[3]</sup> (A new kind of science)。随后, L. O. Chua 等人结合 CNN 的成果用非线性的思想对 Wolfram 的计算机模拟结果给予了一系列数学上的刻画<sup>[4-7]</sup>, 把 256 个局部规则分为 88 类<sup>[8]</sup>。其中, 110 号因为具有普适的计算能力受到了很大的关注<sup>[9]</sup>。这些工作极大的推动了人们对 CA 的研究<sup>[10-12]</sup>。

在细胞自动机的研究中, 二维的细胞自动机占有极其重要的地位。例如在 Game of Life 的计算机模拟研究中发现的“滑翔机”(Glider)和“滑翔枪”(Glider gun), 各种类型的“宇宙飞船”(Spaceship)等有趣的现象<sup>[2,13-14]</sup>。早在 1970 年, 生命游戏中就发现了四个最小的宇宙飞船, 分别为滑翔机 (Glider)、轻量级飞船 (Lightweight spaceship)、中量级飞船 (Middleweight spaceship)、重量级飞船 (Heavyweight spaceship)。在将近 20 年的发展, 人们都把目光限制在了速度为  $c/2$  的命名为 tagalongs 的“宇宙飞船”上。直到 1989 年, Dean Hickerson 使用了一个基于深度优先回溯法得自动搜索的算法, 才发现了一些速度为  $c/3$ ,  $c/4$ ,  $2c/5$  的直角飞船 (Orthogonal spaceships), 以及第一艘以速度  $c/4$  的对角大滑翔机 (Big glider)。Hickerson 同样用其他方法结合开关引擎创建了一个速度为  $c/12$  的对角飞船, 为了纪念 Charles Corderman, 把飞船命名为 Corderships。接下来在 1996 年, Tim Coe 基于一个广度优先搜索的算法, 发现了一个速度为  $c/5$  的“蜗牛”(snail)飞船。随后, David Bell 用 Hickerson 的搜索算法, 发现了一个比较小的速度为  $c/5$  的“蜘蛛”(spider)飞船。1998 年 3 月, David Eppstein 设计了一个 gfind 程序<sup>[15]</sup>, 于 2000 年发现了一个速度为  $2c/7$  的 Weekender 飞船, 随后 Paul Tooke 发现了速度为  $c/6$  的“龙形”(dragon)飞船,

Jason Summers 发现了第一个速度为  $c/5$  的对角飞船。2004 年, Gabriel Nivasch 在 Jason Summers 和 David Bell 的帮助下, 构建了第一个速度为  $17c/45$  的直角形“毛毛虫”(Caterpillar)飞船。特别要指出的是在 2010 年 5 月, Andrew J. Wade 创造了一个速度为  $(5120, 1024)c/33699586$  的“双子座”(Gemini)飞船, 这是第一个飞行的方向是斜的飞船, 并且他的构造方法具有普适性, 给后来的工作带来了很大的便利。另外飞船分类一般是基于速度、方向、外形和周期等特性。

受 Conway 提出的生命游戏 (Game of Life) 的启发, 许多类似的生命游戏的二维 CA 规则也相继涌现。传统的生命游戏记为 B3/S23 (B 是 Born 的首写字母, S 是 Survival 的首写字母, 数字代表的是邻域生存细胞的个数), 而 B6/S16 被称为 Life-like 细胞自动机, 其他的还有以快速自我复制著称的 Highlife<sup>[13]</sup>细胞自动机, 标记为 B36/S23。理论上一共有  $2^{18}=262144$  个 Life-like 规则<sup>[16]</sup>, 但是至今其中详细被研究的寥寥无几。另外它们中的许多现象也只是给出了计算机模拟的结果, 有关二维 CA 的数学理论刻画还比较少见。因此, 用相对成熟的符号动力系统的工具来分析刻画二维 CA 的模拟研究中的动力学性质显得十分重要, 所以这个领域吸引了国内外大量的学者从不同的方面对其进行研究<sup>[17-19]</sup>。

## 1.2 CA 的定义及其基本理论

在 20 世纪 50 年代, J. Von Neumann 和 Stan Ulam<sup>[1]</sup>最早提出了 CA 的概念。最早 J. Von Neumann 提出了一个具有普适的计算能力 29 状态的二维 CA。然而, 由于提出的 CA 过于复杂, 并没有在计算机上实现。在普适计算的基础上, 越来越多的学者开始注重设计更加简单和实用的规则。其中, Conway 和 wolfram 作出了杰出的贡献。1970 年, 数学家 Conway 提出著名的生命游戏 (Game of Life), 一个采用 Moore 领域的 2 个状态的具有普适计算能力的二维 CA, 由此导致了新的研究热潮。在此, 有必要简单提及特别有趣的 Fredkin's game<sup>[18]</sup>。

1971 年, Fredkin 设计了一个通用的能够自我复制 CA 游戏, 采用 Von Neumann 邻域。目前流行的二维 CA 模拟软件 Golly 把该规则记为 B13/S13, 该规则的特点是对任意给定的初始构型, 经过  $2^n$  ( $n$  依赖于初始构型) 次迭代, 会复制出 4 个相同的初始构型。

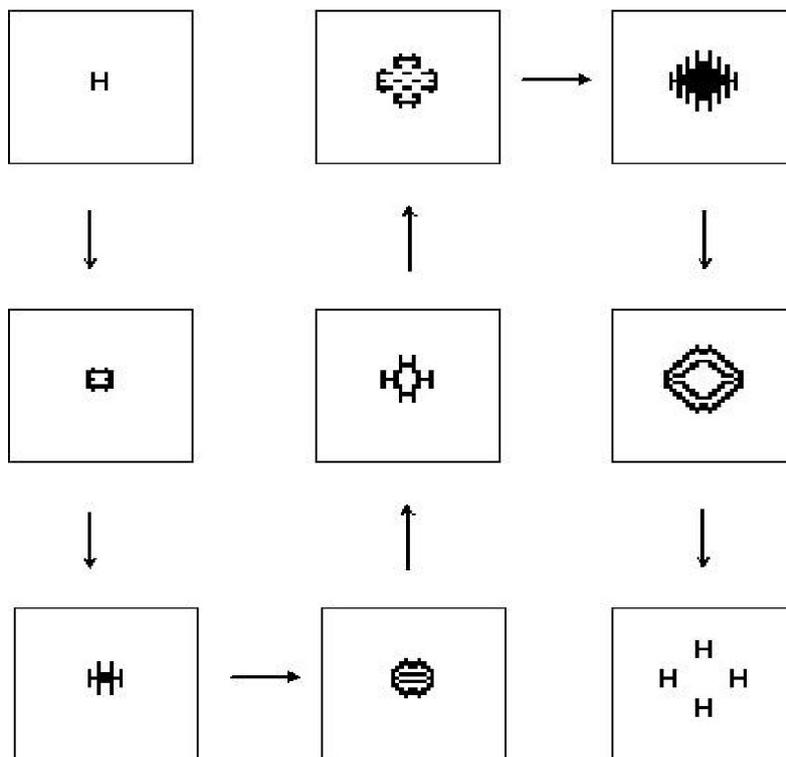


图 1.1 Fredkin's game 特定初始条件的演化图

在 80 年代初期，wolfram 系统研究了称为初等的细胞自动机（ECA），发现即使简单的规则也可展现出复杂的动力学行为。其中，110 号由于展现出滑翔机的现象和普适的计算能力而收到了极大的关注。

CA 可以由以下规则刻画<sup>[18]</sup>，

- I CA 是有规律的同一种类型的细胞；
- II 每个细胞只有有限个状态；
- III 细胞状态随时间同步改变；
- IV 演化规则在时空中是确定的和一致的；
- V 细胞状态改变只依赖于周围的“邻居”。

但是，在实际研究中，不是每个条件都会满足的。比如，概率 CA。

1997 年，Kutrib et al 提出了 CA 一个正规的定义<sup>[18-20]</sup>，细胞自动机  $\mathcal{A}$  是一个四元集合  $(d, S, N, f)$ ，其中  $d$  表示空间的维度， $S$  表示为有限状态集， $Z^d$  的有限子集  $N$  表示邻域， $f: S^N \rightarrow S$  表示局部映射或转移规则。空间  $S^{Z^d}$  里的元素  $a$  称为构型。 $t+1$  时刻构型  $a^{t+1}$  完全由  $t$  时刻的构型  $a^t$  决定。同时，在时刻  $t+1$  的第  $i$  个细胞的状态是由时刻  $t$  的第  $i$  个细胞及其周围邻域的细胞的状态所决定的。用公式写出来就是

$$a_i^{t+1} = f(a_i^t, N), \quad N \text{ 表示细胞 } a_i \text{ 的邻域}$$

全局转移函数

$$G: S^{Z^d} \longrightarrow S^{Z^d}$$

$$G(a)(z) = f(a(z + v_1), \dots, a(z + v_k))$$

其中,  $z \in Z^d$ ,  $N = \{v_1, \dots, v_k\}$ 。

本文主要考虑一维和二维常见的细胞自动机邻域<sup>[16,19]</sup>, 如下图所示:

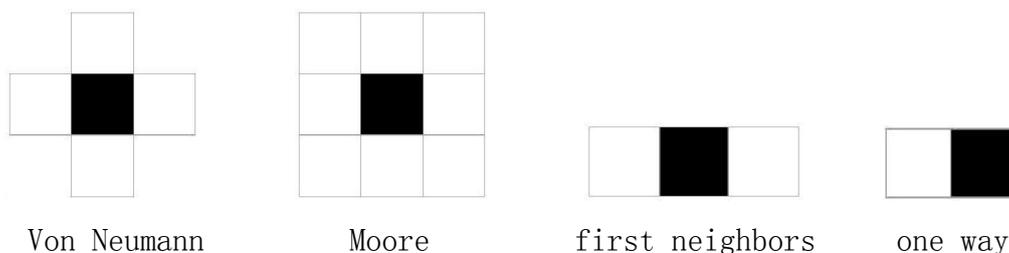


图 1.2 典型的 CA 邻域

### 1.3 CA 分类

Wolfram 在大量的计算机模拟实验的基础上, 提出可以将所有初等细胞自动机的动力学行为归纳为四类<sup>[21,22]</sup>:

- I 趋于一个空间平稳构型. 这里空间平稳即指每一个元胞处于相同的状态;
- II 趋于一系列简单的稳定结构或周期结构;
- III 表现出混沌的非周期行为;
- IV 出现复杂的局部结构, 或者说是局部性的混沌, 其中有些会不规则的传播。

这种分类是不严格的。大致来说, 前三类行为相当于低维动力系统中常见的不动点、周期轨和混沌, 而第四类行为则可以与生命系统等复杂系统中的自组织现象相比较。下面给出了对应四种分类的四个相应的图示:

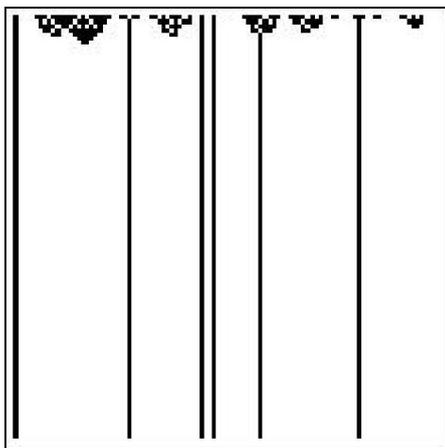


图 1.3 ECA 规则 164 的演化图

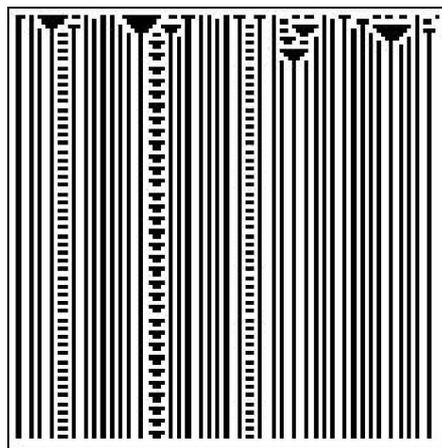


图 1.4 ECA 规则 133 的演化图

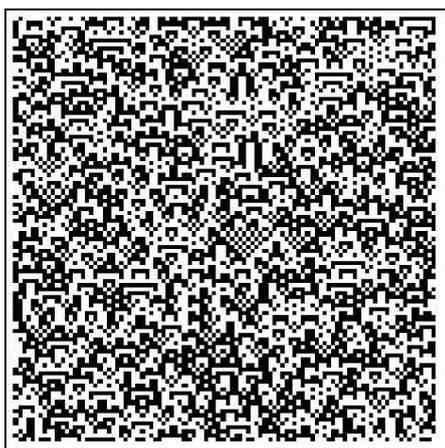


图 1.5 ECA 规则 105 的演化图

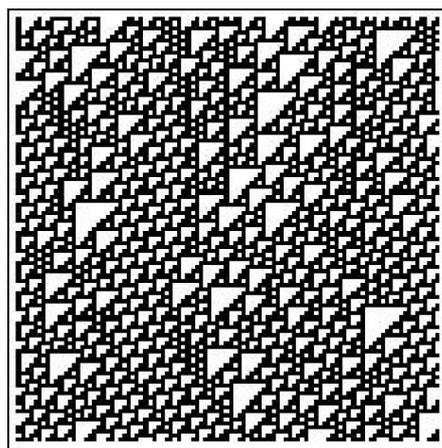


图 1.6 ECA 规则 110 的演化图

除此之外，还有许多学者从平均场论<sup>[23]</sup>的观点来解释 Wolfram 的分类，这种观点是基于概率统计的方法。该方法假定状态空间  $\Sigma$  中的元素是独立的，在演化过程中是彼此不相关，因此我们可以计算演化过程中  $t$  时的概率与  $t+1$  时的概率之间的关系，用下式表示

$$p_{t+1} = \sum_{j=0}^{k^{2r+1}-1} \varphi_j(X) p_t^v (1-p_t)^{n-v}$$

其中， $\varphi_j$  表示映射， $X$  表示邻域中所有的元素， $n$  代表邻域中元素的个数， $v$  代表邻域中状态“1”出现的次数， $p_t$  表示状态“1”出现的概率。

基于曲线与对角线的关系，把 Wolfram 的分类对应分为四类：

- I 单调的，整个曲线在对角线的一侧；
- II 水平相切，但不能和对角线相交；
- III 没有相切，曲线穿过对角线；

IV 水平和对角相切，没有穿过对角线。

同样，用此方法分类也是不严格的，因为不在同一类的 CA 在此观点下，可以有同一类的平均场论曲线。

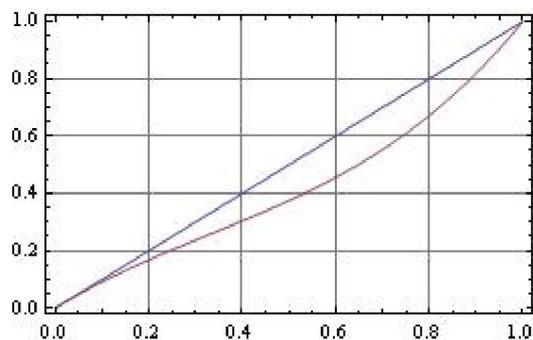


图 1.7 ECA 规则 164 的平均场论曲线

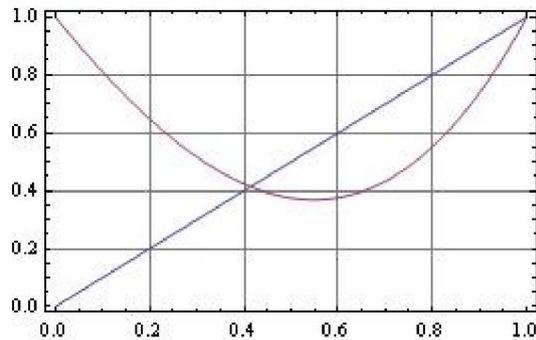


图 1.8 ECA 规则 133 的平均场论曲线

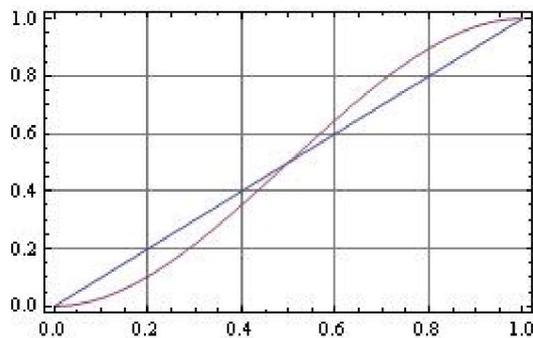


图 1.9 ECA 规则 105 的平均场论曲线

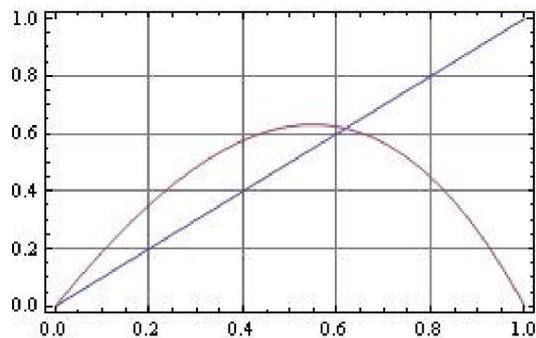


图 1.10 ECA 规则 110 的平均场论曲线

随后，L.O. Chua 等人从非线性动力学的角度研究了 ECA，例如特征函数、吸引子、时间可逆、吸引树，伊甸园等概念<sup>[4-8,24]</sup>，把 256 个 ECA 分成了 88 类，极大地拓宽了人们的视野。

- I 25 个周期 1 规则、13 个周期 2 规则和 2 个周期 3 规则；
- II 30 个 Bernoulli-Shift 规则；
- III 10 个复杂 Bernoulli-Shift 规则；
- IV 8 个超 Bernoulli-Shift 规则。

## 1.4 符号动力系统的相关理论

符号动力系统的基础知识有很多文献提及，本节的主要知识来源于文献[25-27]。

**定义 1.4.1**  $(X, f)$  为紧致系统， $f$  是拓扑传递的，如果对任意非空开集  $u, v \subset X$ ，存在  $n > 0$  使  $f^n(u) \cap v \neq \emptyset$ ； $f$  是拓扑混合的，如果对任意的非空开集  $u, v \subset X$ ，存在  $N > 0$ ，使得  $f^n(u) \cap v \neq \emptyset, \forall n \geq N$ 。

**定义 1.4.2** 设  $(X, f)$  是紧致系统,  $d$  是  $X$  的一个拓扑度量. 设  $X_0 \subset X$  非空. 如果存在不可数集合  $S \subset X_0$ , 满足

$$\text{i) } \limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0, \forall x, y \in S, x \neq y;$$

$$\text{ii) } \liminf_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0, \forall x, y \in S,$$

我们说  $f$  在  $X_0$  上是在 *Li-Yorke* 意义下混沌的。

**定义 1.4.3** 如果下述三个条件得到满足,

i)  $f$  是拓扑传递的;

ii)  $f$  的周期点在  $X$  内处处稠密, 即  $\overline{P(f)} = X$ ;

iii)  $f$  对初值敏感依赖,

则称  $f$  在 *Devaney* 意义下混沌的。

**命题 1.4.1** 任何有限型子转移都与一个 2 阶有限型子转移拓扑共轭。

**定义 1.4.4** 如果

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } (i, j) \prec \Lambda \text{ 时;} \\ 0, & \text{其余情况,} \end{cases}$$

则  $k \times k$  阶  $0, 1$ -方阵  $A = (a_{ij})^{k-1}$  叫作  $\Lambda$  或子转移  $\sigma_\Lambda : \Lambda \rightarrow \Lambda$  的转移方阵。这里,  $(i, j)$  是  $S$  上的 2-序列。

**定义 1.4.5** 如果对于任意固定的  $0 \leq i, j < k$ , 存在  $n > 0$ , 使得  $a_{ij}^{(n)} > 0$ , 则说  $A$  是不可约的; 如果存在  $n > 0$ , 使得  $a_{ij}^{(n)} > 0, \forall 0 \leq i, j < k$ , 或等价地,  $A^n \gg 0$ , 则说  $A$  是非周期的。

**引理 1.4.1**

- (1)  $(\Lambda, \sigma)$  是拓扑传递或拓扑混合的, 当且仅当转移矩阵  $A$  是不可约或非周期的;
- (2) 若转移矩阵的每一行和每一列至少有一个 1, 则转移矩阵和 2 阶有限型子移位是一一对应的;
- (3)  $\sigma_A$  的拓扑熵为转移矩阵  $A$  谱半径的自然对数;
- (4)  $(\Lambda, \sigma)$  是拓扑传递的当且仅当相联系的有向图  $G(A)$  是强连通的。

**定义 1.4.6** 设  $(X, f)$  和  $(Y, g)$  都是紧致系统, 如果存在映上的同胚映射  $h: X \rightarrow Y$  使得

$h \circ f = g \circ h$ , 则称  $f$  和  $g$  拓扑共轭。

**定义 1.4.7** 设  $(X, f)$  和  $(Y, g)$  都是紧致系统, 如果存在连续满射  $h: X \rightarrow Y$ , 使得  $h \circ f = g \circ h$ , 则称  $f$  和  $g$  拓扑半共轭。

**命题 1.4.2** 设  $(X, f)$  和  $(Y, g)$  都是紧致系统, 且  $h: X \rightarrow Y$  是从  $f$  到  $g$  的拓扑半共轭, 则  $ent(f) \geq ent(g)$ 。

本节最后, 本文给出一维符号动力学复杂性指标之间的关系图示。

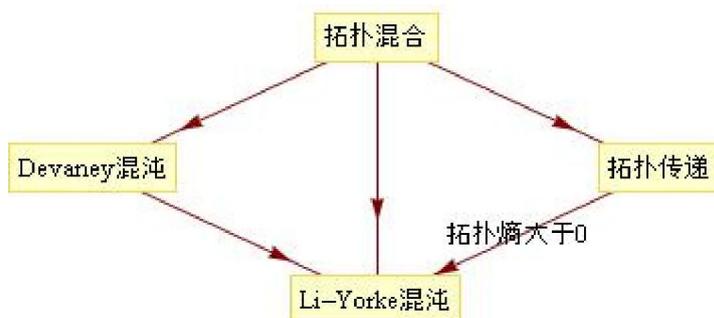


图 1.11 复杂性指标之间的关系

## 1.5 本文的主要内容与结构

第二章, 主要分析了 ECA 规则 110 滑翔机  $E^3$  的符号动力学, 以符号动力学为工具, 对滑翔机  $E^3$  的决定系统给予严格的数学分析, 用转移矩阵计算了子系统的拓扑熵是大于零的, 进而说明了是 Li-Yorke 意义下混沌的。由有向图的连通性证明了该系统是拓扑传递的, 进而证明了全局映射  $f_{110}$  在不变子系统上周期点是稠密的, 从定义角度证明了子系统在 Devaney 意义下是混沌的。本章最后, 对  $E$  类滑翔机的决定系统的关系给出了一个猜想。

第三章, 首先介绍了二维符号动力学的基本理论。从拓扑共轭的角度对二维 Moore 邻域 Outer Totalistic 全局映射进行分类, 从而简化了研究对象。接下来着重讨论了细胞自动机 B2/S7 (Diffusion Rule) 和 B3/S23 (Game of Life) 滑翔机的符号动力学, 分别用拓扑半共轭的方法估计了子系统的拓扑熵。第四章, 对全文作了总结与展望。

## 第二章 从规则 110 的滑翔机 $E^3$ 得到的混沌不变子系统

### 2.1 规则 110 的研究背景

110 号初等细胞自动机因为其普适的计算能力，而受到了极大的关注。其中，wolfram 在他 2002 年出版的新书《*A New Kind of Science*》中，对 110 号进行了系统的研究，发现了 110 号具有许多被称为滑翔机的复杂的局部组织。后来，他的助手 Mathew Cook 在 Santa Fe 研究所举行的会议上宣布规则 110 具有普适的计算能力<sup>[28-30]</sup>，是目前发现的最简单的图灵系统。

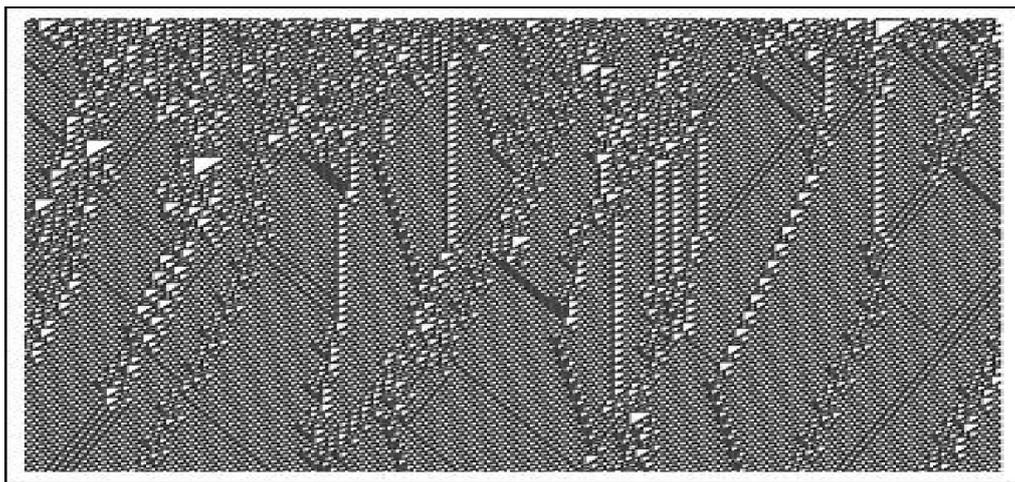


图 2.1 规则 110 的随机初始条件下的演化图

Lind 第一个对 110 号的 13 个滑翔机进行了分类<sup>[31]</sup>。随后，Lindgren 和 Nordahl 在中<sup>[9]</sup>，用统计的方法对这 13 个滑翔机常见行为进行了分析。同时，McIntosh 在中<sup>[10]</sup>，用铺砖式系统(tiling systems)和有向图的方式刻划了规则 110 的滑翔机。从 2004 年以来，Genaro<sup>[11,12,32]</sup>和他的合作者深入的分析了 110 号的滑翔机的类型、性质和碰撞，以及用此来模拟逻辑运算。

本章在此背景下，着重分析了规则 110 滑翔机  $E^3$  的动力学行为。具体是基于滑翔机  $E^3$  找到一个不变子系统，证明了规则 110 的全局映射在这个子系统上是 Li-Yorke 和 Devaney 意义下混沌的。

### 2.2 符号动力学和有向图

#### 2.2.1 符号序列空间

令  $a$  是  $S = \{0,1\}$  上的一个符号序列， $I = [i, j]$  是  $a$  上的一个正整数区间，则有

$a_{[i,j]} = (a_i, \dots, a_j)$  和  $a_{[i,j]} = (a_i, \dots, a_{j-1})$ 。如果存在区间  $I \subseteq Z$  使得  $b = a_I$ ，则称符号序列  $b$  出现在  $a$  中，用  $b \prec a$  表示。

整个符号序列空间用  $\Sigma_2 = S^Z = \{(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) \mid x_i \in S, i \in Z\}$  表示，定义空间上的距离为

$$d(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}, x, y \in \Sigma_2$$

显然， $\Sigma_2$  在此度量下是紧致的、完全不连通的完备空间<sup>[25-27]</sup>。定义左移映射  $\sigma_L$  和右移映射  $\sigma_R$  如下： $[\sigma_L(x)]_i = x_{i+1}$  和  $[\sigma_R(x)]_i = x_{i-1}$ ， $x \in \Sigma_2$ ， $i \in Z$ ，其中  $[\sigma(x)]_i$  表示  $\sigma(x)$  的第  $i$  个符号， $\sigma$  是左移或右移映射。

### 2.2.2 规则 110 的真值表

Hedlund 证明了<sup>[33]</sup>一个映射  $f: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  是一个细胞自动机，当且仅当  $f$  是连续的且有  $f \circ \sigma = \sigma \circ f$  成立。更进一步，对任何细胞自动机  $f$ ， $(\Sigma_2, f)$  是一个动力系统。一个子集  $X \subseteq \Sigma_2$  是  $f$ -不变的，如果  $f(X) \subseteq X$ 。特别的，如果有  $f(X) = X$  成立，则称  $X$  是强  $f$ -不变的。如果  $X$  是闭集且  $f$ -不变的，则称  $(X, f)$  或  $X$  是  $(\Sigma_2, f)$  的一个子系统<sup>[27]</sup>。

每一个初等细胞自动机都可以被一个局部函数来表示<sup>[4-8]</sup>，下表给出了规则 110 局部函数的逻辑真值表。

表 2.1 规则 110 的真值表

$(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$	$\hat{f}_{110}(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$
(0, 0, 0)	0
(0, 0, 1)	1
(0, 1, 0)	1
(0, 1, 1)	1
(1, 0, 0)	0
(1, 0, 1)	1
(1, 1, 0)	1
(1, 1, 1)	0

### 2.2.3 SFT 和有向图

设  $A$  是符号空间  $\Sigma_2$  内的长度为  $n$  的符号序列集合,

$$\Lambda_A = \{x \in \Sigma_2 \mid x_{[i, i+n-1]} \in A, \forall i \in \mathbb{Z}\},$$

则  $(\Lambda_A, \sigma)$  是  $(\Sigma_2, \sigma)$  一个子系统, 称为有限型子移位 (SFT),  $A$  是  $\Lambda_A$  的决定系统。更进一步,  $\Lambda_A$  也可以被有向图  $G_A = \{A, E\}$  来描述, 其中  $A$  表示有向图的顶点,  $E$  表示有向图的边。两个顶点  $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$  和  $b = (b_0, \dots, b_{n-1})$  被一条边  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \rightarrow (b_0, \dots, b_{n-1})$  连接, 当且仅当  $(a_1, \dots, a_{n-1}) = (b_0, \dots, b_{n-2})$ 。然而, 从有向图我们也可以确定相联系的转移方阵。  $M = (M_{ij})_{m \times m}$ ,  $M_{ij} = 1$  当且仅当从顶点  $b^{(i)}$  到  $b^{(j)}$  有一条边, 其中  $m = |M|$  表示集合  $M$  中元素的个数,  $i$  或  $j$  代表  $M$  中元素的位置<sup>[25-27,34]</sup>,  $i, j = 1, 2, \dots, m$ 。

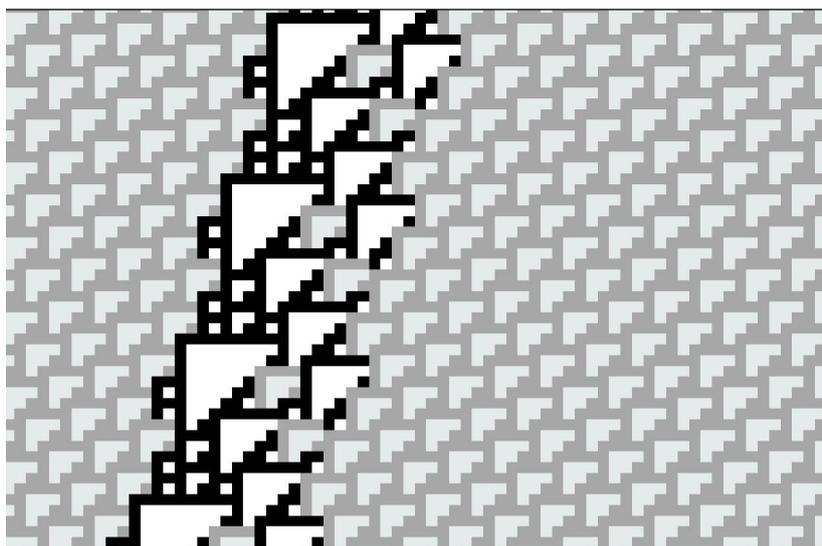
至此, 我们可以从转移矩阵  $M$  来讨论有限型子移位的拓扑性质。

## 2.3 滑翔机 $E^3$ 和有限型子移位

### 2.3.1 规则 110 的滑翔机 $E^3$

滑翔机是随时间变化的特殊结构, 是一组随细胞自动机演变的紧致的非瞬时状态<sup>[11,12]</sup>。在符号动力学的观点下, 滑翔机可以看作是在双边符号序列空间中, 从一个特定的初始轨道演化而来<sup>[35]</sup>。

众所周知, 规则 110 的滑翔机  $E^3$  的速度是  $-4/15$ , 线性指标是 19, 左右空白周期边界的以太数目分别是 3 和 1<sup>[12]</sup>。在符号动力学的观点下, 规则 110 的以太因子是  $a = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0)$ , 规则 110 滑翔机  $E^3$  的其中一个滑翔因子是  $b = (1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0)$ , 也就是说, 在 CA 方格空间中, 规则 110 的以太图像是  $Orb_{f_{110}}(a^*) = \{a^*, f_{110}(a^*), f_{110}^2(a^*), \dots\}$ , 滑翔机  $E^3$  是演化轨道  $Orb_{f_{110}}(\bar{x}) = (\bar{x}, f_{110}(\bar{x}), f_{110}^2(\bar{x}), \dots)$ , 其中  $a^* = (\dots, a, a, a, \dots)$  是一个循环构形,  $\bar{x} = (\dots, a, a, a, b, a, a, a, \dots)$ 。滑翔机  $E^3$  的速度是  $-4/15$ , 也就是说滑翔机每 15 次迭代向左移动 4 个细胞, 也即  $f_{110}^{15}(\bar{x}) = \sigma_L^4(\bar{x})$ 。图 2.2 给出了以太背景和滑翔机  $E^3$  的演化图。


 图 2.2 规则 110 的以太背景和滑翔机  $E^3$ 

### 2.3.2 规则 110 的子系统

首先，本文得到了一个 31 长度的序列集合  $B = \{q \mid q = \bar{x}_{[i, i+30]}, \forall i \in \mathbb{Z}\}$ ，其中  $\bar{x} = (\dots, a, a, a, b, a, a, a, \dots)$ ，以太因子为  $a = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0)$ ，滑翔机  $E^3$  滑翔因子  $b = (1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0)$ 。

$B =$

```
{1111100010011011111000100110111, 11110001001101111000100110111, 11100010011011110001001101111,
11000100110111100010011011110, 100010011011111000100110111100, 0001001101111000100110111000,
0010011011110001001101110001, 01001101111000100110111100010, 1001101111000100110111000100,
00110111100010011011110001001, 01101111000100110111100010011, 11011110001001101111000100110,
10111100010011011110001001101, 01111000100110111100010011010, 01111000100110111100010011010,
1111000100110111000100110100, 111100010011110001001101001, 111000100110111100010011010011,
11000100110111100010011010011, 10001001101111000100110100111, 00010011011110001001101001111,
0010011011110001001101111, 0100110111100010011010011111, 1001101111000100110100111110,
001101111000100110100111101, 0110111100010011010011111010, 1101111000100110100111110101,
1011110001001101001111101011, 011110001001101001111101011, 111100010011010011111010110,
111100010011010011110101100, 11100010011010011110101001, 110001001101001111101010011,
1000100110111110101100110, 0001001101001111101011001101, 0010011010011111010111001011,
01001100111110101100110111, 10011000111110101100110111, 00110001111101011100101111,
0110001111101011001101110, 11010011111010110011011100, 101001111101011100101111000,
01001111010110011110001, 100111110101100110111100010, 001111101011100101111000100,
01111101011001101110001001, 1111110101100110111100010011, 1111101011100101111000100110,
111101011001110001001101, 1111010110011011110001001011, 1110101110010111100010011011,
1101011001101111000100110111, 101011001101111000100101111, 010111001011110001001101110,
101100110111100010011011100, 0111001101111000100101111000, 1110010111100010011110001,
1100110111100010011011100010}
```

设  $\Lambda_0 = \Lambda_B = \{x \in \Sigma_2 \mid x_{[i, i+30]} \in B, i \in \mathbb{Z}\}$ 。局部函数  $\hat{f}_{110}$  的 15 次迭代是映射

$\hat{f}_{110}^{15} : S^{31} \rightarrow S$ 。显然， $\hat{f}_{110}^{15}(q) = q_{i+4}, \forall q = (q_{i-15}, \dots, q_i, \dots, q_{i+15}) \in B$ ，也即满足

$f_{110}^{15}(x) = \sigma_L^4(x), x \in \Lambda_0$ 。更进一步，令

$$\Lambda = \bigcup_{i=0}^{14} f_{110}^i(\Lambda_0)$$

**命题 2.1**  $\Lambda$  是闭的  $f_{110}$ - 的不变子集, 且满足  $f_{110}^5(x) = \sigma_L^4(x)$ ,  $x \in \Lambda$ 。

**命题 2.2**  $\Lambda$  是  $\sigma_L$  一个有限型子移位 (SFT)。

设  $A$  是  $\Lambda$  的决定系统, 于是有  $\Lambda = \Lambda_A$  成立, 其中  $A$  是一个序列长度为 31 的集合, 共有 595 个元素。由于空间限制, 本文把  $A$  的十进制  $D(A)$  放在附录 II。

### 2.3.3 规则 110 的混沌性质

在这一小节, 我们将会揭示规则 110 在  $\Lambda_A$  上的混沌性质。

**命题 2.3**

- (1)  $\sigma_L$  在  $\Lambda$  上是拓扑传递的;
- (2)  $f_{110}$  在  $\Lambda$  上是拓扑传递的。

证明: (1) 事实上,  $\Lambda$  所决定的有向图  $G_A$  是强连通的, 所以和图  $G_A$  相联系的转移矩阵  $M = (M_{ij})_{595 \times 595}$  是不可约的, 所以  $\sigma_L$  在  $\Lambda$  上是拓扑传递的<sup>[25-27]</sup>。

(2) 因为  $\sigma_L$  在  $\Lambda$  上是拓扑传递的, 所以  $\exists \tilde{x} \in \Lambda$ , 使得  $\overline{Orb_f(\tilde{x})} = \Lambda$ , 显然有  $\overline{Orb_f(\tilde{x})} \triangleq \tilde{\Lambda} \subset \Lambda$ 。因为  $f_{110}^{15}(x) = \sigma_L^4(x)$ ,  $x \in \Lambda$ 。因此,  $\tilde{x}_{[i-15, i+15]} \in A, \forall i \in \mathbb{Z}$ 。容易验证  $\tilde{\Lambda}$  是闭的和  $f$ - 不变的。所以  $\exists \tilde{A}$ , 使得  $\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}_{\tilde{A}}$ , 也即  $f_{110}$  在  $\tilde{\Lambda}$  上是拓扑传递的。注意到  $\forall a \in A, \exists i \in \mathbb{Z}$ , 使得  $\tilde{x}_{[i-15, i+15]} = a$ , 得到  $a \in \tilde{A}$  和  $A \subset \tilde{A}$ , 于是有  $\Lambda_A \subset \tilde{\Lambda}_{\tilde{A}}$  和  $\Lambda = \tilde{\Lambda}$ 。所以  $f_{110}$  在  $\Lambda$  上是拓扑传递的<sup>[36]</sup>。

**命题 2.4**  $f_{110}$  的周期点集合  $P(f) = \{y \in \Lambda \mid \exists n > 0, f^n(y) = y\}$  在  $\Lambda$  上是稠密的, 也即  $\overline{P(f)} = \Lambda$ 。

证明:  $\forall x \in \Lambda$  和  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists$  正整数  $M (> 15)$  使得  $\sum_{i=M+1}^{\infty} 1/2^i < \varepsilon/2$ , 并且对  $(a_0, \dots, a_{2M}) = x_{[-M, M]} \prec x \in \Lambda$ , 有  $(a_{2M-30}, \dots, a_{2M}), (a_0, \dots, a_{30}) \in A$ 。因为  $\sigma$  在  $\Lambda$  上是拓扑传递的, 所以记  $\tilde{b} = (a_{2M-30}, \dots, a_{2M}, b_0, \dots, b_{k_0}, a_0, \dots, a_{30})$  为上述两点的一条边, 所以  $\tilde{b}$  上的任意 31 长度的序列属于  $A$ 。令  $y = c^* = (\dots, c, c, c, \dots)$  为循环构形, 其中  $c = (a_0, \dots, a_{2M}, b_0, \dots, b_{k_0})$ 。显然,

$y \in \Lambda$  和  $\sigma^m(y) = y$ ,  $m = |c|$  是  $c$  的长度。所以有  $f^{15m}(y) = \sigma^{4m}(y) = y$  和  $y_{[-M,M]} = x_{[-M,M]}$ , 也即  $y$  是  $f_{110}$  的周期点且  $d(x, y) < \varepsilon$ 。因此,  $f_{110}$  的周期点集合  $P(f) = \{y \in \Lambda \mid \exists n > 0, f^n(y) = y\}$  在  $\Lambda$  上是稠密的。

**命题 2.5**  $f_{110}$  的拓扑熵是正的。

证明:  $f_{110}|_{\Lambda}$  的拓扑熵满足下面的式子

$ent(f_{110}) \geq ent(f_{110}|_{\Lambda}) = \frac{4}{15} ent(\sigma_L|_{\Lambda}) = \frac{4}{15} \log(\rho(M)) \approx 0.0179 > 0$ , 其中  $\rho(M)$  是转移矩阵  $M$  的谱半径。

众所周知, 正拓扑熵蕴含 Li-Yorke 意义下混沌<sup>[25,34]</sup>, 拓扑传递和周期点稠密蕴含 Devaney 意义下混沌<sup>[37,38]</sup>。所以, 我们得到以下的结果。

**定理 2.1**  $f_{110}$  在  $\Lambda$  上是 Li-Yorke 和 Devaney 意义下混沌的。

本章最后, 作者基于大量的模拟实验给出规则 110  $E$  类滑翔机决定系统之间关系的一个猜想。

**猜想 2.1** 已经知道  $E$  类滑翔机可以有很多, 比如  $E^1, E^2, E^3, \dots, E^n, \dots, n \in Z^+$ 。本文猜想有  $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2 \subseteq \Lambda_3 \subseteq \dots \Lambda_n \dots, n \in Z^+$  关系成立, 其中  $\Lambda_i, i \in Z^+$  表示对应滑翔机  $E^i$  的决定系统。

### 第三章 生命游戏的符号动力学

#### 3.1 二维符号动力学

二维符号动力学的刻划有好多文章<sup>[26,39-42]</sup>提及，本章开始前先做一个简单的回顾。

设  $S = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$  是一个  $k$  个符号的有限集合， $|S|$  表示集合  $S$  中元素的个数。对于有限矩阵  $F \subseteq Z^2$ ，定义映射  $\pi_F : S^{Z^2} \longrightarrow S^F$ ，也即  $\pi_F(x) = x|_F$ ， $x \in S^{Z^2}$ 。其中  $S^{Z^2}$  表示整个二维符号序列空间。

$$S^{Z^2} = \left\{ x = (x_{i,j}) : x_{i,j} \in S, (i,j) \in Z^2 \right\}$$

则二维符号空间  $S^{Z^2}$  中的构型是平面上的矩阵，记号 \* 表示  $(0,0)$  位置，

$$x = (x_{i,j}) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & x_{1,-1} & x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots \\ \cdots & x_{0,-1} & * & x_{0,1} & \cdots \\ \cdots & x_{-1,-1} & x_{-1,0} & x_{-1,1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

在  $S^{Z^2}$  中定义距离

$$\rho(x, y) = \max_{(i,j) \in Z^2} \left\{ \frac{1}{\max\{|i|, |j|\} + 1} \mid x_{i,j} \neq y_{i,j} \right\}$$

容易验证在此距离定义下，二维符号空间  $S^{Z^2}$  是紧致的、完备的和完全不连通的 *Hausdorff* 空间。

在  $S^{Z^2}$  定义移位映射：

$$\begin{aligned} \sigma_{k,l} : S^{Z^2} &\longrightarrow S^{Z^2} \\ x_{i,j} &\longrightarrow x_{i+k, j+l} \end{aligned}$$

其中， $(k,l)$  表示移位的步。

如果限定  $|k| \leq 1, |l| \leq 1$ ，则得到 9 种不同的移位映射：

$$\sigma_{-1,-1}, \sigma_{-1,0}, \sigma_{-1,1}, \sigma_{0,-1}, \sigma_{0,0}, \sigma_{0,1}, \sigma_{1,-1}, \sigma_{1,0}, \sigma_{1,1}$$

其中,  $\sigma_{0,0}$  为恒等映射。并且这 9 种映射之间存在一定的复合关系, 彼此之间的动力学性质大致相同。本文取  $\sigma_{1,-1}$  为研究对象。

**定义 3.1** 移位空间  $X$  称<sup>[41]</sup>为一个有限型子移位(SFT), 如果存在一个有限矩阵  $M \subseteq Z^2$  和一个非空集合  $P$  使得

$$X = X_p = \left\{ x \in S^{Z^2} : x_{M+a} \in P, \forall a \in Z^2 \right\}$$

本文称满足条件的  $P$  为决定系统,  $X_p$  是由  $P$  决定的不变子集。

同时, 与二维有限型子移位(SFT)相联系的有向图为  $G_p = \{P, E\}$ , 其中  $P$  表示有向图的顶点,  $E$  表示有向图的边。如果对于两个顶点  $a = (\vec{a}_0, \dots, \vec{a}_{n-1})$  和  $b = (\vec{b}_0, \dots, \vec{b}_{n-1})$  被一条垂直边  $(\vec{a}_0, \dots, \vec{a}_{n-1}) \rightarrow (\vec{b}_0, \dots, \vec{b}_{n-1})$  连接, 当且仅当  $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}) = (\vec{b}_0, \dots, \vec{b}_{n-2})$ ,  $\vec{a}_i = (a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{i(m-1)})$ ,  $b_i = (b_{i0}, b_{i1}, \dots, b_{i(m-1)})$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ , 则称得到的有向图为垂直连接有向图。如果两个顶点  $a = (\vec{a}_0, \dots, \vec{a}_{m-1})$  和  $b = (\vec{b}_0, \dots, \vec{b}_{m-1})$  被一条水平边  $(\vec{a}_0, \dots, \vec{a}_{m-1}) \rightarrow (\vec{b}_0, \dots, \vec{b}_{m-1})$  连接, 当且仅当  $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{m-1}) = (\vec{b}_0, \dots, \vec{b}_{m-2})$ ,  $\vec{a}_i = (a_{0i}, a_{1i}, \dots, a_{(m-1)i})$ ,  $\vec{b}_i = (b_{0i}, b_{1i}, \dots, b_{(m-1)i})$ ,  $0 \leq i \leq m-1$ , 则称得到的有向图为水平连接有向图。其中顶点  $a, b \in P$  是  $m \times n$  的矩阵。

**定义 3.2** 水平或垂直转移矩阵  $T = (T_{ij})_{m \times m}$ ,  $T_{ij} = 1$  当且仅当相联系的有向图从顶点  $P^{(i)}$  到  $P^{(j)}$  有一条边, 其中  $m = |P|$  表示集合  $P$  中元素的个数,  $i$  或  $j$  代表  $P$  中元素的位置,  $i, j = 1, 2, \dots, m$ 。

**定理 3.1**<sup>[40]</sup>

- (1)  $\sigma_{1,-1} : S^{Z^2} \rightarrow S^{Z^2}$  为连续映射;
- (2)  $\sigma_{1,-1}$  的周期点在  $S^{Z^2}$  中处处稠密;
- (3)  $\sigma_{1,-1}$  是拓扑传递的;
- (4)  $\sigma_{1,-1}$  是拓扑混合的;
- (5)  $(S^{Z^2}, \sigma_{1,-1})$  是 Devaney 意义下混沌的;
- (6)  $(S^{Z^2}, \sigma_{1,-1})$  是 Li-Yorke 意义下混沌的。

### 3.2 二维 Outer totalistic 规则拓扑共轭分类

本文研究的 Outer totalistic 规则采用的是 Moore 邻域，中心细胞状态变化依据邻域细胞状态之和。例如，著名的生命游戏就是一个 Outer totalistic 规则，每个细胞状态有“生存”和“死亡”两种。本文用 1 代表“生存”，0 代表“死亡”，规则<sup>[2]</sup>如下：

- 1 “生存”的细胞，如果周围活着的细胞小于 2 个，则下一刻“死亡”；
- 2 “生存”的细胞，如果周围有 2 个或 3 个细胞活着，则下一刻“生存”；
- 3 “生存”的细胞，如果周围有多于 3 个细胞活着，则下一刻“死亡”；
- 4 “死亡”的细胞，如果周围有 3 个细胞活着，则下一刻“生存”。

Golly 仿照 Mirek 的记号把这种规则记为 B3/S23，其中 B 是 Birth 的首写字母，S 是 Survival 的首写字母。同时，我们可以很清楚的由记号看到它的得到作用方式。所以，这种记号在 Outer totalistic 规则里非常的受欢迎。与此相关的是，Wolfram 也有自己的记录方式<sup>[16]</sup>，与一维情况类似，它采用数值的记号。计算法则如下：

$$N = \sum_n f[a, n] \cdot k^{kn+a}$$

其中， $a \in \{0,1\}$  表示初始状态， $n$  表示邻域活着细胞个数， $f$  表示规则， $k$  表示状态个数。本文用此公式计算生命游戏的十进制代码为：

$$N = f[0,3] \cdot 2^6 + f[1,2] \cdot 2^5 + f[1,3] \cdot 2^7 = 224$$

从表<sup>[16]</sup>3.1 我们可以看到 9-邻域的 Outer totalistic 大约有  $3 \times 10^5$  个，所以我们有必要对这类规则进行一个简单的分类，而这也是对一个新领域研究的重要手段。

表 3.1 二维典型邻域 CA 的个数

Rule type	5-neighbor square	9-neighbor square	Hexagonal
General	$2^{32} \approx 4 \times 10^9$	$2^{512} \approx 10^{154}$	$2^{128} \approx 3 \times 10^{38}$
Rotationally symmetric	$2^{12} = 4096$	$2^{140} \approx 10^{42}$	$2^{64} \approx 2 \times 10^{19}$
Reflection symmetric	$2^{24} \approx 2 \times 10^7$	$2^{288} \approx 5 \times 10^{86}$	$2^{80} \approx 10^{24}$
Completely symmetric	$2^{12} \approx 4096$	$2^{102} \approx 5 \times 10^{30}$	$2^{28} \approx 3 \times 10^8$
Outer totalistic	$2^{10} = 1024$	$2^{18} \approx 3 \times 10^5$	$2^{14} = 16384$
Totalistic	$2^5 = 32$	$2^9 = 512$	$2^7 = 128$

我们可以从<sup>[39,43]</sup>中找到常用的分类的同胚映射，并且我们很容易得到 Outer totalistic 规则如命题 3.1 的性质。

**命题 3.1**  $\bar{T}$ 、 $T^{UD}$ 、 $T^{LR}$ 和 $T^D$ 四个同胚映射中， $T^{UD}$ 、 $T^{LR}$ 和 $T^D$ 作用 Outer totalistic 规则后不变，称 $\bar{T}$ 作用后得到的规则为对偶规则。

四个常见的分类同胚映射如下所示：

$$\begin{array}{l} \bar{T}: S^{Z^2} \longrightarrow S^{Z^2} \\ x = (x_{ij}) \longrightarrow (\bar{x}_{ij}) \end{array} \qquad \begin{array}{l} T^D: S^{Z^2} \longrightarrow S^{Z^2} \\ x = (x_{ij}) \longrightarrow (x_{ji}) \end{array}$$

即  $[\bar{T}(x)]_{ij} = \bar{x}_{ij}, \forall (i, j) \in Z^2$

即  $[T^D(x)]_{ij} = x_{ji}, \forall (i, j) \in Z^2$

$$\begin{array}{l} T^{LR}: S^{Z^2} \longrightarrow S^{Z^2} \\ x = (x_{ij}) \longrightarrow (\bar{x}_{i(-j)}) \end{array} \qquad \begin{array}{l} T^{UD}: S^{Z^2} \longrightarrow S^{Z^2} \\ x = (x_{ij}) \longrightarrow (x_{(-i)j}) \end{array}$$

即  $[T^{LR}(x)]_{ij} = x_{i(-j)}, \forall (i, j) \in Z^2$

即  $[T^{UD}(x)]_{ij} = x_{(-i)j}, \forall (i, j) \in Z^2$

从定义知道 $T^{LR}$ 、 $T^{UD}$ 、 $T^D$ 三个映射只改变邻域元素的位置，不改变邻域元素之和。所以， $T^{LR}$ 、 $T^{UD}$ 、 $T^D$ 三个映射作用 Outer totalistic 规则后不变。

显然，对于 Moore 邻域，我们共有  $2^9$ 种输出方式，本文用  $\beta_i, i \in [0, 511]$ 表示，则根据映射 $\bar{T}$ ，我们有下式子：

$$[\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{510}, \beta_{511}] \xrightarrow{\bar{T}} [\bar{\beta}_{511}, \bar{\beta}_{510}, \dots, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_0]$$

表 3.2 二维 Moore 邻域 CA 对应的真值表

	$x_{i-1,j-1}^t$	$x_{i-1,j}^t$	$x_{i-1,j+1}^t$	$x_{i,j-1}^t$	$x_{i,j}^t$	$x_{i,j+1}^t$	$x_{i+1,j-1}^t$	$x_{i+1,j}^t$	$x_{i+1,j+1}^t$	$x_{i,j}^{t+1}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_0$
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$\beta_1$
2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$\beta_2$
3	0	0	0	0	0	0	0	1	1	$\beta_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
508	1	1	1	1	1	1	1	0	0	$\beta_{508}$
509	1	1	1	1	1	1	1	0	1	$\beta_{509}$
510	1	1	1	1	1	1	1	1	0	$\beta_{510}$
511	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\beta_{511}$

本文用此作用方式，编制程序(见附录IV)对常见的二维 Moore 邻域的 Outer totalistic 规则进行了一个简单的分类，如表 3.3 所示。

为了便于理解，本文给出程序的算法步骤：

第一步：写出规则的真值表  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{511}$ ，通过附录III可以写出输出 1 的地址，记为集合  $\alpha_1$ 。则显然输出为 0 的是剩下的地址，记为集合  $\alpha_0$ ；

第二步：分别对集合  $\alpha_0, \alpha_1$  取补集，即  $\eta_0 = 511 - \alpha_0^i$ ， $i = 0, 1, \dots, |\alpha_0|$ ，同理有集合  $\eta_1$ ；

第三步：取交集  $e = \eta_0 \cap \alpha_0$ ， $f = \alpha_1 - \eta_1 \cap \alpha_1$ ，令  $\pi = e \cup f$ ；

第四步：把得到的数据  $\pi$  和附录III对比，得到相应的后缀。

表 3.3 二维常见 Moore 邻域 Outer totalistic 规则拓扑共轭分类

名称	原规则 Golly 记号	原规则 Wolfram 记号	对偶规则 Golly 记号	对偶规则 Wolfram 记号
Game of life	B3/S23	224	B0123478/S01234678	254975
High life	B36/S23	4320	B0123478/S0134678	254943
3-4 life	B34/S34	960	B0123678/S0123678	258303
Diffusion Rule	B2/S7	32784	B02345678/S01234578	253947
Long life	B345/S5	3392	B01245678/S012678	259391
Replicator	B1357/S1357	52428	B02468/S02468	209715
Morley	B368/S245	72288	B012578/S134678	255645
Plow world	B378/S012345678	256746	S234678	172704
Diamoeba	B35678/S5678	261184	B45678/S4678	259840
Day and Night	B3678/S34678	258752	B3678/S34678	258752
Seeds	B2	16	B012345678/S01234578	253951
Persian Rug	B234	336	B012345678/S012378	251391
Fredkin	B1357/S02468	157286	B1357/S02468	157286
Life without Death	B3/S012345678	174826	S01234678	172714

我们已经知道，拓扑共轭的两个系统，有相同的动力学行为<sup>[25-27]</sup>，所以必要的分类可以大大简化我们的研究范围。

### 3.3 生命游戏的符号动力学

1970年, Conway 发明了著名的生命游戏<sup>[2]</sup>。他通过这套规则, 发现了细胞生长、重生和与它们的环境互动的构造。他发现很多细胞构造的重复模式, 或者随着时间流逝聚合为一种固定的模式。生命游戏是第一个从规则分析而不是刻意构造的角度被证明的具有普适性的规则<sup>[19,44]</sup>。在生命游戏研究的过程当中, 有些学者从平均场论曲线的生存密度的角度研究了如生命游戏和 Diffusion Rule 的动力学状态<sup>[45,46]</sup>。

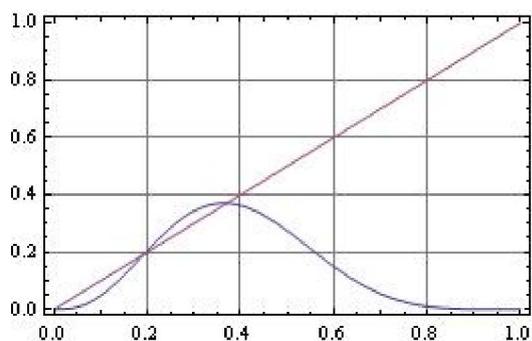


图 3.1 生命游戏的平均场论曲线

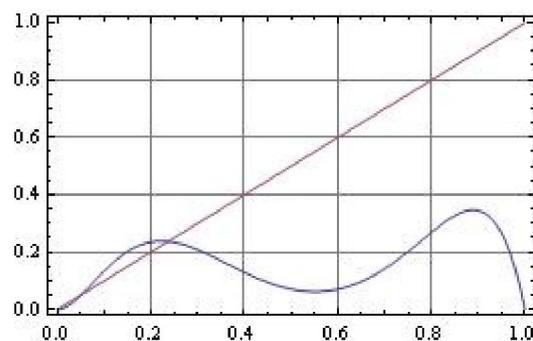


图 3.2 Diffusion Rule 平均场论曲线

生命游戏和 Diffusion Rule 的极限生存密度分别为  $0, 0.1925, 0.3702$  和  $0, 0.0518, 0.2369$ 。由此, 可以看到两个演化规则的极限生密度存在某种程度的相似性。

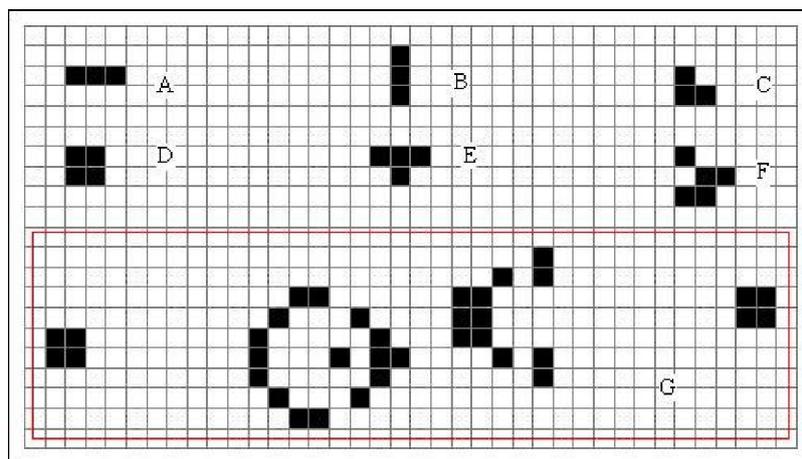


图 3.3 生命游戏中常见动态模块

Conway 的生命游戏<sup>[47]</sup>中, 一行 3 个细胞 (A) 或者一列 3 个细胞 (B) 构成了从一代到下一代发生垂直或水平变化的“警戒闪光灯”。L 型的 3 个细胞组合 (C) 会成为固定的  $2 \times 2$  细胞块 (D)。T 型的 4 个细胞 (E) 通过 9 个代际的变化, 会形成一组“警戒闪光灯”。5 个细胞形成的“滑翔机” (F) 每隔四代沿对角线移动一步。最下面的“滑翔枪” (G) 每迭代一

定次数，发射出一个“滑翔机”(F)。

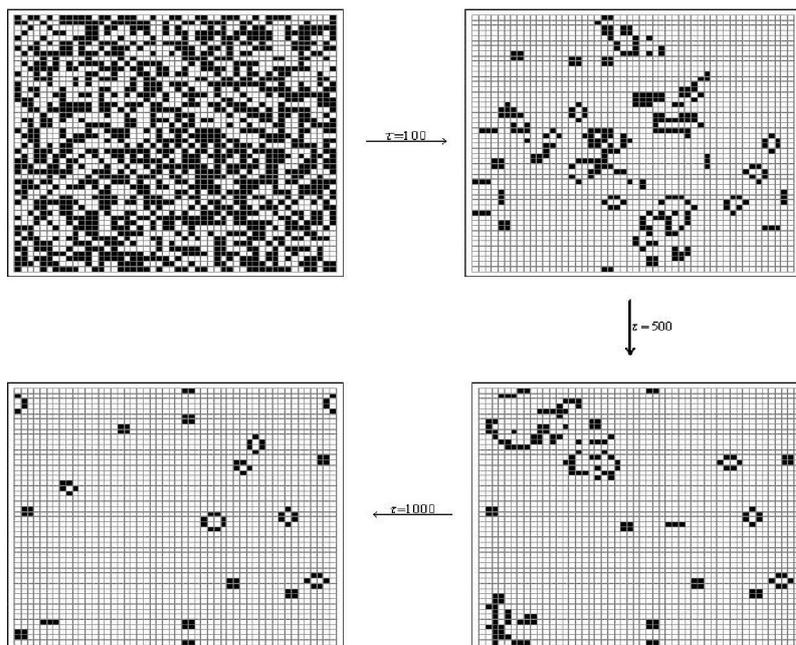


图 3.4 生命游戏的随机演化图

我们可以看到在有限边界模拟的情况下，最后生存的是一些固定模块和周期模块。为了简单起见，我们单独考虑生命游戏中的滑翔机。

生命游戏中一个常见的滑翔机如下图所示：

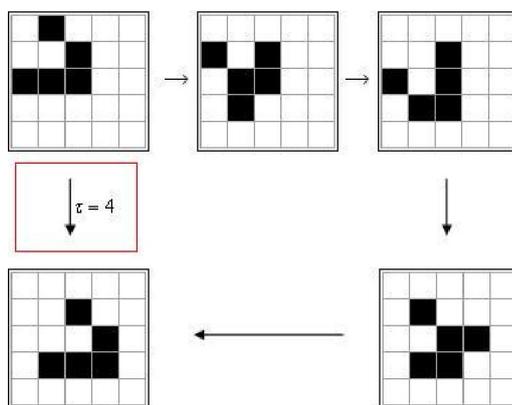


图 3.5 生命游戏中的滑翔机

很明显，我们看到该滑翔每迭代四次向右下移动一位。在分析这个滑翔机动力学之前，我们先看一个简单的例子。

## 3.3.1 Diffusion Rule 的滑翔动力学

在第一章我们已经提到滑翔机有不同的速度、外形和周期等特性。比如 Genaro 在 B2/S7<sup>[45]</sup> (Diffusion Rule), 记  $F_{2,7}$  为 B2/S7, 发现的最简单的一个滑翔机如下:

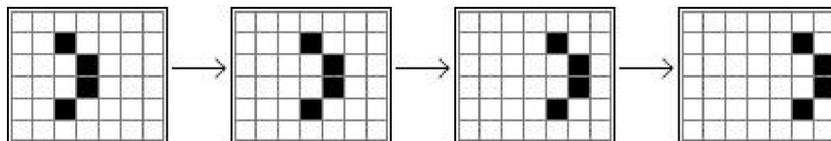


图 3.6 Diffusion Rule 中的滑翔机

明显可以看到, 图示滑翔在水平方向上每迭代一次向右移动一位。类似于一维的方法, 我们用定义的方法找到了关于这个滑翔的一个不变子系统。然后, 分析了该滑翔机在子系统上的动力学性质。二维 CA 拓扑熵的计算<sup>[48-54]</sup>一直是关注的焦点, 本文最后用拓扑半共轭的方法估计了这个子系统的拓扑熵。

**命题 3.2** 对于规则  $F_{2,7}$ , 存在一个非空子集  $\Lambda_1 \subseteq S^{\mathbb{Z}^2}$ , 使得

$$F_{2,7} \upharpoonright_{\Lambda_1} = \sigma_{0,-1} \upharpoonright_{\Lambda_1}$$

其中,  $\Lambda_1 = \Lambda_A = \left\{ x \in S^{\mathbb{Z}^2} \mid x_{M_{4 \times 3} + a} \in A, \forall a \in \mathbb{Z}^2 \right\}$ ,

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

注:  $M_{4 \times 3}$  表示  $M$  是一个 4 行 3 列的矩阵。

证明: 已知  $\forall x \in \Lambda_1$ , 有  $x_{M_{4 \times 3}} \in A$ . 对于局部映射  $\hat{F}_{2,7} : \{0,1\}_{4 \times 3} \rightarrow \{0,1\}_{2 \times 1}$ , 有

$$\hat{F}_{2,7} \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \\ x_{30} & x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$$

也即  $[\hat{F}_{2,7}(x)]_{ij} = x_{i(j-1)}$ 。所以,  $\forall x \in \Lambda_1$ , 都有  $F_{2,7}(x) = \sigma_{0,-1}(x) \in \Lambda_1$ 。进而,

$$F_{2,7}(\Lambda_1) \subset \Lambda_1, F_{2,7}|_{\Lambda_1} = \sigma_{0,-1}|_{\Lambda_1}$$

由定义可知,  $F_{2,7}(\Lambda_1) \supset \Lambda_1$ 。所以  $\Lambda_1$  是  $F_{2,7}$  的一个不变子集, 且满足  $F_{2,7}|_{\Lambda_1} = \sigma_{0,-1}|_{\Lambda_1}$ 。

注:  $\{0,1\}_{a \times b}$  表示一个  $a$  行  $b$  列的 0-1 矩阵。

**定理 3.2** B2/S7 的垂直转移矩阵  $A_v$  和水平转移矩阵  $A_h$  是非周期的。

证明: 在计算机的帮助下, 取  $n \geq 40$ , 可以使  $A_v$  或者  $A_h$  的所有元素都大于零。由定义 1.4.5 可知, 两个转移矩阵是非周期的,  $A_v, A_h$  见附录 V。

**引理 3.1** 对于任意两个  $4 \times 4$  矩阵  $C, D$  都有水平路径连接, 其中  $C, D \in \Lambda_1$ 。

证明: 记  $C = (C_1, C_2)$ ,  $D = (D_1, D_2)$ , 其中  $C_i, D_i \in A, i=1,2$ 。由于水平转移矩阵是非周期的, 所以一定存在一条水平路径使得  $C_2 \rightarrow D_1$ 。

**命题 3.3**  $\sigma_{0,-1}$  在不变子集  $\Lambda_1$  上是拓扑传递的<sup>[36,55]</sup>。

证明: 要证  $\sigma_{0,-1}$  在  $\Lambda_1$  上拓扑传递, 只需证对任意的开集  $u, v$ ,  $\exists n > 0$ , 使得  $\sigma_{0,-1}^n(u) \cap v \neq \emptyset$  即可。因为  $\Lambda_1$  上的任意开集可以由决定系统  $A$  中的元素生成的柱形表示。现考虑柱形集  $[E]_{N \times N}$  和  $[F]_{N \times N}$ 。由有向图的定义可知, 只需证对于任意两个  $M \times M$  ( $M \geq 5$ ) 阶矩阵都存一条水平的有向路径即可。下面用数学归纳法证明命题。

先证明对于任意两个  $5 \times 5$  矩阵  $E, F \in \Lambda_A$  都有水平路径连接。记  $E = (E_1, E_2; E_3, E_4)$ ,  $F = (F_1, F_2; F_3, F_4)$ , 其中  $E_i, F_i \in \Lambda_1, i=1,2,3,4$ 。记  $E_2^H = (E_2^1, E_2^2, \dots)$  为与  $E_2$  水平连接的矩阵集合, 取  $E_2^i$  使满足下式

$$\sigma_{0,-1}(E_4) \cap \sigma_{1,0}(E_2^i) \neq \emptyset$$

取交集中的一个元素记为  $E_{2,4}^i$ , 则得到一个新的  $5 \times 5$  矩阵  $G_1 = (E_2, E_2^i; E_4, E_{2,4}^i)$ , 若  $G_1 = F$ , 则证明完毕。否则, 继续重复上面的步骤, 直到  $G_i = F, i \geq 1$  为止即可。类似的, 若假设  $M-1$  阶矩阵都有水平路径连接, 则有对于任意的两个  $M \times M, M \geq 5$  阶矩阵, 都有水平路径连接。

注:  $[E]_{N \times N}$  表示一个  $N$  阶方阵, 且满足对任意的  $[E]_{4 \times 3} \in A$ 。

为了便于理解上面的证明, 下面看一个简单的例子。

$$\begin{array}{ccccccc}
 5 & \rightarrow & 15 & \rightarrow & 19 & \rightarrow & 23 & \rightarrow & 14 & \rightarrow & 18 & \rightarrow & 22 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 9 & \rightarrow & 16 & \rightarrow & 20 & \rightarrow & 21 & \rightarrow & 5 & \rightarrow & 15 & \rightarrow & 19
 \end{array}$$

→或↓表示水平或垂直路径，数字代表在决定系统中元素的位置。

$E = (5, 15; 9, 16)$ ,  $F = (18, 22; 15, 19)$  是两个  $5 \times 5$  矩阵，则  $\sigma_{0,-1}(16) = 20$ ，取  $E_2^i = 19$ ，

则  $G_1 = (15, 19; 16, 20)$ ，重复该步骤得到  $G_2 = (19, 23; 20, 21)$ ， $G_3 = (23, 14; 21, 5)$ ，

$G_4 = (14, 18; 5, 15)$ ， $G_5 = (18, 22; 15, 19)$ 。由于  $G_5 = F$ ，故水平路径为  $(E, G_1, G_2, G_3, G_4, F)$ 。

为了便于讨论，本文先把文献[36]中的结论推广到二维空间中。

**引理 3.2** 存在一个构型  $\tilde{x} \in \Lambda_1$ ，使得  $\forall e \in A$ ， $e < \tilde{x}$ ，即  $\exists a \in Z^2$ ，使得  $\tilde{x}_{M_{4 \times 3} + a} = e$ 。

证明：由  $\sigma_{0,-1}$  在子系统  $\Lambda_1$  上的拓扑传递性可知，存在一个构型  $\tilde{x} \in \Lambda_1$ ，使得  $\overline{\text{orb}_{\sigma_{0,-1}}(\tilde{x})} = \Lambda_1$ ，其中  $\text{orb}_{\sigma_{0,-1}}(\tilde{x}) = \{\tilde{x}, \sigma_{0,-1}(\tilde{x}), \sigma_{0,-1}^2(\tilde{x}), \dots\}$ 。则  $\forall e \in A$ ，柱形  $[e]$  是子系统  $\Lambda_1$  内的开子集，也即  $\exists a \in Z^2$ ，使得  $\tilde{x}_{M_{4 \times 3} + a} = e$ 。

**引理 3.3** 若  $\tilde{\Lambda}_1 \subset \Lambda_1$  且是  $F_{2,7}$  的闭不变子集，记子系统  $\tilde{\Lambda}_1$  的决定系统为  $\tilde{A}$ ，则有

$$F_{2,7} \big|_{\tilde{\Lambda}_1} = \sigma_{0,-1} \big|_{\tilde{\Lambda}_1}, \quad \tilde{A} \subset A$$

证明：结论是显然的，此处从略。

**命题 3.4**  $F_{2,7}$  在不变子集  $\Lambda_1$  上是拓扑传递的。

证明：由  $\sigma_{0,-1}$  在  $\Lambda_1$  上拓扑传递可知， $\exists \tilde{x} \in \Lambda_1$  使得  $\overline{\text{orb}_{\sigma_{0,-1}}(\tilde{x})} = \Lambda_1$ ，其中其中  $\text{orb}_{\sigma_{0,-1}}(\tilde{x}) = \{\tilde{x}, \sigma_{0,-1}(\tilde{x}), \sigma_{0,-1}^2(\tilde{x}), \dots\}$ 。定义  $\tilde{\Lambda}_1 \triangleq \overline{\text{orb}_{F_{2,7}}(\tilde{x})}$ ，即  $F_{2,7}$  在  $\tilde{\Lambda}_1$  是拓扑传递的。下证  $\Lambda_1 = \tilde{\Lambda}_1$ 。显然， $\tilde{\Lambda}_1$  是闭集且满足  $F_{2,7}(\tilde{\Lambda}_1) = \tilde{\Lambda}_1 \subseteq \Lambda_1$ ， $(\tilde{\Lambda}_1, \sigma_{0,-1})$  是  $(S^{Z^2}, \sigma_{0,-1})$  的有限型子移位， $(\tilde{\Lambda}_1, F_{2,7})$  是  $(S^{Z^2}, F_{2,7})$  的不变子系统。令  $\tilde{A}$  是  $\tilde{\Lambda}_1$  的决定系统，因为  $\tilde{x} \in \tilde{\Lambda}_1$  且  $\forall e \in A$ ， $\exists a \in Z^2$ ，使得  $\tilde{x}_{M+a} = e$ ，即  $e < \tilde{x}$ 。所以， $A \subseteq \tilde{A}$ ， $\Lambda_1 \subseteq \tilde{\Lambda}_1$ 。于是有  $\Lambda_1 = \tilde{\Lambda}_1 \triangleq \overline{\text{orb}_{F_{2,7}}(\tilde{x})}$ ，从而得到  $F_{2,7}$  在  $\Lambda_1$  上是拓扑传递的。

下面本文用拓扑半共轭的方法，来估计  $F_{2,7}$  在不变子集  $\Lambda_1$  上的拓扑熵。

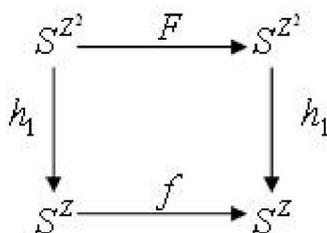
我们先建立如下的拓扑半共轭的关系<sup>[39]</sup>。

$$h_1 : S^{Z^2} \longrightarrow S^Z$$

$$(x_{ij}) \longrightarrow (x_{0j})$$

我们用此映射来估计上述系统的拓扑熵。

从文献<sup>[39]</sup>知道， $h_1$ 可以用来建立二维细胞自动机与初等细胞自动机之间的拓扑半共轭关系，也即下图可交换。



**命题 3.5** 存在一个非空子集  $\Lambda_1'$ ，使得  $(f_{88}, \Lambda_1')$  和  $(F_{2,7}, \Lambda_1)$  是拓扑半共轭的，且有

$$f_{88} |_{\Lambda_1'} = \sigma_R |_{\Lambda_1'}$$

其中， $\Lambda_1' = \Lambda_{A'} = \{x \in S^Z \mid x_{[i-1, i+1]} \in A', \forall i \in Z\}$ ， $A' = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)\}$ 。

非常容易验证<sup>[39]</sup>，映射  $h_1$  是连续满射，且有  $h_1 \circ f = F \circ h_1$  成立。

计算得到  $\Lambda_1'$  的转移矩阵

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

拓扑熵  $ent(f_{88} |_{\Lambda_1'}) = \log(\rho(M)) = 0.3822$ ，其中  $\rho(M)$  是转移矩阵  $M$  的谱半径。

由命题 1.4.2 知道，系统  $(F_{2,7}, \Lambda_1)$  的拓扑熵不小于 0.3822。

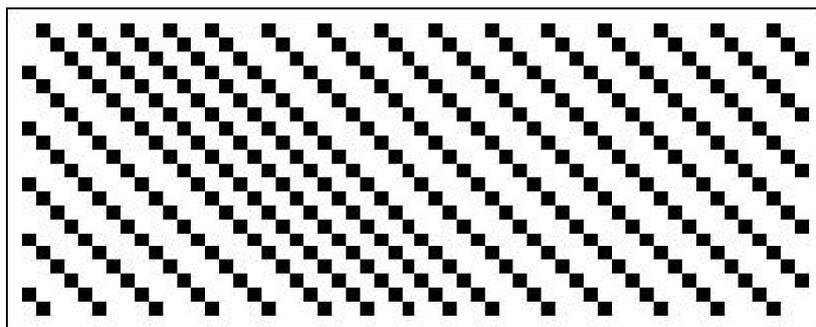


图 3.7 88 号初等细胞自动机在  $\Lambda_1'$  上的随机演化图示

### 3.3.2 生命游戏的滑翔动力学

记生命游戏 B3/S23 为  $F_{3,23}$ 。类似于规则 B2/S7，本文有以下命题成立（本节叙述与上节平行）。

**命题 3.6** 对于规则  $F_{3,23}$ ，存在一个非空子集  $\Lambda_2 \subseteq S^{Z^2}$ ，使得

$$F_{3,23}^4 \upharpoonright_{\Lambda_2} = \sigma_{1,-1} \upharpoonright_{\Lambda_2},$$

其中， $\Lambda_2 = \Lambda_B = \left\{ x \in S^{Z^2} \mid x_{M_{9 \times 9+a}} \in B, \forall a \in Z^2 \right\}$ ，决定系统  $B$  见附录 VI。

证明：已知  $\forall x \in \Lambda_2$ ，有  $x_{M_{9 \times 9}} \in B$ 。对于局部映射  $\hat{F}_{3,23}^4 : \{0,1\}_{9 \times 9} \rightarrow \{0,1\}_{1 \times 1}$ ，有

$$\hat{F}_{3,23}^4 \begin{pmatrix} x_{00} & \cdots & x_{08} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{80} & \cdots & x_{88} \end{pmatrix} = (x_{33})$$

也即  $[\hat{F}_{3,23}^4(x)]_{ij} = x_{(i-1)(j-1)}$ 。所以， $\forall x \in \Lambda_1$ ，都有  $F_{3,23}^4(x) = \sigma_{1,-1}(x) \in \Lambda_2$ 。进而，

$$F_{3,23}(\Lambda_2) \subset \Lambda_2, \quad F_{3,23} \upharpoonright_{\Lambda_2} = \sigma_{1,-1} \upharpoonright_{\Lambda_2}$$

由定义可知， $F_{3,23}(\Lambda_2) \supset \Lambda_2$ 。所以  $\Lambda_2$  是  $F_{3,23}$  的一个不变子集，且满足  $F_{3,23} \upharpoonright_{\Lambda_2} = \sigma_{1,-1} \upharpoonright_{\Lambda_2}$ 。

**定理 3.3**  $F_{3,23}$  的垂直转移矩阵  $B_V$  和水平转移矩阵  $B_H$  是非周期的。

证明：在计算机的帮助下，取  $n \geq 20$  即可使  $B_V$  或者  $B_H$  的所有元素都大于零。由定义 1.4.5 可知，两个转移矩阵是非周期的。

**命题 3.7**  $\sigma_{1,-1}$  在不变子集  $\Lambda_2$  上是拓扑传递的。

证明：要证  $\sigma_{1,-1}$  在不变子集  $\Lambda_2$  是拓扑传递的，只需证对于任意两个  $M \times M$  ( $M \geq 9$ ) 阶矩阵  $E$  和  $F$  都存在一条垂直的有向路径和一条水平的有向路径。

事实上，当  $M = 9$  时，由于水平和垂直转移矩阵都是非周期的，故决定系统  $B$  中的任意两个  $9 \times 9$  阶矩阵都存在一条垂直的有向路径和一条水平的有向路径，并且路径的长度可以任意无限长(因为  $B$  中存在元素全为零的矩阵)。于是可用数学归纳法(参考命题 3.3 证明)得到任意两个  $M \times M$  ( $M \geq 9$ ) 阶矩阵都存在垂直和水平的有向路径。考虑柱形集  $[E]$  和  $[F]$ ，它们替代在拓扑传递等价定义中的两个任意的开集，可得  $\sigma_{1,-1}$  在不变子系统  $\Lambda_2$  上是拓扑传递的。

**命题 3.8**  $F_{3,23}$  在不变子集  $\Lambda_2$  上是拓扑传递的。

证明：类似于命题 3.4，此处从略。

在命题3.7的证明中若取两个  $M \times M$  阶矩阵  $E$  和  $F$  相同，则可得到  $\sigma_{1,-1}$  和  $F_{3,23}$  在  $\Lambda_2$  中周期点的稠密性。于是最终得到：

**定理3.4** (1)  $\sigma_{1,-1}$  在  $\Lambda_2$  上是Li-Yorke混沌的；

(2)  $F_{3,23}$  在  $\Lambda_2$  上是Devaney混沌的。

下面本文用拓扑半共轭的方法，来估计  $F_{3,23}$  在不变子集  $\Lambda_2$  上的拓扑熵。

现在我们对开头提出的滑翔机给出动力学分析，我们作如下的块映射变换<sup>[56]</sup>：

$$0 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, 2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, 3 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, 4 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

本文用 5 个符号的一维细胞自动机规则来研究，部分真值表如下：

$$(0,1,0) \longrightarrow 2, (0,2,0) \longrightarrow 3, (0,4,0) \longrightarrow 1, (3,0,0) \longrightarrow 4$$

其它的全部输出 0，由此计算得到对应的十进制规则如下： $f_N = 1 \cdot 5^{20} + 2 \cdot 5^5 + 3 \cdot 5^{10} + 4 \cdot 5^{75} = 105879118406787542383540312584955245256519317656256250$ 。

**命题 3.9** 存在一个非空子集  $\Lambda'_2$  满足

$$f_N^4 \big|_{\Lambda'_2} = \sigma_R \big|_{\Lambda'_2}$$

其中  $\Lambda'_2 = \Lambda_{B'} = \{x \in S^Z \mid x_{[i-1,i+1]} \in B', \forall i \in Z\}$ ， $B' = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,0,2), (0,2,0), (2,0,0), (0,0,3), (0,3,0), (3,0,0), (0,0,4), (0,4,0), (4,0,0)\}$ 。

计算  $\Lambda'_2$  的转移矩阵  $T$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

计算得到  $\log(\rho(T)) = 0.6931$ ， $\rho(T)$  表示转移矩阵  $T$  的谱半径。

**命题 3.10** 存在映射  $h_1$ ，使得系统  $(f_N, \Lambda_2')$  和系统  $(F_{3,23}, \Lambda_2)$  是拓扑半共轭的。

由命题 1.4.2 知道，B3/S23 在这个  $\Lambda_2$  上拓扑熵不小于  $\frac{1}{4} \log(\rho(T)) \approx 0.1733$ 。

如果用  $0 \rightarrow \text{White}, 1 \rightarrow \text{Black}, 2 \rightarrow \text{Green}, 3 \rightarrow \text{Orange}, 4 \rightarrow \text{Blue}$ ，我们可以清楚的看到演化是每迭代 4 次向右移动 1 位。

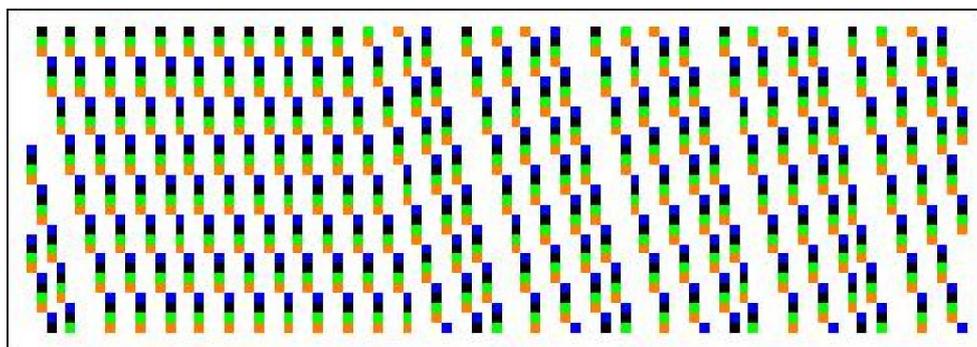


图 3.8 细胞自动机  $f_N$  在  $\Lambda_2'$  上的随机演化图

## 第四章 总结与展望

### 4.1 总结

本文运用符号动力学的工具研究了普适性初等细胞自动机 (ECA) 110 的滑翔机  $E^3$  的动力学性质, 得到了全局映射的一个不变子系统, 讨论了在不变子系统上的性质, 刻画了它的复杂性, 例如, 拓扑传递、拓扑混合、正拓扑熵等, 从而得到它们是 Li-Yorke 和 Devaney 意义下混沌的。接着, 作者基于大量的模拟实验, 给出了一个关于 110 号规则 E 类滑翔机不变子系统关系式的一个猜想。

二维 Moore 邻域细胞自动机 Diffusion Rule (B2/S7) 和生命游戏 (B3/S23) 是本文的研究重点。首先, 本文介绍了有关二维符号动力学的一些基础知识, 基于四个拓扑共轭映射  $\bar{T}$  与  $T^{UD}, T^{LR}, T^D$ , 对二维 Moore 邻域 outer totalistic 规则进行了分类。由于规则数目较多 (约有 30 万个), 本文编制了计算机程序对常见的规则给出了分类结果, 简化了 outer totalistic 规则的研究范围。特别重要的是, 本文基于二维不变子系统的定义, 找到了 B2/S7 和 B3/S23 的一个滑翔机的不变子集, 初步研究了滑翔机在不变子集上的动力学性质, 得到了全局映射在不变子系统上是拓扑传递的, 为高维细胞自动机的研究提供了一个良好的线索。最后, 本文用拓扑半共轭的方法, 找到一个连续满射  $h_1$ , 估计两个二维不变子系统的拓扑熵是大于零的, 由此刻画了不变子系统的复杂性。

### 4.2 展望

二维 CA 的复杂程度远远高于一维 CA。从符号动力学的角度而言, 二维 CA 缺少必要的数学刻画的工具。而且对一维 CA 行之有效的方法, 在高维则不再成立。例如, 在二维 CA 成立拓扑混合的子系统可以有零拓扑熵, 这在一维 CA 是不可想象的。拓扑熵的计算一直是二维 CA 的难点, 到目前为止, 能够计算出准确拓扑熵的都是刻意构造的精巧例子, 很难应用到其它情况。然而, 本文从拓扑半共轭的角度估计二维 CA 有限型子移位的拓扑熵也是建立在拓扑熵定义一致的基础上。另外, 本文所发现的子系统是建立在滑翔机的基础上, 有很大的局限性, 不能应用到其它较为一般的情况。最后本文对生命游戏的研究也只是冰山一角, 二维 CA 的研究存在着大量的亟待解决的问题。

## 致谢

时间过得好快，真的要毕业了。回想读研的时光，我学到了很多东西。

感谢我尊敬的导师陈芳跃教授，是陈老师引领我走进了学术研究的殿堂，教会了我怎样思考问题、发现问题和解决问题。两年半的研究生生涯，陈老师不论在生活还是在学习上，都给了我们很大的关心和支持。同时，他还给予了我们许多来之不易的机会，使我们开拓了的眼界，提升了认识，丰富了知识。这篇毕业论文是在陈老师的指导下完成的，从开始的选题到最后框架的设计，陈老师倾注了大量的时间和精力。在此，对陈老师表示深深的敬意和感谢！

感谢王芳和刘莘莘同学，论文中的许多方法和灵感都来源与和他们的讨论得来的。还有金伟锋师兄，他对我论文的初稿提出了宝贵的修改意见，使我的论文增色不少。感谢我的师弟师妹、毕业的师兄师姐以及 10 级所有的同学们，正是他们的帮助与鼓励，使我度过了快乐而充实的研究生生活。

感谢洪世煌教授、王桂祥教授、韩广国副教授、裘哲勇副教授以及所有传授我知识的老师们，正是他们渊博的知识和严谨求实的态度，给我学习新事物打下了一个良好的理论基础。

最后，特别要感谢养育多年我的父母，祝福他们身体健康，万事如意！

## 参考文献

- [1] von Neumann J. Theory of self-reproducing automata [M] (edited and completed by A. W. Burks), University of Illinois Press, Urbana and London, 1966.
- [2] Gardner M. The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game life[J], Sci. Am., 1970, 223: 120-123.
- [3] Wolfram S. A new kind of science [M], Champaign Illinois: Wolfram Media, 2002.
- [4] Chua L.O., Yoon S., Dogaru R. A nonlinear dynamics perspective of Wolfram's new kind of science. Part I: Threshold of complexity [J], International Journal of Bifurcation and Chaos, 2002, 12:2655-2766.
- [5] Chua L.O., Sbitnev V.I., Yoon S. A nonlinear dynamics perspective of Wolfram's new kind of science. Part IV: From Bernoulli-shift to  $1/f$  spectrum[J], International journal of Bifurcation and Chaos, 2005, 15:1045-1223.
- [6] Chua L.O., Sbitnev V.I., Yoon S. A nonlinear dynamics perspective of Wolfram's new kind of science. Part VI: From time-reversible attractors to the arrows of time [J], International Journal of Bifurcation and Chao, 2006, 16:1097-1373,
- [7] Chua L.O., Guan J.B., Valery I.S., Shin J. A nonlinear dynamics perspective of Wolfram's new kind of science. Part VII: Isle of Eden [J], International Journal of Bifurcation and Chaos, 2007, 17:2839-3012,
- [8] Guan J.B., Shen S.W., Tang C.B., Chen F.Y. Extending Chua's global equivalence theorem on Wolfram's a new kind of science [J], International Journal of Bifurcation and Chaos, 2007, 17:4245-4259.
- [9] Lindgren K. and Nordahl M. Universal computation in simple one-dimensional cellular automata[J], Complex Systems, 1990, 4:229-318.
- [10] McIntosh H.V. Rule 110 as it relates to the presence of gliders [J], 1999. <http://delta.cs.cinvestav.mx/mcintosh/oldweb/pautomata.html>.
- [11] Martinez G.J., McIntosh H.V. and Seck-Tuoh-Mora J.C. Gliders in rule 110[J], International Journal of Unconventional Computing, 2005, 2:1-49.
- [12] Martinez G.J., McIntosh H.V., Seck-Tuoh-Mora J.C. and Chapa-Vergara S.V. Reproducing the cyclic tag system developed by Matthew Cook with rule 110 using the phases  $f_i$ , Journal of

- Cellular Automata[J], 2011, 6:121-161.
- [13] Bell D.I.: High Life—An interesting variant of life. <http://www.tip.net.au/~dbell/>, 1994.
- [14] Paul Rendell. A turing machine in Conway's game of life [J]. Collision-Based Computing, Springer, 513-540
- [15] David Eppstein. Searching for Spaceships [J], MSRI Publications, 2002, 433-452.
- [16] Norman H.P. and wolfram S. Two -dimensional cellular automata [J], Journal of Statistical physics, vole, 38, 1985.
- [17] Nick Gotts. Emergent Complexity in Conway's Game of Life [M], Spring, London, 2010.
- [18] Dieter A. Wolf-Gladrow, Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models - An Introduction [M], Springer, Berlin ,2005.
- [19] Nicolas O. Universalities in cellular automata –a short survey [J], Journal Automata Cellular 2008, 102-118.
- [20] Kari J. Theory of cellular automata: A survey [J], Theoretical Computer Science, 2005, 334: 3-33.
- [21] 谢惠民. 复杂性与动力系统[M], 上海: 上海科技教育出版社, 1994.
- [22] Eppstein D. Gliders and Wolfram's classification. <http://www.ics.uci.edu/eppstein/ca/wolfram.html>, 2008.
- [23] Genaro J.M., Andrew A. and Ramon A.S. Complex dynamics of elementary cellular automata emerging from chaotic rules [J], International Journal of Bifurcation and Chaos, 2012.
- [24] Giovanni E. P. Chua's Nonlinear Dynamics Perspective of Cellular Automata [J], 2010.
- [25] 周作领. 符号动力系统[M], 上海: 上海科技教育出版社, 1997.
- [26] Lind D., Marcus B. An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding [M], Cambridge University Press, 1995.
- [27] Kitchens B. Symbolic dynamics: one-sided, two-sided and countable state markov shifts [M], Springer-Verlag, Berlin, New York, 1998.
- [28] Griffeath D. and Moore, C. (eds.). New constructions in cellular automata [J], Oxford University Press, 2003.
- [29] Giles J. What kind of science is this? [J], Nature, 2002, 417:216-218.
- [30] Cook M. Universality in elementary cellular automata [J], Complex Systems, 2004, 15:1-40.
- [31] Wolfram S. Theory and applications of cellular automata [J], World Scientific, Singapore, 1986.

- [32] Martinez G.J., Adamatzky A., Stephens C.R. and Hoeich A.F. Cellular automaton supercolliders[J], *International Journal of Modern Physics*, 2011, 22:419-439.
- [33] Hedlund G.A. Endomorphisms and automorphism of the shift dynamical system [J], *Theory of Computing Systems*, 1969, 3:320-375.
- [34] Xiong J.C., Young Z. Chaos caused by a topologically mixing map in dynamical systems and related topics [J], World Scientific, Singapore, 1992.
- [35] Chen F.Y., Shi L., Chen G.R. and Jin W.F. Chaos and gliders in periodic cellular automaton Rule 62[J], *Journal of Cellular Automata*, in press.
- [36] Chen F.Y., Chen G.R., Jin W.F. Transitivity and chaoticity in 1-d cellular automata[J], *Dynamical Systems*, 2012.
- [37] Devaney R.L. An introduction to chaotic dynamical systems [J], Addison-Wesley, 1989.
- [38] Banks J., Brooks J., Cairns G., Davis G. and Stacey, P. On the Devaney's definition of chaos [J], *American Mathematical Monthly*, 1992, 99:332-334.
- [39] 金伟峰. 二维符号动力学与细胞自动机 [P], 浙江师范大学, 2009.
- [40] 陈芳跃. CNN 符号动力学系统 [D], 上海大学, 2004.
- [41] Anthony N. Q., Paul B. T. Subshifts of multi-dimensional shifts of finite type [J], *Ergod. Thoe. Dynamic System*. 2000, 20: 859-874.
- [42] Lind D. Multidimensional symbolic dynamic [J], *Proc. Symp. Appl. Math.*, 2004, 40: 61-79.
- [43] 管俊彪. CA 符号动力学理论及其应用研究[D], 上海大学, 2009.
- [44] Durand B. and Roka Zs. The game of life: universality revisited [J], *Cellular automata (Saissac, 1996) (M. Delorme and J. Mazoyer, eds.)*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999, 51-74.
- [45] Genaro J. M., Andrew A., and Harold V. M. Localization Dynamics in a Binary Two-Dimensional Cellular Automaton: The Diffusion Rule [M], Springer-Verlag London, 2010, 289-313.
- [46] Jean-Claude Heudin. A New Candidate Rule for the Game of Two-dimensional Life [J], *Complex Systems*, 1996, 367-381.
- [47] 迈克尔·J. 布拉德利. 数学前沿: 1950-现在[M], 上海科学技术文献出版社, 2008.
- [48] Hochman M., Meyerovitch T. A characterization of the entropies of multidimensional shifts of finite type [J], Preprint, 2007.
- [49] Johnson A.S.A., Madden K.M. The decomposition theorem for two-dimensional shifts of finite type [J], *Proceedings of the Amer. Math. Soc.*, 1999, 127: 1533-1543.

- [50] Robinson E. A. Jr., Sahin A. A. Mixing properties of nearly maximal entropy measures for  $Z^d$  shifts of finite type [J], *Colloq. Math.*, 2000, Part 1, 43-50.
- [51] Ban J.C., Lin S.S. Patterns Generation and transition matrices in multi-dimensional lattice models [J], *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2005, 13: 637-658.
- [52] Shmuel F. On the entropies for  $Z^d$  shifts of finite type [J], *Linear Alge. Appl.*, 1997, 252: 199-220.
- [53] Johnson A., Kass S., Madden K. Projectional entropy in higher dimensional shifts of finite type [J], *Complex Systems*, 2007, 17: 243-257.
- [54] Ban J.C., Lin S.Y. Mixing Property and entropy conjugacy of  $Z^2$  subshift of finite type: a case study [J], *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2009, 19: 2979-2991.
- [55] Chen F.Y., Jin W.F., Chen G. R., Chen L. Chaos emerged on the ‘edge of chaos’ [J], *International Journal of Computer Mathematics*, 2012, 12: 1584–1595.
- [56] Jin W.F., Chen F.Y. Topological chaos of universal elementary cellular automata rule [J], *Nonlinear Dynamic*, 2011, 63:217-222.

## 附录

### 附录 I

#### 一、 在读期间完成的学术论文

- 1 Lingxiao Si, Fangyue Chen, Fang Wang, and Pingping Liu. Chaotic Subsystem Come From Glider  $E^3$  of CA Rule 110 [C]. 2012 International Conference on Scientific Computing.
- 2 Fang Wang, Fangyue Chen, Lingxiao Si, and Pingping Liu. Topological Mixing Derived From Glider  $D_1$  of Universal ECA Rule [C]. 2012 International Conference on Scientific Computing.
- 3 Pingping Liu, Fangyue Chen, Lingxiao Si, and Wang Fang. From Glider to Chaos: A Transitive Subsystem Derived From Glider  $\bar{B}$  of CA Rule 110 [C]. 2012 International Conference on Scientific Computing.

#### 二、 参加的科研项目

- 1 国家自然科学基金面上项目：符号动力系统在细胞自动机研究中的应用(11171084).  
2012.01-2015.12.
- 2 国家自然科学基金面上项目：感知器网络的理论和学习算法研究(60872093).  
2009.01-2011.12.

## 附录 II

决定系统  $A$  是一个含有 595 个元素长度为 31 的二进制序列,  $\forall a = (a_0, a_1, \dots, a_{30}) \in A$ , 十进制  $D(a) = \sum_{i=0}^{30} a_i \cdot 2^{30-i}$ , 下面列出了十进制代码。

$A = \{5078093, 10156187, 14664927, 20312375, 29329854, 32525809, 40624751, 40864190, 51437331, 58659708, 65051618, 65171337, 65790575, 81249503, 81728380, 102874662, 103217307, 104736504, 116956130, 117319416, 120713527, 130103236, 130342675, 131581151, 135134285, 141527486, 159510605, 160549965, 162002381, 162335821, 162499006, 163066125, 163263949, 163447093, 163455031, 163456519, 163456583, 163456671, 163456692, 163456736, 163456748, 163456760, 163456762, 163456763, 163456767, 163461335, 163461569, 163462193, 163481393, 163496437, 163510261, 163574221, 205749325, 206434615, 209473009, 225645436, 233912260, 234638833, 238406733, 241332105, 241427055, 242190782, 242252877, 252476493, 260206473, 260685350, 263162302, 270268571, 283054972, 298601969, 319021211, 321099931, 324004763, 324671643, 324998012, 326132251, 326527899, 326894187, 326910063, 326913039, 326913166, 326913343, 326913384, 326913473, 326913497, 326913520, 326913521, 326913524, 326913526, 326913527, 326913535, 326922670, 326923139, 326924387, 326962787, 326992875, 327020523, 327148443, 404686047, 411498651, 412869231, 418946018, 421315807, 444554463, 449889503, 451290872, 451344539, 452500450, 461574367, 464739551, 467669855, 467796863, 467820668, 467821683, 467823101, 467823427, 467824140, 467824333, 467824512, 467824520, 467824521, 467824526, 467824527, 467824545, 467824560, 467824573, 467824636, 467897715, 467901471, 467911455, 468218655, 468459359, 468680543, 469277666, 469703903, 471798652, 476813467, 482664211, 482854111, 484381564, 484505755, 504952987, 520412947, 521370701, 526324604, 534198212, 540537143, 562675238, 566109944, 567049293, 597203938, 638042423, 642199863, 648009527, 649343287, 649996024, 652264503, 653055799, 653788375, 653820127, 653826079, 653826332, 653826687, 653826768, 653826947, 653826995, 653827040, 653827042, 653827043, 653827048, 653827052, 653827055, 653827071, 653845340, 653846279, 653848775, 653925575, 653985751, 654041047, 654296887, 670420465, 755781105, 778203017, 779061694, 797556262, 809372094, 813530189, 822997303, 825738463, 837892036, 842631614, 861724435, 875640772, 889108926, 899779006, 902581745, 902689079, 905000900, 923148734, 929479102, 935339710, 935593726, 935641336, 935643366, 935646202, 935646854, 935648280, 935648666, 935649024, 935649040, 935649043, 935649052, 935649054, 935649091, 935649120, 935649147, 935649272, 935795430, 935802942, 935822910, 936437310, 936918718, 937361086, 938555332, 939407806, 942738929, 943597304, 953626935, 965328422, 965708222, 968763128, 969011511, 993381873, 1009905975, 1040022605, 1040266737, 1040825894, 1042298865, 1042679745, 1042695985, 1042718679, 1042723889, 1042735300, 1042738391, 1042741252, 1042741376, 1042741400, 1042741401, 1042741402, 1042741403, 1042741475, 1042741479, 1042741488, 1042741788, 1042742023, 1042742239, 1042743239, 1043912497, 1043972593, 1044132337, 1049047537, 1052649208, 1052898801, 1056437745, 1065991718, 1068396425, 1068468670, 1072811505, 1076280870, 1081074287, 1090004728, 1094173919, 1099460489, 1106327492, 1106637111, 1125350477, 1126110076, 1132219889, 1134098587, 1141308966, 1144505567, 1153497126, 1154016806, 1154743014, 1154909734, 1155274886, 1155373798, 1155465370, 1155469339, 1155470083, 1155470115, 1155470159, 1155470170, 1155470192, 1155470198, 1155470204, 1155470205, 1155470207, 1155472491, 1155472608, 1155472920, 1155482520, 1155490042, 1155496954, 1155528934, 1186564542, 1192945190, 1194407876, 1194837215, 1194868262, 1199980070, 1204084499, 1223042808, 1276084847, 1280176439, 1283214833, 1284399727, 1296019055, 1298686575, 1299414093, 1299992049, 1304529007, 1306111599, 1307576751, 1307640255, 1307652158, 1307652665, 1307653374, 1307653537, 1307653894, 1307653990, 1307654080, 1307654084, 1307654087, 1307654096, 1307654104, 1307654110, 1307654142, 1307690681, 1307692559, 1307697551, 1307851151, 1307971503, 1308082095, 130859377$

5, 1309641150, 1340840930, 1355079443, 1357266470, 1408952056, 1451632376, 1462843332, 1463272671, 1472519955, 1480506918, 1504604041, 1511562210, 1545111288, 1556406035, 1558123388, 1570432760, 1593753126, 1593875192, 1594891256, 1595081696, 1595089816, 1595101163, 1595103768, 1595109474, 1595111019, 1595112450, 1595112512, 1595112524, 1595112525, 1595112561, 1595112563, 1595112568, 1595112718, 1595112835, 1595112943, 1595113443, 1595698072, 1595728120, 1595807992, 1598265592, 1600191224, 1601960696, 1606737683, 1607976159, 1610147576, 1611882259, 1618744188, 1620828783, 1623472068, 1626905570, 1627060379, 1636796862, 1644396307, 1645994607, 1650490387, 1650750227, 1651113331, 1651196691, 1651379267, 1651428723, 1651474509, 1651476493, 1651476865, 1651476881, 1651476903, 1651476909, 1651476920, 1651476923, 1651476926, 1651476927, 1651478069, 1651478128, 1651478284, 1651483084, 1651486845, 1651490301, 1651506291, 1667024095, 1670214419, 1671160431, 1671175955, 1673731859, 1675784073, 1685263228, 1713830043, 1715349240, 1723448870, 1727568866, 1728562399, 1751281545, 1752375059, 1778217852, 1799558012, 1805163490, 1805378159, 1810001801, 1813995283, 1826043844, 1846297468, 1858958204, 1870618387, 1870679420, 1871187452, 1871282672, 1871286732, 1871292405, 1871293708, 1871296561, 1871297333, 1871298049, 1871298080, 1871298086, 1871298104, 1871298105, 1871298108, 1871298183, 1871298241, 1871298295, 1871298545, 1871590860, 1871605884, 1871645820, 1872874620, 1873837436, 1874722172, 1877110665, 1877729903, 1878815612, 1879682953, 1884156215, 1885477858, 1887194609, 1892140255, 1895939977, 1898987017, 1899116937, 1899298489, 1899340169, 1899431457, 1899456185, 1899479078, 1899480070, 1899480256, 1899480264, 1899480275, 1899480278, 1899480284, 1899480285, 1899480287, 1899480858, 1899480888, 1899480966, 1899483366, 1899485246, 1899486974, 1899494969, 1907253871, 1908849033, 1909322039, 1909329801, 1910607753, 1930656845, 1931416444, 1937526257, 1938023023, 1949929353, 1976430903, 1978742724, 1980739465, 1986763746, 2009051017, 2012606775, 2013583300, 2015819931, 2019811951, 2021711812, 2023235332, 2023300292, 2023391068, 2023411908, 2023457552, 2023469916, 2023481363, 2023481859, 2023481952, 2023481956, 2023481961, 2023481963, 2023481966, 2023481967, 2023482253, 2023482268, 2023482307, 2023483507, 2023484447, 2023485311, 2023489308, 2028166340, 2028402843, 2028406724, 2029045700, 2048706500, 2061957275, 2063113186, 2064111556, 2078267332, 2080045211, 2080533474, 2081651789, 2084597730, 2085359490, 2085391970, 2085437358, 2085447778, 2085470600, 2085476782, 2085482505, 2085482753, 2085482800, 2085482802, 2085482804, 2085482805, 2085482807, 2085482950, 2085482958, 2085482977, 2085483577, 2085484047, 2085484479, 2085486478, 2087824994, 2087943245, 2087945186, 2088264674, 2098095074, 2104720461, 2105298417, 2105797602, 2112875490, 2116483227, 2117713446, 2126102054, 2126391032, 2131983437, 2132598547, 2136792851, 2136937340, 2140041097, 2143762372, 2145623010}.

### 附录III

二维 Moore 邻域 Outer totalistic 规则十进制转换表。

例如，对于生命游戏 B3/S23，本文把 B3、S2 和 S3 对应的十进制代码放到集合  $M$  中，则生命游戏十进制代码  $D = \sum_{i=1}^n 2^{a_i}, a_i \in M$ ，其中  $n$  表示  $M$  中元素个数。计算出来的生命游戏的十进制代码  $D =$   
 47634829485252037513200973884082471888288955642325528262910887637847274372981720  
 534370017768342996036219492316860704401273651054628223608960，共计 140 位数字。

Birth	十进制代码
0	0
1	1, 2, 4, 8, 32, 64, 128, 256
2	3, 5, 6, 9, 10, 12, 33, 34, 36, 40, 65, 66, 68, 72, 96, 129, 130, 132, 136, 160, 192, 257, 258, 260, 264, 288, 320, 384
3	7, 11, 13, 14, 35, 37, 38, 41, 42, 44, 67, 69, 70, 73, 74, 76, 97, 98, 100, 104, 131, 133, 134, 137, 138, 140, 161, 162, 164, 168, 193, 194, 196, 200, 224, 259, 261, 262, 265, 266, 268, 289, 290, 292, 296, 321, 322, 324, 328, 352, 385, 386, 388, 392, 416, 448
4	15, 39, 43, 45, 46, 71, 75, 77, 78, 99, 101, 102, 105, 106, 108, 135, 139, 141, 142, 163, 165, 166, 169, 170, 172, 195, 197, 198, 201, 202, 204, 225, 226, 228, 232, 263, 267, 269, 270, 291, 293, 294, 297, 298, 300, 323, 325, 326, 329, 330, 332, 353, 354, 356, 360, 387, 389, 390, 393, 394, 396, 417, 418, 420, 424, 449, 450, 452, 456, 480
5	47, 79, 103, 107, 109, 110, 143, 167, 171, 173, 174, 199, 203, 205, 206, 227, 229, 230, 233, 234, 236, 271, 295, 299, 301, 302, 327, 331, 333, 334, 355, 357, 358, 361, 362, 364, 391, 395, 397, 398, 419, 421, 422, 425, 426, 428, 451, 453, 454, 457, 458, 460, 481, 482, 484, 488
6	111, 175, 207, 231, 235, 237, 238, 303, 335, 359, 363, 365, 366, 399, 423, 427, 429, 430, 455, 459, 461, 462, 483, 485, 486, 489, 490, 492
7	239, 367, 431, 463, 487, 491, 493, 494
8	495

续表

Survival	十进制代码
0	16
1	17, 18, 20, 24, 48, 80, 144, 272
2	19, 21, 22, 25, 26, 28, 49, 50, 52, 56, 81, 82, 84, 88, 112, 145, 146, 148, 152, 176, 208, 273, 274, 276, 280, 304, 336, 400
3	23, 27, 29, 30, 51, 53, 54, 57, 58, 60, 83, 85, 86, 89, 90, 92, 113, 114, 116, 120, 147, 149, 150, 153, 154, 156, 177, 178, 180, 184, 209, 210, 212, 216, 240, 275, 277, 278, 281, 282, 284, 305, 306, 308, 312, 337, 338, 340, 344, 368, 401, 402, 404, 408, 432, 464
4	31, 55, 59, 61, 62, 87, 91, 93, 94, 115, 117, 118, 121, 122, 124, 151, 155, 157, 158, 179, 181, 182, 185, 186, 188, 211, 213, 214, 217, 218, 220, 241, 242, 244, 248, 279, 283, 285, 286, 307, 309, 310, 313, 314, 316, 339, 341, 342, 345, 346, 348, 369, 370, 372, 376, 403, 405, 406, 409, 410, 412, 433, 434, 436, 440, 465, 466, 468, 472, 496
5	63, 95, 119, 123, 125, 126, 159, 183, 187, 189, 190, 215, 219, 221, 222, 243, 245, 246, 249, 250, 252, 287, 311, 315, 317, 318, 343, 347, 349, 350, 371, 373, 374, 377, 378, 380, 407, 411, 413, 414, 435, 437, 438, 441, 442, 444, 467, 469, 470, 473, 474, 476, 497, 498, 500, 504
6	127, 191, 223, 247, 251, 253, 254, 319, 351, 375, 379, 381, 382, 415, 439, 443, 445, 446, 471, 475, 477, 478, 499, 501, 502, 505, 506, 508
7	255, 383, 447, 479, 503, 507, 509, 510
8	511

## 附录IV

二维 Moore 邻域 Outer totalistic 规则, 生成对偶规则的 Mathematica 程序代码。

```

B = {}; (*输入进制转换表B中的十进制元素, 之间用{}隔开*)
S = {}; (*输入进制转换表S中的十进制元素, 之间用{}隔开*)
m = {3}; n = {2, 3}; (*输入代码, 比如生命游戏, 输入时就是3和2, 3*)
N0 = Sum[2^(2 i), {i, m}];
N00 = Sum[2^(2 i + 1), {i, n}];
N0 + N00 (*原规则Wolfram的十进制代码*)
a1 = Table[Take[B[[i + 1]]], {i, m}];
a2 = Table[Take[S[[i + 1]]], {i, n}];
L0 = Flatten[Union[a1, a2]];
L = Union[L0];
a = Union[Table[511 - i, {i, L}]];
b = Table[i - 1, {i, 512}];
c = Complement[b, L];
d = Table[511 - i, {i, c}];
e = Intersection[c, d];
f = Intersection[L, a];
h = Complement[L, f];
g = Union[e, h];
x = Table[If[Intersection[g, B[[i]]] == B[[i]], i - 1, False], {i, 9}];
y = Table[If[Intersection[g, S[[i]]] == S[[i]], i - 1, False], {i, 9}];
t1 = Delete[x, Position[x, False]] (*对偶规则B后的代码*)
t2 = Delete[y, Position[y, False]] (*对偶规则S后的代码*)
N1 = Sum[2^(2 i), {i, t1}]; N2 = Sum[2^(2 i + 1), {i, t2}];
N1 + N2 (*对偶规则Wolfram的十进制代码*)

```

生命游戏输出结果如下:

**224** (\*原规则Wolfram的十进制代码\*)

**{0, 1, 2, 3, 4, 7, 8}** (\*对偶规则B后的代码, 也即B0123478\*)

**{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8}** (\*对偶规则S后的代码, 也即S01234678\*)

**254 975** (\*对偶规则Wolfram的十进制代码\*)



## 附录VI

生命游戏的决定系统  $B$  是由 394 个 9 行 9 列的 0-1 矩阵组成。为方便起见, 本文只给出了每个矩阵元素为 1 的坐标。例如,  $(5, (9, 7), (9, 9))$  表示第 5 个矩阵的 9 行 7 列和 9 行 9 列元素为 1, 其它都为 0。特别的, 第一个空串  $()$  表示  $9 \times 9$  的 0 矩阵。

$B = \{(), (2, (9, 9)), (3, (9, 8)), (4, (9, 7)), (5, (9, 7), (9, 9)), (6, (9, 6)), (7, (9, 6), (9, 8)), (8, (9, 5)), (9, (9, 5), (9, 7)), (10, (9, 4)), (11, (9, 4), (9, 6)), (12, (9, 3)), (13, (9, 3), (9, 5)), (14, (9, 2)), (15, (9, 2), (9, 4)), (16, (9, 1)), (17, (9, 1), (9, 3)), (18, (9, 1), (9, 2)), (19, (8, 9)), (20, (8, 9), (9, 7), (9, 9)), (21, (8, 8), (9, 9)), (22, (8, 8), (9, 6), (9, 8)), (23, (8, 7), (9, 8)), (24, (8, 7), (9, 8), (9, 9)), (25, (8, 7), (9, 5), (9, 7)), (26, (8, 7), (8, 9), (9, 8), (9, 9)), (27, (8, 6), (9, 7)), (28, (8, 6), (9, 7), (9, 8)), (29, (8, 6), (9, 4), (9, 6)), (30, (8, 6), (8, 8), (9, 7), (9, 8)), (31, (8, 5), (9, 6)), (32, (8, 5), (9, 6), (9, 7)), (33, (8, 5), (9, 3), (9, 5)), (34, (8, 5), (8, 7), (9, 6), (9, 7)), (35, (8, 4), (9, 5)), (36, (8, 4), (9, 5), (9, 6)), (37, (8, 4), (9, 2), (9, 4)), (38, (8, 4), (8, 6), (9, 5), (9, 6)), (39, (8, 3), (9, 4)), (40, (8, 3), (9, 4), (9, 5)), (41, (8, 3), (9, 1), (9, 3)), (42, (8, 3), (8, 5), (9, 4), (9, 5)), (43, (8, 2), (9, 3)), (44, (8, 2), (9, 3), (9, 4)), (45, (8, 2), (9, 2)), (46, (8, 2), (9, 1), (9, 2)), (47, (8, 2), (8, 4), (9, 3), (9, 4)), (48, (8, 1)), (49, (8, 1), (9, 2)), (50, (8, 1), (9, 2), (9, 3)), (51, (8, 1), (9, 1)), (52, (8, 1), (8, 3), (9, 2), (9, 3)), (53, (8, 1), (8, 2), (9, 1)), (54, (7, 9)), (55, (7, 9), (9, 9)), (56, (7, 9), (9, 8), (9, 9)), (57, (7, 9), (8, 7), (8, 9), (9, 8), (9, 9)), (58, (7, 8), (8, 9)), (59, (7, 8), (8, 9), (9, 9)), (60, (7, 8), (8, 9), (9, 8), (9, 9)), (61, (7, 8), (8, 9), (9, 7), (9, 8), (9, 9)), (62, (7, 8), (8, 6), (8, 8), (9, 7), (9, 8)), (63, (7, 7), (8, 8), (9, 6), (9, 7), (9, 8)), (64, (7, 7), (8, 8), (8, 9), (9, 7), (9, 8)), (65, (7, 7), (8, 5), (8, 7), (9, 6), (9, 7)), (66, (7, 7), (7, 9), (8, 8), (8, 9), (9, 8)), (67, (7, 6), (8, 7), (9, 5), (9, 6), (9, 7)), (68, (7, 6), (8, 7), (8, 8), (9, 6), (9, 7)), (69, (7, 6), (8, 4), (8, 6), (9, 5), (9, 6)), (70, (7, 6), (7, 8), (8, 7), (8, 8), (9, 7)), (71, (7, 5), (8, 6), (9, 4), (9, 5), (9, 6)), (72, (7, 5), (8, 6), (8, 7), (9, 5), (9, 6)), (73, (7, 5), (8, 3), (8, 5), (9, 4), (9, 5)), (74, (7, 5), (7, 7), (8, 6), (8, 7), (9, 6)), (75, (7, 4), (8, 5), (9, 3), (9, 4), (9, 5)), (76, (7, 4), (8, 5), (8, 6), (9, 4), (9, 5)), (77, (7, 4), (8, 2), (8, 4), (9, 3), (9, 4)), (78, (7, 4), (7, 6), (8, 5), (8, 6), (9, 5)), (79, (7, 3), (8, 4), (9, 2), (9, 3), (9, 4)), (80, (7, 3), (8, 4), (8, 5), (9, 3), (9, 4)), (81, (7, 3), (8, 1), (8, 3), (9, 2), (9, 3)), (82, (7, 3), (7, 5), (8, 4), (8, 5), (9, 4)), (83, (7, 2), (8, 3), (9, 1), (9, 2), (9, 3)), (84, (7, 2), (8, 3), (8, 4), (9, 2), (9, 3)), (85, (7, 2), (8, 2), (9, 1), (9, 2)), (86, (7, 2), (8, 1), (8, 2), (9, 1)), (87, (7, 2), (7, 4), (8, 3), (8, 4), (9, 3)), (88, (7, 1)), (89, (7, 1), (8, 2), (9, 1), (9, 2)), (90, (7, 1), (8, 2), (8, 3), (9, 1), (9, 2)), (91, (7, 1), (8, 1)), (92, (7, 1), (8, 1), (9, 1)), (93, (7, 1), (7, 3), (8, 2), (8, 3), (9, 2)), (94, (7, 1), (7, 2), (8, 1)), (95, (6, 9)), (96, (6, 9), (8, 9)), (97, (6, 9), (8, 8), (8, 9)), (98, (6, 9), (7, 7), (7, 9), (8, 8), (8, 9)), (99, (6, 8), (7, 9)), (100, (6, 8), (7, 9), (8, 9)), (101, (6, 8), (7, 9), (8, 8), (8, 9)), (102, (6, 8), (7, 9), (8, 7), (8, 8), (8, 9)), (103, (6, 8), (7, 6), (7, 8), (8, 7), (8, 8)), (104, (6, 7), (7, 8), (8, 6), (8, 7), (8, 8)), (105, (6, 7), (7, 8), (7, 9), (8, 7), (8, 8)), (106, (6, 7), (7, 5), (7, 7), (8, 6), (8, 7)), (107, (6, 7), (6, 9), (7, 8), (7, 9), (8, 8)), (108, (6, 6), (7, 7), (8, 5), (8, 6), (8, 7)), (109, (6, 6), (7, 7), (7, 8), (8, 6), (8, 7)), (110, (6, 6), (7, 4), (7, 6), (8, 5), (8, 6)), (111, (6, 6), (6, 8), (7, 7), (7, 8), (8, 7)), (112, (6, 5), (7, 6), (8, 4), (8, 5), (8, 6)), ($

113, (6, 5), (7, 6), (7, 7), (8, 5), (8, 6)), (114, (6, 5), (7, 3), (7, 5), (8, 4), (8, 5)), (115, (6, 5), (6, 7), (7, 6), (7, 7), (8, 6)), (116, (6, 4), (7, 5), (8, 3), (8, 4), (8, 5)), (117, (6, 4), (7, 5), (7, 6), (8, 4), (8, 5)), (118, (6, 4), (7, 2), (7, 4), (8, 3), (8, 4)), (119, (6, 4), (6, 6), (7, 5), (7, 6), (8, 5)), (120, (6, 3), (7, 4), (8, 2), (8, 3), (8, 4)), (121, (6, 3), (7, 4), (7, 5), (8, 3), (8, 4)), (122, (6, 3), (7, 1), (7, 3), (8, 2), (8, 3)), (123, (6, 3), (6, 5), (7, 4), (7, 5), (8, 4)), (124, (6, 2), (7, 3), (8, 1), (8, 2), (8, 3)), (125, (6, 2), (7, 3), (7, 4), (8, 2), (8, 3)), (126, (6, 2), (7, 2), (8, 1), (8, 2)), (127, (6, 2), (7, 1), (7, 2), (8, 1)), (128, (6, 2), (6, 4), (7, 3), (7, 4), (8, 3)), (129, (6, 1)), (130, (6, 1), (7, 2), (8, 1), (8, 2)), (131, (6, 1), (7, 2), (7, 3), (8, 1), (8, 2)), (132, (6, 1), (7, 1)), (133, (6, 1), (7, 1), (8, 1)), (134, (6, 1), (6, 3), (7, 2), (7, 3), (8, 2)), (135, (6, 1), (6, 2), (7, 1)), (136, (5, 9)), (137, (5, 9), (7, 9)), (138, (5, 9), (7, 8), (7, 9)), (139, (5, 9), (6, 7), (6, 9), (7, 8), (7, 9)), (140, (5, 8), (6, 9)), (141, (5, 8), (6, 9), (7, 9)), (142, (5, 8), (6, 9), (7, 8), (7, 9)), (143, (5, 8), (6, 9), (7, 7), (7, 8), (7, 9)), (144, (5, 8), (6, 6), (6, 8), (7, 7), (7, 8)), (145, (5, 7), (6, 8), (7, 6), (7, 7), (7, 8)), (146, (5, 7), (6, 8), (6, 9), (7, 7), (7, 8)), (147, (5, 7), (6, 5), (6, 7), (7, 6), (7, 7)), (148, (5, 7), (5, 9), (6, 8), (6, 9), (7, 8)), (149, (5, 6), (6, 7), (7, 5), (7, 6), (7, 7)), (150, (5, 6), (6, 7), (6, 8), (7, 6), (7, 7)), (151, (5, 6), (6, 4), (6, 6), (7, 5), (7, 6)), (152, (5, 6), (5, 8), (6, 7), (6, 8), (7, 7)), (153, (5, 5), (6, 6), (7, 4), (7, 5), (7, 6)), (154, (5, 5), (6, 6), (6, 7), (7, 5), (7, 6)), (155, (5, 5), (6, 3), (6, 5), (7, 4), (7, 5)), (156, (5, 5), (5, 7), (6, 6), (6, 7), (7, 6)), (157, (5, 4), (6, 5), (7, 3), (7, 4), (7, 5)), (158, (5, 4), (6, 5), (6, 6), (7, 4), (7, 5)), (159, (5, 4), (6, 2), (6, 4), (7, 3), (7, 4)), (160, (5, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6), (7, 5)), (161, (5, 3), (6, 4), (7, 2), (7, 3), (7, 4)), (162, (5, 3), (6, 4), (6, 5), (7, 3), (7, 4)), (163, (5, 3), (6, 1), (6, 3), (7, 2), (7, 3)), (164, (5, 3), (5, 5), (6, 4), (6, 5), (7, 4)), (165, (5, 2), (6, 3), (7, 1), (7, 2), (7, 3)), (166, (5, 2), (6, 3), (6, 4), (7, 2), (7, 3)), (167, (5, 2), (6, 2), (7, 1), (7, 2)), (168, (5, 2), (6, 1), (6, 2), (7, 1)), (169, (5, 2), (5, 4), (6, 3), (6, 4), (7, 3)), (170, (5, 1)), (171, (5, 1), (6, 2), (7, 1), (7, 2)), (172, (5, 1), (6, 2), (6, 3), (7, 1), (7, 2)), (173, (5, 1), (6, 1)), (174, (5, 1), (6, 1), (7, 1)), (175, (5, 1), (5, 3), (6, 2), (6, 3), (7, 2)), (176, (5, 1), (5, 2), (6, 1)), (177, (4, 9)), (178, (4, 9), (6, 9)), (179, (4, 9), (6, 8), (6, 9)), (180, (4, 9), (5, 7), (5, 9), (6, 8), (6, 9)), (181, (4, 8), (5, 9)), (182, (4, 8), (5, 9), (6, 9)), (183, (4, 8), (5, 9), (6, 8), (6, 9)), (184, (4, 8), (5, 9), (6, 7), (6, 8), (6, 9)), (185, (4, 8), (5, 6), (5, 8), (6, 7), (6, 8)), (186, (4, 7), (5, 8), (6, 6), (6, 7), (6, 8)), (187, (4, 7), (5, 8), (5, 9), (6, 7), (6, 8)), (188, (4, 7), (5, 5), (5, 7), (6, 6), (6, 7)), (189, (4, 7), (4, 9), (5, 8), (5, 9), (6, 8)), (190, (4, 6), (5, 7), (6, 5), (6, 6), (6, 7)), (191, (4, 6), (5, 7), (5, 8), (6, 6), (6, 7)), (192, (4, 6), (5, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6)), (193, (4, 6), (4, 8), (5, 7), (5, 8), (6, 7)), (194, (4, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)), (195, (4, 5), (5, 6), (5, 7), (6, 5), (6, 6)), (196, (4, 5), (5, 3), (5, 5), (6, 4), (6, 5)), (197, (4, 5), (4, 7), (5, 6), (5, 7), (6, 6)), (198, (4, 4), (5, 5), (6, 3), (6, 4), (6, 5)), (199, (4, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5)), (200, (4, 4), (5, 2), (5, 4), (6, 3), (6, 4)), (201, (4, 4), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 5)), (202, (4, 3), (5, 4), (6, 2), (6, 3), (6, 4)), (203, (4, 3), (5, 4), (5, 5), (6, 3), (6, 4)), (204, (4, 3), (5, 1), (5, 3), (6, 2), (6, 3)), (205, (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 4)), (206, (4, 2), (5, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3)), (207, (4, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 2), (6, 3)), (208, (4, 2), (5, 2), (6, 1), (6, 2)), (209, (4, 2), (5, 1), (5, 2), (6, 1)), (210, (4, 2), (4, 4), (5, 3), (5, 4), (6, 3)), (211, (4, 1)), (212, (4, 1), (5, 2), (6, 1), (6, 2)), (213, (4, 1), (5, 2), (5, 3), (6, 1), (6, 2)), (214, (4, 1), (5, 1)), (215, (4, 1), (5, 1), (6, 1)), (216, (4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 3), (6, 2)), (217, (4, 1), (4, 2), (5, 1)), (218, (3, 9)), (219, (3, 9), (5, 9)), (220, (3, 9), (5, 8), (5, 9)), (221, (3, 9), (4, 7), (4, 9), (5, 8), (5, 9)), (222, (3, 8), (4, 9)), (223, (3, 8), (4, 9), (5, 9)), (224, (3, 8), (4, 9),

(5, 8), (5, 9)), (225, (3, 8), (4, 9), (5, 7), (5, 8), (5, 9)), (226, (3, 8), (4, 6), (4, 8), (5, 7), (5, 8)), (227, (3, 7), (4, 8), (5, 6), (5, 7), (5, 8)), (228, (3, 7), (4, 8), (4, 9), (5, 7), (5, 8)), (229, (3, 7), (4, 5), (4, 7), (5, 6), (5, 7)), (230, (3, 7), (3, 9), (4, 8), (4, 9), (5, 8)), (231, (3, 6), (4, 7), (5, 5), (5, 6), (5, 7)), (232, (3, 6), (4, 7), (4, 8), (5, 6), (5, 7)), (233, (3, 6), (4, 4), (4, 6), (5, 5), (5, 6)), (234, (3, 6), (3, 8), (4, 7), (4, 8), (5, 7)), (235, (3, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6)), (236, (3, 5), (4, 6), (4, 7), (5, 5), (5, 6)), (237, (3, 5), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 5)), (238, (3, 5), (3, 7), (4, 6), (4, 7), (5, 6)), (239, (3, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)), (240, (3, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5)), (241, (3, 4), (4, 2), (4, 4), (5, 3), (5, 4)), (242, (3, 4), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 5)), (243, (3, 3), (4, 4), (5, 2), (5, 3), (5, 4)), (244, (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4)), (245, (3, 3), (4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 3)), (246, (3, 3), (3, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 4)), (247, (3, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)), (248, (3, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 2), (5, 3)), (249, (3, 2), (4, 2), (5, 1), (5, 2)), (250, (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1)), (251, (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 3)), (252, (3, 1)), (253, (3, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)), (254, (3, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2)), (255, (3, 1), (4, 1)), (256, (3, 1), (4, 1), (5, 1)), (257, (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (5, 2)), (258, (3, 1), (3, 2), (4, 1)), (259, (2, 9)), (260, (2, 9), (4, 9)), (261, (2, 9), (4, 8), (4, 9)), (262, (2, 9), (3, 7), (3, 9), (4, 8), (4, 9)), (263, (2, 8), (3, 9)), (264, (2, 8), (3, 9), (4, 9)), (265, (2, 8), (3, 9), (4, 8), (4, 9)), (266, (2, 8), (3, 9), (4, 7), (4, 8), (4, 9)), (267, (2, 8), (3, 6), (3, 8), (4, 7), (4, 8)), (268, (2, 8), (2, 9)), (269, (2, 7), (3, 8), (4, 6), (4, 7), (4, 8)), (270, (2, 7), (3, 8), (3, 9), (4, 7), (4, 8)), (271, (2, 7), (3, 5), (3, 7), (4, 6), (4, 7)), (272, (2, 7), (2, 9), (3, 8), (3, 9), (4, 8)), (273, (2, 6), (3, 7), (4, 5), (4, 6), (4, 7)), (274, (2, 6), (3, 7), (3, 8), (4, 6), (4, 7)), (275, (2, 6), (3, 4), (3, 6), (4, 5), (4, 6)), (276, (2, 6), (2, 8), (3, 7), (3, 8), (4, 7)), (277, (2, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6)), (278, (2, 5), (3, 6), (3, 7), (4, 5), (4, 6)), (279, (2, 5), (3, 3), (3, 5), (4, 4), (4, 5)), (280, (2, 5), (2, 7), (3, 6), (3, 7), (4, 6)), (281, (2, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5)), (282, (2, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5)), (283, (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 4)), (284, (2, 4), (2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 5)), (285, (2, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)), (286, (2, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4)), (287, (2, 3), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 3)), (288, (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 4)), (289, (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)), (290, (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3)), (291, (2, 2), (3, 2), (4, 1), (4, 2)), (292, (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1)), (293, (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 3)), (294, (2, 1)), (295, (2, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)), (296, (2, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2)), (297, (2, 1), (3, 1)), (298, (2, 1), (3, 1), (4, 1)), (299, (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 2)), (300, (2, 1), (2, 2), (3, 1)), (301, (1, 9)), (302, (1, 9), (3, 9)), (303, (1, 9), (3, 8), (3, 9)), (304, (1, 9), (2, 9)), (305, (1, 9), (2, 8), (2, 9)), (306, (1, 9), (2, 7), (2, 9), (3, 8), (3, 9)), (307, (1, 9), (2, 7), (2, 8), (2, 9)), (308, (1, 8)), (309, (1, 8), (2, 9)), (310, (1, 8), (2, 9), (3, 9)), (311, (1, 8), (2, 9), (3, 8), (3, 9)), (312, (1, 8), (2, 9), (3, 7), (3, 8), (3, 9)), (313, (1, 8), (2, 6), (2, 8), (3, 7), (3, 8)), (314, (1, 8), (2, 6), (2, 7), (2, 8)), (315, (1, 8), (1, 9)), (316, (1, 8), (1, 9), (2, 8)), (317, (1, 8), (1, 9), (2, 7), (2, 8)), (318, (1, 7)), (319, (1, 7), (2, 8), (3, 6), (3, 7), (3, 8)), (320, (1, 7), (2, 8), (2, 9), (3, 7), (3, 8)), (321, (1, 7), (2, 5), (2, 7), (3, 6), (3, 7)), (322, (1, 7), (2, 5), (2, 6), (2, 7)), (323, (1, 7), (1, 9), (2, 8), (2, 9)), (324, (1, 7), (1, 9), (2, 8), (2, 9), (3, 8)), (325, (1, 7), (1, 8)), (326, (1, 7), (1, 8), (2, 7)), (327, (1, 7), (1, 8), (2, 6), (2, 7)), (328, (1, 7), (1, 8), (1, 9)), (329, (1, 6)), (330, (1, 6), (2, 7), (3, 5), (3, 6), (3, 7)), (331, (1, 6), (2, 7), (2, 8), (3, 6), (3, 7)), (332, (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 5), (3, 6)), (333, (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6)), (334, (1, 6), (1, 8), (2, 7), (2, 8)), (335, (1, 6), (1, 8), (2, 7), (2, 8), (3, 7)), (336, (1, 6), (1, 7)), (337, (1, 6), (1, 7), (2, 6)), (338, (1, 6), (1, 7), (2, 5), (2, 6)), (33

9, (1, 6), (1, 7), (1, 8)), (340, (1, 5)), (341, (1, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)), (342, (1, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 5), (3, 6)), (343, (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5)), (344, (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)), (345, (1, 5), (1, 7), (2, 6), (2, 7)), (346, (1, 5), (1, 7), (2, 6), (2, 7), (3, 6)), (347, (1, 5), (1, 6)), (348, (1, 5), (1, 6), (2, 5)), (349, (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5)), (350, (1, 5), (1, 6), (1, 7)), (351, (1, 4)), (352, (1, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3, 5)), (353, (1, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5)), (354, (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4)), (355, (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)), (356, (1, 4), (1, 6), (2, 5), (2, 6)), (357, (1, 4), (1, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 5)), (358, (1, 4), (1, 5)), (359, (1, 4), (1, 5), (2, 4)), (360, (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4)), (361, (1, 4), (1, 5), (1, 6)), (362, (1, 3)), (363, (1, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)), (364, (1, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4)), (365, (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3)), (366, (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)), (367, (1, 3), (1, 5), (2, 4), (2, 5)), (368, (1, 3), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4)), (369, (1, 3), (1, 4)), (370, (1, 3), (1, 4), (2, 3)), (371, (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3)), (372, (1, 3), (1, 4), (1, 5)), (373, (1, 2)), (374, (1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)), (375, (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3)), (376, (1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 2)), (377, (1, 2), (2, 1), (2, 2)), (378, (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1)), (379, (1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 4)), (380, (1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3)), (381, (1, 2), (1, 3)), (382, (1, 2), (1, 3), (2, 2)), (383, (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2)), (384, (1, 2), (1, 3), (1, 4)), (385, (1, 1)), (386, (1, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)), (387, (1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)), (388, (1, 1), (2, 1)), (389, (1, 1), (2, 1), (3, 1)), (390, (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3)), (391, (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2)), (392, (1, 1), (1, 2)), (393, (1, 1), (1, 2), (2, 1)), (394, (1, 1), (1, 2), (1, 3))}.