



Instituto Politécnico Nacional  
Escuela Superior de Cómputo

TT 2017-B077



---

# Simulador de operaciones lógicas desde un autómata celular con comportamiento caótico a su proyección compleja

---

## Trabajo Terminal

Para obtener el grado de:  
**Ingeniería en Sistemas Computacionales**

Presenta:  
**Moreno González Gabriela**

Director:  
**Dr. Genaro Juárez Martínez**

Ciudad de México

Noviembre 2018

# Agradecimientos:

*“A mis padres*

*María Claudia González Salinas e Isaac Moreno Avilés,  
porque ambos me mostraron el mundo a su manera y me permiten verlo ahora a la  
mía.”*

*“A mis hermanas*

*Mónica Moreno González y Diana Patricia Moreno González,  
porque cuando necesité una amiga siempre estuvieron ahí.”*

*“Para el mejor profesor del mundo*

*Genaro Juárez Martínez,  
por enseñarme a amar la investigación, y que siempre puedo dar más.”*

*“A mis amigos,*

*Jesús, Marco y Ulises  
por enseñarme que existen personas por las que vale la pena darlo todo.”*

*“Sólo podemos ver poco del futuro, pero lo suficiente para darnos cuenta de que hay  
mucho que hacer.”*

*Alan Turing*

---

# Advertencia

“Este documento contiene información desarrollada por la Escuela Superior de Cómputo del Instituto Politécnico Nacional, a partir de datos y documentos con derecho de propiedad y por lo tanto, su uso quedará restringido a las aplicaciones que explícitamente se convengan.” La aplicación no convenida exime a la escuela su responsabilidad técnica y da lugar a las consecuencias legales que para tal efecto se determinen. Información adicional sobre este reporte técnico podrá obtenerse en: La Subdirección Académica de la Escuela Superior de Cómputo del Instituto Politécnico Nacional, situada en Av. Juan de Dios Bátiz s/n Teléfono: 57296000, extensión 52000.

---

# Índice general

<b>Advertencia</b>	<b>3</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>21</b>
<b>2. Conceptos fundamentales</b>	<b>23</b>
2.1. Sistemas dinámicos . . . . .	23
2.1.1. Definición de un Sistema Dinámico . . . . .	23
2.1.2. Clasificación de los Sistemas . . . . .	24
2.1.3. Descripción del comportamiento de los Sistemas . . . . .	24
2.1.4. Análisis cuantitativo de un Sistema Dinámico . . . . .	27
2.2. Autómatas celulares . . . . .	28
2.2.1. Definición . . . . .	28
2.2.2. Elementos que conforman a un AC . . . . .	29
2.2.3. Extensión de los AC: funciones con memoria . . . . .	30
2.3. Autómatas celulares elementales . . . . .	33
2.3.1. Antecedentes . . . . .	33
2.3.2. Definción . . . . .	36
2.3.3. Propiedades . . . . .	37
2.3.4. Clasificación de Wolfram . . . . .	38
2.4. Herramientas utilizadas en el análisis de los ACE . . . . .	40
2.4.1. El exponente de Lyapunov para los ACE . . . . .	41
2.4.2. Clasificación de Wuensche . . . . .	43
2.4.3. Diagramas de De bruijn . . . . .	43
2.5. Sistemas caóticos. . . . .	46

2.5.1.	Definición de un sistema caótico. . . . .	46
2.5.2.	Propiedades. . . . .	47
2.5.3.	Identificación de un sistema caótico. . . . .	47
2.6.	Sistemas complejos. . . . .	47
2.6.1.	Definición de un sistema complejo. . . . .	47
2.6.2.	Propiedades. . . . .	48
2.6.3.	Identificación de un sistema complejo. . . . .	48
<b>3.</b>	<b>La regla 126 de los ACE</b>	<b>50</b>
3.1.	Antecedentes . . . . .	50
3.2.	Definición de la regla 126 . . . . .	51
3.3.	Propiedades . . . . .	53
3.4.	Clasificación de la regla 126 . . . . .	54
3.5.	Diagramas de De Bruijn para la regla 126 . . . . .	54
3.6.	Clasificación de Wuensche para la regla 126 . . . . .	57
<b>4.</b>	<b>La regla 126 con memoria de 4 generaciones</b>	<b>60</b>
4.1.	Antecedentes . . . . .	60
4.2.	La regla 126 con memoria: función de mayoría . . . . .	61
4.3.	Propiedades . . . . .	62
4.4.	Elementos dentro del espacio de evoluciones . . . . .	64
4.4.1.	Fondos periodicos . . . . .	65
4.4.2.	Gliders . . . . .	67
4.4.3.	Estructuras estacionarias . . . . .	72
4.4.4.	Gliders-gun . . . . .	73
4.5.	Puntos de colisión de los elementos dentro del espacio de evoluciones	76
4.5.1.	Puntos de colisión de los gliders . . . . .	76
4.5.2.	Puntos de colisión de las estructuras estacionarias . . . . .	80
4.6.	Colisiones entre los elementos dentro del espacio de evoluciones . . . . .	82
4.6.1.	Colisiones binarias . . . . .	83
4.6.2.	Colisiones ternarias . . . . .	96
4.6.3.	Colisiones de orden superior . . . . .	144

---

<b>5. Computación basada en colisiones</b>	<b>146</b>
5.1. Antecedentes . . . . .	146
5.2. Definición . . . . .	149
5.2.1. Características principales . . . . .	149
5.2.2. Objetivos . . . . .	150
5.3. Determinación del poder de cómputo de un sistema . . . . .	151
5.3.1. Jerarquía de Chomsky . . . . .	151
5.3.2. Compuertas lógicas . . . . .	153
<b>6. Construcciones basadas en colisiones</b>	<b>160</b>
6.1. Objetos de la regla 126 con memoria . . . . .	160
6.1.1. Eaters . . . . .	160
6.1.2. Black-holes . . . . .	162
6.1.3. Solitons . . . . .	162
6.2. Computabilidad de la regla . . . . .	165
6.2.1. Lenguajes regulares . . . . .	165
6.2.2. Gramáticas Libres de Contexto . . . . .	172
6.2.3. Compuertas Lógicas . . . . .	174
6.2.4. Poder de computación de la regla . . . . .	185
<b>7. SOL: Simulador de Operaciones Lógicas</b>	<b>186</b>
7.1. Requerimientos . . . . .	186
7.1.1. Requerimientos funcionales . . . . .	187
7.1.2. Requerimientos no funcionales . . . . .	188
7.2. Arquitectura del sistema . . . . .	188
7.3. Módulos del sistema . . . . .	188
7.3.1. Autómatas Celulares Elementales . . . . .	189
7.3.2. Regla 126 con memoria . . . . .	192
7.3.3. Operaciones Lógicas . . . . .	196
7.4. Tecnologías a emplear . . . . .	199
7.5. Pruebas del sistema . . . . .	199
7.5.1. Autómatas Celulares Elementales . . . . .	199
7.5.2. Regla 126 con memoria . . . . .	205

7.5.3. Operaciones lógicas . . . . .	211
<b>8. Resultados finales</b>	<b>215</b>
8.1. Celebration of late. Prof. Harold V. McIntosh Achievements 2017 . . .	215
8.2. The Ninth International Conference on Complex Systems 2018 . . . .	217
8.3. Conclusiones . . . . .	217
8.4. Trabajo a futuro . . . . .	220
<b>Bibliografía</b>	<b>221</b>
<b>A. Atractores de la regla 126</b>	<b>225</b>
A.1. Atractores con longitud igual a 2. . . . .	225
A.2. Atractores con longitud igual a 3. . . . .	225
A.3. Atractores con longitud igual a 4. . . . .	226
A.4. Atractores con longitud igual a 5. . . . .	226
A.5. Atractores con longitud igual a 6. . . . .	226
A.6. Atractores con longitud igual a 7. . . . .	227
A.7. Atractores con longitud igual a 8. . . . .	227
A.8. Atractores con longitud igual a 9. . . . .	227
A.9. Atractores con longitud igual a 10. . . . .	228
A.10. Atractores con longitud igual a 11. . . . .	228
A.11. Atractores con longitud igual a 12. . . . .	229
A.12. Atractores con longitud igual a 13. . . . .	229
A.13. Atractores con longitud igual a 14. . . . .	230
A.14. Atractores con longitud igual a 15. . . . .	230
A.15. Atractores con longitud igual a 16. . . . .	231
A.16. Atractores con longitud igual a 17. . . . .	233
A.17. Atractores con longitud igual a 18. . . . .	235
A.18. Atractores con longitud igual a 19. . . . .	236
A.19. Atractores con longitud igual a 20. . . . .	237
A.20. Atractores con longitud igual a 21. . . . .	238
A.21. Atractores con longitud igual a 22. . . . .	239
A.22. Atractores con longitud igual a 23. . . . .	240
A.23. Atractores con longitud igual a 24. . . . .	241

---

<b>B. Colisiones realizadas</b>	<b>242</b>
B.1. Colisiones binarias . . . . .	242
B.1.1. Parámetros para definir la cantidad de colisiones binarias a realizarse . . . . .	242
B.1.2. Restricciones por dinámica . . . . .	246
B.1.3. g1 VS g2 . . . . .	246
B.1.4. g1 VS g6 . . . . .	252
B.1.5. g1 VS s1 . . . . .	257
B.1.6. g3 VS g4 . . . . .	260
B.1.7. g3 VS s2 . . . . .	264
B.1.8. g5 VS g2 . . . . .	268
B.1.9. g5 VS g6 . . . . .	273
B.1.10. g5 VS s1 . . . . .	279
B.1.11. s1 VS g2 . . . . .	282
B.1.12. s1 VS g6 . . . . .	286
B.1.13. s2 VS g4 . . . . .	289

---

# Índice de figuras

2.1. Ejemplo de un atractor de punto y de ciclo limitado . . . . .	25
2.2. Ejemplo de un Sistema Lineal y uno No Lineal . . . . .	26
2.3. Autómata celular con memoria y sin memoria, aplicando una función local. . . . .	32
2.4. Ejemplo de un ECA clase I: regla 160. . . . .	39
2.5. Gráfica de la frecuencia de células vivas por evolución: regla 160 . . .	39
2.6. Ejemplo de un ECA clase II: regla 108 . . . . .	39
2.7. Gráfica de la frecuencia de células vivas por evolución: regla 108 . . .	40
2.8. Ejemplo de un ECA clase III: regla 126 . . . . .	40
2.9. Gráfica de la frecuencia de células vivas por evolución: regla 126 . . .	40
2.10. Ejemplo de un ECA clase IV: regla 110 . . . . .	41
2.11. Gráfica de la frecuencia de células vivas por evolución: regla 110 . . .	41
2.12. Evolución de la regla 126 . . . . .	42
2.13. Evolución de la regla 126 . . . . .	42
2.14. Evolución de la regla 126 . . . . .	42
2.15. El diagrama de De Bruijn correspondiente a la regla 126 . . . . .	44
3.1. La definición de la regla 126 de acuerdo a sus vecinos izquierdo y derecho. . . . .	51
3.2. Evolución de la regla 126 hasta $t = 50$ con una célula viva. . . . .	52
3.3. Evolución de la regla 126 hasta $t = 70$ con el 30% de sus células vivas. . . . .	52
3.4. Densidad de las evoluciones en la regla 126. . . . .	53
3.5. Evolución de la regla 126 aleatoria. . . . .	54
3.6. Gráfica de la expresión regular. . . . .	57

3.7. Gráfica de la expresión regular. . . . .	58
4.1. La regla 126 con memoria de 4 generaciones con una célula viva central	62
4.2. La regla 126 con memoria de 4 generaciones con una condición aleatoria	63
4.3. Fondo periódico 1( $fp_1$ ) en el espacio de evoluciones . . . . .	65
4.4. Fondo periodico 2( $fp_2$ ) en el espacio de evoluciones . . . . .	66
4.5. Glider 1( $g_1$ ) moviéndose dentro del espacio de evoluciones . . . . .	67
4.6. Glider 2( $g_2$ ) moviéndose dentro del espacio de evoluciones . . . . .	68
4.7. Glider 3( $g_3$ ) moviéndose dentro del espacio de evoluciones . . . . .	69
4.8. Glider 4( $g_4$ ) moviéndose dentro del espacio de evoluciones . . . . .	70
4.9. Glider 5( $g_5$ ) moviéndose dentro del espacio de evoluciones . . . . .	70
4.10. Glider 6( $g_6$ ) moviéndose dentro del espacio de evoluciones . . . . .	72
4.11. Configuración estacionaria ( $s_1$ ) moviéndose dentro del espacio de evoluciones . . . . .	73
4.12. Configuración estacionaria 2 moviéndose dentro del espacio de evoluciones . . . . .	74
4.13. Glider-gun 1 (gun1) generando los gliders $g_1$ y $g_2$ dentro del espacio de evoluciones . . . . .	75
4.14. Glider-gun 2 (gun2) generando los gliders $g_1$ y $g_2$ dentro del espacio de evoluciones . . . . .	76
4.15. Puntos de colisión del glider $g_1$ en el espacio de evoluciones . . . . .	77
4.16. Puntos de colisión del glider $g_2$ en el espacio de evoluciones . . . . .	77
4.17. Puntos de colisión del glider $g_3$ en el espacio de evoluciones . . . . .	78
4.18. Puntos de colisión del glider $g_4$ en el espacio de evoluciones . . . . .	78
4.19. Puntos de colisión del glider $g_5$ en el espacio de evoluciones . . . . .	79
4.20. Puntos de colisión del glider $g_6$ en el espacio de evoluciones . . . . .	80
4.21. Puntos de colisión de la estructura estacionaria $s_1$ en el espacio de evoluciones . . . . .	80
4.22. Puntos de colisión de la estructura estacionaria $s_2$ en el espacio de evoluciones . . . . .	81
4.23. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_1$ y $g_2$ con su respectiva ecuación . . . . .	83

4.24. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_1$ y $g_6$ con su respectiva ecuación . . . . .	85
4.25. La colisión obtenida entre $g_1$ y $s_1$ . . . . .	86
4.26. La colisión obtenida entre $g_3$ y $g_4$ . . . . .	87
4.27. La colisión obtenida entre $g_3$ y $s_2$ . . . . .	88
4.28. La colisión obtenida entre $g_5$ y $g_2$ . . . . .	89
4.29. La colisión obtenida entre $g_5$ y $g_6$ . . . . .	90
4.30. La colisión obtenida entre $g_5$ y $s_1$ . . . . .	91
4.31. La colisión obtenida entre $s_1$ y $g_2$ . . . . .	92
4.32. La colisión obtenida entre $s_1$ y $g_6$ . . . . .	93
4.33. La colisión obtenida entre $s_2$ y $g_4$ . . . . .	94
4.34. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $2g_1$ y $g_2$ con su respectiva ecuación . . . . .	97
4.35. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $2g_1$ y $g_6$ con su respectiva ecuación . . . . .	98
4.36. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $2g_1$ y $s_1$ con su respectiva ecuación . . . . .	99
4.37. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_1 + g_1$ y $g_2$ con su respectiva ecuación . . . . .	100
4.38. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_1 + g_1$ y $g_6$ con su respectiva ecuación . . . . .	101
4.39. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_1 + g_1$ y $s_1$ con su respectiva ecuación . . . . .	102
4.40. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_1$ y $2g_2$ con su respectiva ecuación . . . . .	103
4.41. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_1$ y $2s_1$ con su respectiva ecuación . . . . .	104
4.42. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_1$ y $g_2 + g_2$ con su respectiva ecuación . . . . .	105
4.43. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_1$ y $g_2^2$ con su respectiva ecuación . . . . .	106

4.44. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_1$ y $g_6 + g_4$ con su respectiva ecuación . . . . .	108
4.45. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_1$ y $g_6^2$ con su respectiva ecuación . . . . .	109
4.46. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_1$ y $g_6g_4$ con su respectiva ecuación . . . . .	111
4.47. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_1, s_1 g_2$ con su respectiva ecuación . . . . .	112
4.48. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_1, s_1 g_6$ con su respectiva ecuación . . . . .	113
4.49. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_1^2$ y $g_2$ con su respectiva ecuación . . . . .	114
4.50. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_1^2$ y $g_6$ con su respectiva ecuación . . . . .	115
4.51. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_1^2$ y $s_1$ con su respectiva ecuación . . . . .	116
4.52. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_3$ y $2s_2$ con su respectiva ecuación . . . . .	117
4.53. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_3, g_4$ y $g_2$ con su respectiva ecuación . . . . .	118
4.54. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_3, g_4$ y $g_6$ con su respectiva ecuación . . . . .	118
4.55. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_3$ y $g_4^2$ con su respectiva ecuación . . . . .	119
4.56. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_3$ y $g_4g_2$ con su respectiva ecuación . . . . .	120
4.57. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_3, s_2$ y $s_2$ con su respectiva ecuación . . . . .	121
4.58. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_3, s_2$ y $g_4$ con su respectiva ecuación . . . . .	122
4.59. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_3$ y $s_2^2$ con su respectiva ecuación . . . . .	123

4.60. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_3^2$ y $g_4$ con su respectiva ecuación . . . . .	124
4.61. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_3^2$ y $s_2$ con su respectiva ecuación . . . . .	125
4.62. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_5$ y $2g_2$ con su respectiva ecuación . . . . .	126
4.63. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_5$ y $2s_1$ con su respectiva ecuación . . . . .	127
4.64. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_5$ y $g_2 + g_2$ con su respectiva ecuación . . . . .	128
4.65. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_5$ y $g_2^2$ con su respectiva ecuación . . . . .	129
4.66. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_5$ y $g_6 + g_4$ con su respectiva ecuación . . . . .	131
4.67. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_5$ y $g_6^2$ con su respectiva ecuación . . . . .	132
4.68. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_5$ y $g_6g_4$ con su respectiva ecuación . . . . .	134
4.69. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_5$ , $s_1$ y $g_2$ con su respectiva ecuación . . . . .	135
4.70. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_5$ y $s_1^2$ con su respectiva ecuación . . . . .	135
4.71. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_5^2$ y $g_2$ con su respectiva ecuación . . . . .	137
4.72. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_5^2$ y $g_6$ con su respectiva ecuación . . . . .	138
4.73. Los distintos resultados obtenidos de colisionar $g_5^2$ y $s_1$ con su respectiva ecuación . . . . .	139
4.74. Algunos resultados de colisionar 4 partículas dentro del espacio de evoluciones . . . . .	145
5.1. La jerarquía de Chomsky . . . . .	152
5.2. Las compuertas lógicas básicas . . . . .	158

---

6.1. Algunos ejemplos de eaters . . . . .	161
6.2. Algunos ejemplos de hoyos negros . . . . .	163
6.3. Algunos ejemplos de solitones . . . . .	164
6.4. Autómata finito no determinista del lenguaje regular $(01)^*$ . . . . .	166
6.5. Autómata finito determinista del lenguaje regular $(01)^*$ . . . . .	166
6.6. Autómata finito determinista del lenguaje regular $(01)^*$ con las nuevas equivalencias . . . . .	167
6.7. Evaluación de la cadena vacía $\epsilon$ . . . . .	168
6.8. Evaluación de la cadena 0 . . . . .	169
6.9. Evaluación de la cadena 01 . . . . .	169
6.10. Evaluación de la cadena 010101010 . . . . .	170
6.11. Evaluación de la cadena 01010101 . . . . .	171
6.12. Generación del árbol de derivación para la cadena 010101 . . . . .	173
6.13. Las 4 combinaciones de la tabla de verdad para la compuerta XOR .	175
6.14. Las 4 combinaciones de la tabla de verdad para la compuerta IF-THEN	177
6.15. Las 4 combinaciones de la tabla de verdad para la compuerta NAND	179
6.16. La compuerta AND construida con base en NAND . . . . .	180
6.17. Las 4 combinaciones de la tabla de verdad para la compuerta AND .	181
6.18. La compuerta OR construida con base en NAND . . . . .	182
6.19. Las 4 combinaciones de la tabla de verdad para la compuerta OR . .	183
6.20. La compuerta NOT construida con base en NAND . . . . .	184
6.21. Las 2 combinaciones de la tabla de verdad para la compuerta NOT .	184
7.1. La arquitectura del SOL . . . . .	189
7.2. La arquitectura del SOL . . . . .	190
7.3. Las clases que componen al módulo de los Autómatas Celulares Elementales . . . . .	190
7.4. Las clases descritas que componen al módulo de los Autómatas Celulares Elementales . . . . .	191
7.5. Las clases que componen al módulo de la Regla 126 con Memoria . .	193
7.6. Las clases descritas que componen al módulo de la Regla 126 con Memoria . . . . .	194
7.7. Las clases que componen al módulo de Operaciones Lógicas . . . . .	197

7.8. Las clases descritas que componen al módulo de la Regla 126 con Memoria . . . . .	197
7.9. El sistema empleando la opción de Elemental . . . . .	200
7.10. El sistema empleando la opción de Aleatorio . . . . .	202
7.11. El sistema empleando la opción de Archivo . . . . .	203
7.12. El sistema empleando la opción de Manual . . . . .	204
7.13. La evolución utilizando el fondo periódico 1 . . . . .	206
7.14. La evolución utilizando el fondo periódico 2 . . . . .	207
7.15. Los 6 gliders y sus combinaciones con fondos periódicos . . . . .	208
7.16. Los 2 still-life y sus combinaciones con fondos periódicos . . . . .	210
7.17. Las opciones de la opción de lenguajes regulares . . . . .	212
7.18. Las opciones para manejar Gramáticas Libres de Contexto . . . . .	213
7.19. Las opciones para manejar las Compuertas Lógicas . . . . .	214
8.1. Algunas fotos del evento Celebration of Late Prof. Harold V. McIntosh Achievements . . . . .	216
8.2. Algunas fotos del evento The Ninth International Conference on Complex Systems . . . . .	218
A.1. Atractores para longitud igual a 16. . . . .	231
A.2. Atractores para longitud igual a 17. . . . .	233
A.3. Atractores para longitud igual a 18. . . . .	235
A.4. Atractores para longitud igual a 19. . . . .	236
A.5. Atractores para longitud igual a 20. . . . .	237
A.6. Atractores para longitud igual a 21. . . . .	238
A.7. Atractores para longitud igual a 22. . . . .	239
A.8. Atractores para longitud igual a 23. . . . .	240
A.9. Atractores para longitud igual a 24. . . . .	241
B.1. Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_1$ en la fase 1 y las 5 fases que posee el glider $g_2$ . . . . .	247
B.2. Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_1$ en la fase 2 y las 5 fases que posee el glider $g_2$ . . . . .	248

B.3. Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_1$ en la fase 3 y las 5 fases que posee el glider $g_2$ . . . . .	249
B.4. Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_1$ en la fase 4 y las 5 fases que posee el glider $g_2$ . . . . .	250
B.5. Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_1$ en la fase 5 y las 5 fases que posee el glider $g_2$ . . . . .	251
B.6. Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_1$ en la fase 1 y las 5 fases que posee el glider $g_6$ . . . . .	252
B.7. Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_1$ en la fase 2 y las 5 fases que posee el glider $g_6$ . . . . .	253
B.8. Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_1$ en la fase 3 y las 5 fases que posee el glider $g_6$ . . . . .	254
B.9. Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_1$ en la fase 4 y las 5 fases que posee el glider $g_6$ . . . . .	255
B.10. Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_1$ en la fase 5 y las 5 fases que posee el glider $g_6$ . . . . .	256
B.11. Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_1$ en la fase 1 y las 2 fases que posee el still-life $s_1$ . . . . .	257
B.12. Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_1$ en la fase 2 y las 2 fases que posee el still-life $s_1$ . . . . .	258
B.13. Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_1$ en la fase 3 y las 2 fases que posee el still-life $s_1$ . . . . .	259
B.14. Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_1$ en la fase 4 y las 2 fases que posee el still-life $s_1$ . . . . .	259
B.15. Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_1$ en la fase 5 y las 2 fases que posee el still-life $s_1$ . . . . .	260
B.16. La colisión posible entre el glider $g_3$ en la fase 1 y el glider $g_4$ en la fase 1 . . . . .	261
B.17. La colisión posible entre el glider $g_3$ en la fase 2 y el glider $g_4$ en la fase 2 . . . . .	262
B.18. La colisión posible entre el glider $g_3$ en la fase 3 y el glider $g_4$ en la fase 3 . . . . .	262

B.19.La colisión posible entre el glider $g_3$ en la fase 4 y el glider $g_4$ en la fase 4 . . . . .	263
B.20.La colisión posible entre el glider $g_3$ en la fase 5 y el glider $g_4$ en la fase 5 . . . . .	264
B.21.Las colisiones posibles entre el glider $g_3$ en la fase 1 y el still-life $s_2$ en la fase 1 y 6 . . . . .	265
B.22.Las colisiones posibles entre el glider $g_3$ en la fase 1 y el still-life $s_2$ en la fase 2 y 7 . . . . .	265
B.23.Las colisiones posibles entre el glider $g_3$ en la fase 3 y el still-life $s_2$ en la fase 3 y 8 . . . . .	266
B.24.Las colisiones posibles entre el glider $g_3$ en la fase 4 y el still-life $s_2$ en la fase 4 y 9 . . . . .	267
B.25.Las colisiones posibles entre el glider $g_3$ en la fase 5 y el still-life $s_2$ en la fase 5 y 10 . . . . .	267
B.26.Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_5$ en la fase 1 y las 5 fases que posee el glider $g_2$ . . . . .	268
B.27.Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_5$ en la fase 2 y las 5 fases que posee el glider $g_2$ . . . . .	269
B.28.Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_5$ en la fase 3 y las 5 fases que posee el glider $g_2$ . . . . .	270
B.29.Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_5$ en la fase 4 y las 5 fases que posee el glider $g_2$ . . . . .	271
B.30.Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_5$ en la fase 5 y las 5 fases que posee el glider $g_2$ . . . . .	272
B.31.Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_5$ en la fase 1 y las 5 fases que posee el glider $g_6$ . . . . .	274
B.32.Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_5$ en la fase 2 y las 5 fases que posee el glider $g_6$ . . . . .	275
B.33.Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_5$ en la fase 3 y las 5 fases que posee el glider $g_6$ . . . . .	276
B.34.Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_5$ en la fase 4 y las 5 fases que posee el glider $g_6$ . . . . .	277

B.35.Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_5$ en la fase 5 y las 5 fases que posee el glider $g_6$ . . . . .	278
B.36.Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_5$ en la fase 1 y las 2 fases que posee el still-life $s_1$ . . . . .	280
B.37.Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_5$ en la fase 2 y las 2 fases que posee el still-life $s_1$ . . . . .	280
B.38.Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_5$ en la fase 3 y las 2 fases que posee el still-life $s_1$ . . . . .	281
B.39.Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_5$ en la fase 4 y las 2 fases que posee el still-life $s_1$ . . . . .	282
B.40.Las 5 colisiones distintas entre el glider $g_5$ en la fase 5 y las 2 fases que posee el still-life $s_1$ . . . . .	283
B.41.Las 5 colisiones distintas entre el still-life $s_1$ en la fase 1 y las 5 fases que posee el glider $g_2$ . . . . .	284
B.42.Las 5 colisiones distintas entre el still-life $s_1$ en la fase 2 y las 5 fases que posee el glider $g_2$ . . . . .	285
B.43.Las 5 colisiones distintas entre el still-life $s_1$ en la fase 1 y las 5 fases que posee el glider $g_6$ . . . . .	287
B.44.Las 5 colisiones distintas entre el still-life $s_1$ en la fase 2 y las 5 fases que posee el glider $g_6$ . . . . .	288
B.45.La colisión entre el still-life $s_2$ en la fase 1 y el glider $g_4$ en la fase 1 .	289
B.46.La colisión entre el still-life $s_2$ en la fase 2 y el glider $g_4$ en la fase 2 .	290
B.47.La colisión entre el still-life $s_2$ en la fase 3 y el glider $g_4$ en la fase 3 .	291
B.48.La colisión entre el still-life $s_2$ en la fase 4 y el glider $g_4$ en la fase 4 .	292
B.49.La colisión entre el still-life $s_2$ en la fase 5 y el glider $g_4$ en la fase 5 .	292
B.50.La colisión entre el still-life $s_2$ en la fase 6 y el glider $g_4$ en la fase 1 .	293
B.51.La colisión entre el still-life $s_2$ en la fase 7 y el glider $g_4$ en la fase 2 .	294
B.52.La colisión entre el still-life $s_2$ en la fase 8 y el glider $g_4$ en la fase 3 .	294
B.53.La colisión entre el still-life $s_2$ en la fase 9 y el glider $g_4$ en la fase 4 .	295
B.54.La colisión entre el still-life $s_2$ en la fase 10 y el glider $g_4$ en la fase 5 .	296

---

# Índice de cuadros

4.1. Líneas de células para formar el fondo periodico 1 . . . . .	66
4.2. Líneas de células para formar el fondo periodico 2 . . . . .	67
4.3. Líneas de células para formar el glider 1 . . . . .	68
4.4. Líneas de células para formar el glider 2 . . . . .	69
4.5. Líneas de células para formar el glider 3 . . . . .	70
4.6. Líneas de células para formar el glider 4 . . . . .	71
4.7. Líneas de células para formar el glider 5 . . . . .	71
4.8. Líneas de células para formar el glider 6 . . . . .	72
4.9. Líneas de células para formar la estructura estacionaria 1 . . . . .	73
4.10. Líneas de células para formar la estructura estacionaria 2 . . . . .	75
4.11. Tabla resumida de colisiones binarias . . . . .	96
4.12. Tabla resumida de colisiones ternarias . . . . .	144
5.1. Tabla de verdad de la compuerta AND . . . . .	154
5.2. Tabla de verdad de la compuerta OR . . . . .	155
5.3. Tabla de verdad de la compuerta NOT . . . . .	155
5.4. Tabla de verdad de la compuerta NAND . . . . .	156
5.5. Tabla de verdad de la compuerta NOR . . . . .	156
5.6. Tabla de verdad de la compuerta XOR . . . . .	157
5.7. Tabla de verdad de la compuerta XNOR . . . . .	157
5.8. Tabla de verdad de la compuerta IF . . . . .	158
6.1. Tabla de transiciones del AFD del lenguaje (01)* . . . . .	167
6.2. Tabla de transiciones del AFD del lenguaje (01)* con partículas . . .	167
6.3. Tabla de verdad de la compuerta XOR con partículas . . . . .	175

---

6.4. Tabla de verdad de la compuerta IF-THEN con partículas . . . . .	176
6.5. Tabla de verdad de la compuerta NAND con partículas . . . . .	178
6.6. Tabla de verdad de la compuerta AND con NAND . . . . .	180
6.7. Tabla de verdad de la compuerta OR con NAND . . . . .	182
6.8. Tabla de verdad de la compuerta NOT con NAND . . . . .	182
A.1. Tabla resumida de colisiones . . . . .	225
A.2. Tabla resumida de colisiones . . . . .	226
A.3. Tabla resumida de colisiones . . . . .	226
A.4. Tabla resumida de colisiones . . . . .	226
A.5. Tabla resumida de colisiones . . . . .	227
A.6. Tabla resumida de colisiones . . . . .	227
A.7. Tabla resumida de colisiones . . . . .	227
A.8. Tabla resumida de colisiones . . . . .	228
A.9. Tabla resumida de colisiones . . . . .	228
A.10. Tabla resumida de colisiones . . . . .	229
A.11. Tabla resumida de colisiones . . . . .	229
A.12. Tabla resumida de colisiones . . . . .	229
A.13. Tabla resumida de colisiones . . . . .	230
A.14. Tabla resumida de colisiones . . . . .	230
A.15. Tabla resumida de colisiones . . . . .	232
A.16. Tabla resumida de colisiones . . . . .	234
B.1. Tabla de colisiones binarias posibles . . . . .	244

---

# Capítulo 1

## Introducción

La teoría de autómatas es el estudio de dispositivos de cálculo abstractos, es decir, de las “máquinas”. Alan Turing propuso en la década de los treinta una máquina capaz de realizar los cálculos que actualmente realizan las computadoras, su objetivo era describir las limitaciones existentes de una máquina de cálculos, dichas conclusiones no sólo aplican a las máquinas de Turing, sino a todas las máquinas reales actuales.

La palabra autómata evoca algo que pretende imitar las funciones propias de los seres vivos, especialmente relacionadas con el movimiento. En el campo de los traductores, procesadores, compiladores e intérpretes, lo fundamental no es la simulación del movimiento, sino la simulación de procesos para tratar información. La información se codifica en cadenas de símbolos, y un autómata es un dispositivo que manipula cadenas de símbolos que se le representan a su entrada, produciendo otras tiras o cadenas a su salida [14].

Así, la información actúa como materia prima que se procesa a lo largo de los autómatas. Para este procesamiento se han definido diversos modelos que permiten la manipulación de la información de acuerdo a lo que se desea modelar, surgiendo los autómatas celulares.

Los autómatas celulares (AC) son idealizaciones matemáticas simples de sistemas naturales. Se emplean en la simulación de sistemas donde diversos elementos interaccionan entre sí y generan un resultado de acuerdo al espacio y los estados de los elementos en el tiempo en que interaccionan. Estos modelos matemáticos han de-

mostrado generar comportamientos complejos aún cuando las reglas que determinan la interacción sean simples [39].

La palabra “complejo” es una palabra de los tiempos, como la “creciente complejidad de la vida” citada a menudo. La ciencia ha comenzado a intentar entender la complejidad en la naturaleza, un punto contrario al objetivo científico tradicional de entender la simplicidad fundamental de las leyes de la naturaleza. El campo del estudio de Sistemas Complejos mantiene que las dinámicas de los Sistemas Complejos están fundadas en principios universales que podrían ser usados para describir problemas disparatados desde la física de las partículas hasta las economías de las sociedades [6].

En este Trabajo Terminal 2017-B077 Simulador de Operaciones Lógicas desde un Autómata Celular con comportamiento caótico a su proyección compleja, se mostrarán las propiedades de un AC que lo definen como un Sistema Caótico para entender su dinámica y compararla con la dinámica compleja que se presenta al añadir una función para extender al AC. Se describirán los elementos que definen una dinámica compleja llamados “partículas” y se mostrarán sus interacciones tanto con su entorno como con otras partículas mediante el modelado de ecuaciones. Finalmente se emplearán estas ecuaciones para definir compuertas lógicas y así poder explorar las capacidades computacionales del AC.

La motivación de este Trabajo Terminal es que mediante la investigación del AC se pueda simular el comportamiento de las células y su generación masiva y descontrolada, condición que genera los tipos de cáncer conocidos actualmente. Este modelado queda fuera del alcance de esta investigación, sin embargo se retomará como un trabajo de maestría y doctorado.

---

# Capítulo 2

## Conceptos fundamentales

### 2.1. Sistemas dinámicos

#### 2.1.1. Definición de un Sistema Dinámico

Un Sistema Dinámico es un sistema que, en realidad o conceptualmente, evoluciona con el tiempo. Un péndulo simple es un sistema que evoluciona con el tiempo. El proceso de encontrar una raíz cuadrada usando la fórmula de Newton es un sistema que conceptualmente evoluciona con el tiempo, pero esto también puede ser considerado simplemente como una secuencia de aproximaciones.

Los Sistemas Dinámicos tienen estados denotados por  $S_i$ . A la vez que evoluciona, el Sistema se mueve a través de una secuencia de estados:

$$S_0, \dots, S_{i-2}, S_{i-1}, S_i, S_{i+1}, S_{i+2}, \dots$$

Un estado es representado por un valor de algún tipo: un entero, un número real, un vector de números reales, una matriz, etc. El valor debería representar completamente el estado pero no debería contener información redundante.

El conjunto de todos los estados es llamado el “estado de estados” del sistema. Una secuencia de estados es llamada una trayectoria o una órbita. Cuando un sistema evoluciona de un estado  $S_i$  a un estado subsecuente  $S_{i+1}$ , decimos que experimenta una transición de estado. Si vemos el sistema como un grafo directo, donde los vértices sean los estados y las transiciones sean las aristas, entonces una trayectoria es una

caminata en el grafo [13].

### 2.1.2. Clasificación de los Sistemas

Existen diversas clasificaciones de los Sistemas de acuerdo a sus valores de entrada, sus salidas, su comportamiento, etc. Describiremos solamente de acuerdo a los datos de entrada y de salidas que emplean, por lo que encontramos dos tipos de Sistemas:

1. **Sistemas discretos:** Los Sistemas discretos son aquellos que pueden modelarse con valores enteros enteros y tienen puntos definidos en el espacio para procesar y obtener una salida que también es discreta.
2. **Sistemas continuos:** Los Sistemas continuos son aquellos que pueden modelarse con valores reales, esto es que tanto sus entradas como salidas son de carácter "infinito". Se pueden ver gráficamente como una línea en el espacio [16].

### 2.1.3. Descripción del comportamiento de los Sistemas

Los Sistemas Dinámicos reciben ese nombre debido al comportamiento que generan al evolucionar con el tiempo. Este comportamiento ha sido objeto de estudio durante décadas y ha generado que investigadores alrededor del mundo propongan teoremas para entender este comportamiento. En esta sección se mostrarán las maneras de describir el comportamiento que se emplearán para nuestro sistema de interés.

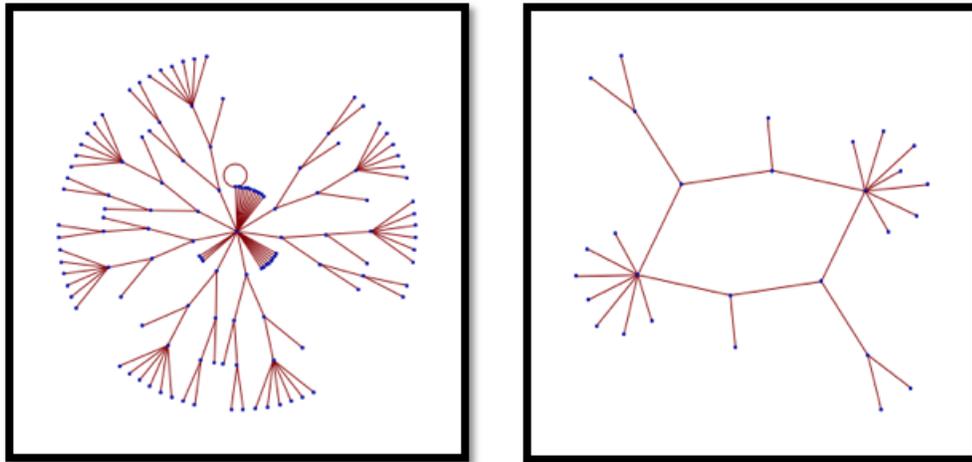
#### Atractores y repelentes

La región del espacio de estados en la cual no existe rutas de salida es llamada un atractor. Un atractor que consiste de solo un estado del cual su sucesor es él mismo es un atractor de punto (y un estado equilibrado). Un atractor que consiste de un ciclo de estados es llamado un ciclo limitado. Al conjunto de estados que eventualmente conducen a un atractor se les conoce como "Basin of attraction" (cuencas del atractor, o bien también se les denomina como Jardines del Edén [46]) del atractor.

Lo opuesto a un atractor es un “repellor” (repelente), que es una región del espacio de estado en la que las trayectorias llegan pero no entran. Un punto repelente es un estado de equilibrio inestable.

Los atractores suelen tener una dimensión más baja que la del espacio de fase. Por ejemplo, un atractor podría ser una línea en dos dimensiones (2D) en un espacio de fase de tres dimensiones (3D). Algunos atractores tienen dimensiones que no son números enteros. Por ejemplo, una fila de puntos puede contener demasiados puntos para ser considerados cero-dimensionales pero no suficientes puntos para formar una línea; dicha fila tendría una dimensión entre 0 y 1. Un atractor extraño es un atractor con una dimensión fraccionaria [13].

En la figura 2.1 se muestran dos atractores, uno de punto y otro de ciclo limitado. Los puntos azules simbolizan los estados que contiene el atractor y las líneas rojas simbolizan las trayectorias que posee. Como se puede observar, el primero solo posee un punto en el cual, sin importar las evoluciones en el tiempo, se quedará infinitamente; mientras que el segundo también se quedará ciclando pero en un conjunto finito de estados.



Atractor de punto

Atractor de ciclo limitado

Figura 2.1: Ejemplo de un atractor de punto y de ciclo limitado

## Linealidad

Una propiedad importante de una clase muy amplia de sistemas continuos es que, ya sean lineales o no lineales, se comportan como sistemas lineales en una pequeña región del espacio de fase que encierra un estado de equilibrio. Por esta razón, gran parte de la teoría clásica de los sistemas complejos se centró en su comportamiento cerca de los estados de equilibrio.

La linealidad implica que tan “estable” es un Sistema. Se puede observar de manera sencilla si imaginamos una línea recta, mantiene una forma constante y es entendible la forma en la que crece conforme avanzamos a través de los ejes del plano catersiano (tiempo). Sin embargo, si imaginamos una función que posee asíntotas y puntos de inflexión, ya no es trivial medir cuánto crece en qué instante del tiempo.

Los investigadores se dieron cuenta recientemente que, aunque tienen la propiedad conveniente de ser fácilmente analizados, el comportamiento cerca del equilibrio no es muy interesante. Esta realización llevó al interés en sistemas lejos del equilibrio, y al estudio del caos [16].

En la figura 2.2 podemos observar dos gráficas donde se muestra el comportamiento lineal y no lineal de un Sistema. La línea roja simboliza el valor del Sistema en el tiempo mostrado. En la primer gráfica se observa cómo la línea roja se “mantiene” en un movimiento armónico y sencillo, mientras que en la segunda gráfica la línea roja no posee ningún patrón distinguible y pareciese que se generó de forma “aleatoria”.

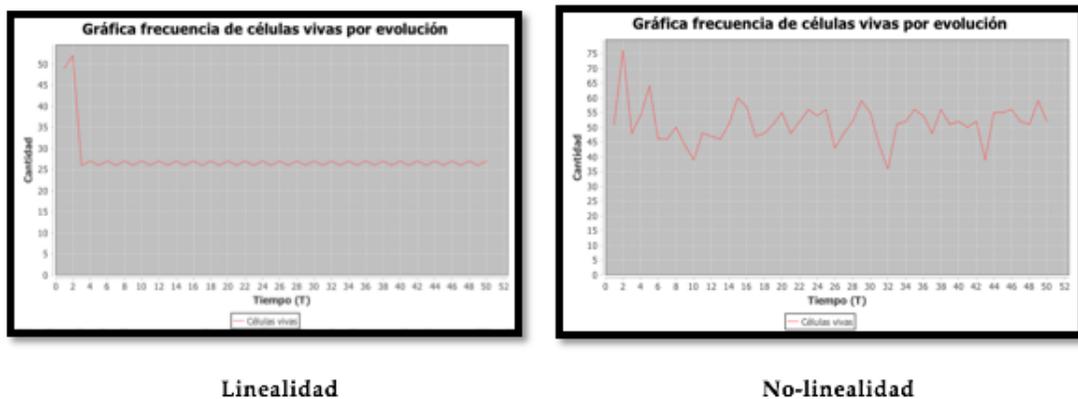


Figura 2.2: Ejemplo de un Sistema Lineal y uno No Lineal

## Condiciones para el caos

Todos los Sistemas son representados mediante ecuaciones que suelen ser diferenciales, estas ecuaciones modelan matemáticamente el comportamiento del Sistema, contienen las entradas, salidas y la relación entre ellas. Así, las condiciones necesarias para un comportamiento caótico son:

1. Debe haber al menos tres variables de estado en la descripción del sistema.
2. Al menos una de las ecuaciones debe ser no lineal.

### 2.1.4. Análisis cuantitativo de un Sistema Dinámico

Ya observamos en la sección 2.1.3 algunas maneras de describir el comportamiento de los Sistemas Dinámicos, sin embargo esto se hace de manera visual. Ahora veremos un componente importante en el análisis del caos de un Sistema.

#### Exponente de Lyapunov

Esta medida de caos, fue introducida por el célebre matemático ruso Alexander Mijailovic Lyapunov a principios del siglo XX, los exponentes de Lyapunov, como ahora se les conoce, son un conjunto de números que se emplean usualmente para detectar la presencia del caos en sistemas dinámicos.

La idea en general es medir qué tan rápido se alejan o difieren las configuraciones globales contiguas con respecto al tiempo.

En la teoría del caos, se tienen 3 propiedades fundamentales sobre los sistemas caóticos (ver 2.5 para más información), una de ellas que es son sensibles a las condiciones iniciales. Esto es que con variar muy poco las condiciones iniciales el resultado es completamente distinto a nuestro punto de partida. Así, podemos determinar qué tan caótico es un Sistema de acuerdo a la variación de las entradas [12].

El exponente de Lyapunov para un sistema es el valor promedio de  $\lambda(x)$  para muchos puntos de inicio  $x$ . Y su cálculo se realiza con la fórmula de la ecuación 2.1.4:

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log_e f'(x_i)$$

Dónde:

1.  $n$  es la cantidad posible de estados del Sistema.
2.  $f(x_i)$  es la ecuación que determina el comportamiento del Sistema, a esta ecuación le obtenemos su primera derivada.

Este exponente nos permite medir el “caos” de nuestro sistema, sin embargo el cálculo matemático se realiza solo para Sistemas Discretos(2.1.2)

## 2.2. Autómatas celulares

### 2.2.1. Definición

Un autómata celular(AC) está definido como una sextupla de la siguiente manera:

$$C = (S, S_0, G, d, f, F)$$

Dónde:

1.  $S$  es un conjunto finito de estados.
2.  $S_0$  es el estado inicial, el cual pertenece a  $S$ .
3.  $G_i$  es una vecindad de células de la célula  $i$
4.  $d$  es la dimensión del autómata celular.
5.  $f : G \rightarrow \Sigma$  es la función local del autómata, donde  $G = \{ G_i : i \text{ es una célula} \}$
6. El mapeo global,  $F$ 
  - $F : S \rightarrow S$
7.  $C(n) = F^{(n)}(S)$  es el estado que obtenemos después de la iteración  $n$ .
8.  $C(n+1) = F(C(n))$  [35]

También, vamos a definir a un autómata celular como un sistema dinámico (ver 2.1) del cual:

1. El número de estados posibles de las células es finito.
2. La relación de recurrencia es finita, esto es, el nuevo estado de una célula depende únicamente del estado de un número finito de células en el instante previo.
3. La relación de recurrencia es invariante en el traslado del espacio y del tiempo, esto es, no hace uso de la posición absoluta de una célula en el espacio y en el tiempo [3].

### 2.2.2. Elementos que conforman a un AC

Los autómatas celulares tienen elementos básicos, estos son:

1. **Arreglo Regular:** Ya sea un plano de 1 dimensión o un espacio n-dimensional, este es el espacio de evoluciones, y cada división homogénea del arreglo es llamada célula.
2. **Conjunto de Estados:** Es finito y cada elemento o célula del arreglo toma un valor de este conjunto de estados. También se denomina alfabeto. Puede ser expresado en valores o colores.
3. **Configuración Inicial:** Consiste en asignar un estado a cada una de las células del espacio de evolución inicial del sistema
4. **Vecindades:** Define el conjunto contiguo de células y posición relativa respecto a cada una de ellas. A cada vecindad diferente corresponde un elemento del conjunto de estados.
5. **Función Local:** Es la regla de evolución que determina el comportamiento del AC. Se conforma de una célula central y sus vecindades. Define como debe cambiar de estado cada célula dependiendo de los estados anteriores de sus vecindades. Puede ser una expresión algebraica [20].

Adicionalmente para poder entender mejor su representación visual, se requiere mencionar los tipos de límites o fronteras, del plano en el cual se desarrolla, en los cuales se clasifica:

1. **Frontera Abierta:** Se considera que todas las células fuera del espacio del autómata toman un valor fijo.
2. **Frontera Reflectora:** Las células fuera del espacio del autómata toman los valores que están dentro, como si se tratara de un espejo.
3. **Frontera Periódica o Circular:** Las células que están en la frontera interaccionan con sus vecinos inmediatos y con las células que están en el extremo opuesto del arreglo, como si dobláramos el plano a manera de cilindro.
4. **Sin Frontera.** La representación de autómata no tiene límites, es infinito. Esto solo es practico cuando se cuenta con un software que simule la evolución del autómata [11].

### 2.2.3. Extensión de los AC: funciones con memoria

Los autómatas celulares convencionales son ahistóricos(sin memoria), el nuevo estado de una célula depende de la configuración de los vecinos solamente en el paso anterior en el tiempo de  $\varphi$ . Los autómatas celulares con memoria pueden ser considerados como una extensión del marco de referencia estándar de los autómatas celulares donde cada célula  $x_i$  tiene permitido recordar algún período de sus evoluciones previas. Básicamente, la memoria está basada en el estado y la historia del sistema, así nosotros diseñamos una función de memoria  $\varphi$  como sigue:

$$\varphi(X_i^{t-\tau}, \dots, X_i^{t-1}, X_i^t) \longrightarrow S_i$$

tal que  $\tau < t$  determina el grado de memoria hacia atrás y cada célula  $displaystyle S_i \in \Sigma$  es una función de las series de estados en la célula  $displaystyle X_i$  hasta el paso del tiempo  $displaystyle t - \tau$ . Finalmente, para ejecutar la evolución, aplicamos la regla original como sigue:

$$\varphi(\dots, S_{i-1}^t, S_i^t, S_{i+1}^t, \dots) \longrightarrow X_i^{t+1}$$

En los autómatas celulares con memoria, mientras el mapeo  $\varphi$  permanece inalterado, una memoria histórica de iteraciones pasadas se conserva por cada célula

como un resumen de sus estados previos; por lo tanto, todas las células acanalizan memoria al mapeo  $\varphi$ . Como un ejemplo, podemos tomar la función de memoria  $\varphi$  como una memoria mayoritaria:

$$\varphi_{maj} \longrightarrow S_i$$

Entonces,  $\varphi_{maj}$  representa la función de mayoría clásica para tres variables, como sigue:

$$\varphi_{maj} : (X_1 \wedge X_2) \vee (X_2 \wedge X_3) \vee (X_3 \wedge X_1) \longrightarrow X$$

en las células  $(X_i^{t-\tau}, \dots, X_i^{t-1}, X_i^t)$  y define un anillo temporal antes de calcular la siguiente configuración global  $c$ . En caso de un lazo, la función de mayoría permite romperlo en favor de cero si  $X_{\tau-1} = 0$ , o para uno si  $X_{\tau-1} = 1$ . La representación de un autómata celular elemental con memoria es dada como sigue:

$$\varphi_{CARm} : \tau$$

Dónde CAR representa la notación decimal de un autómata celular elemental particular y  $m$  el tipo de memoria dado con un valor específico de  $\tau$ . Así, la memoria mayoritaria (maj) trabajando en la regla 126 de los autómatas celulares elementales checando 4 células ( $\tau = 4$ ) de historia es denotada simplemente como  $R126_{maj} : 3$ . La siguiente imagen representa a detalle la memoria trabajando en un autómata celular elemental.

La memoria es tan simple como cualquier autómata celular y su función local pero a veces el comportamiento global producido por la regla local es totalmente impredecible. En la figura 2.3 podemos observar como trabaja la memoria en comparación con un autómata ahistórico.

Algunos autores definen las reglas con memoria como aquellas con dependencia en  $\varphi$  en el estado de la célula para ser actualizado. Entonces las reglas de una dimensión sin memoria adoptan la forma:  $X^{t+1} = \varphi(X_{i-1}^t, X_{i+1}^t)$ . El uso de la memoria asociativa de locución usualmente se refiere, cuando es usada en el contexto de los autómatas celulares, al estudio de las configuraciones de atractores, los cuales son argumentados por Wuensche para constituir los contenidos globales de la red de la memoria direccionable en el sentido de Hopfield. Dicho estudio de los atractores se tratará a detalle en el capítulo 2.3.2.

Existen diversas funciones que permiten manejar la parte con memoria, las cuales son:

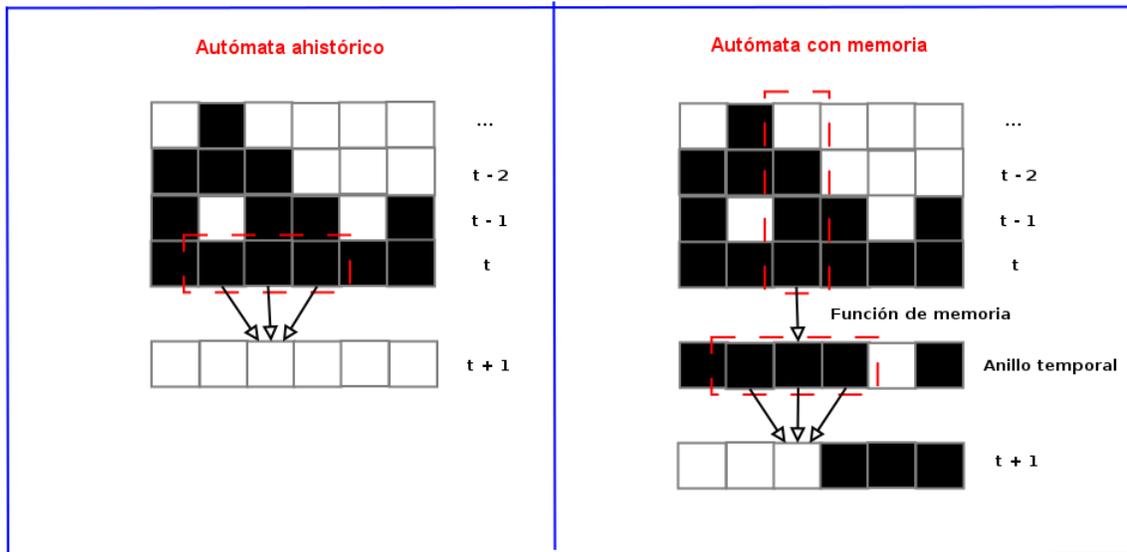


Figura 2.3: Autómata celular con memoria y sin memoria, aplicando una función local.

1. Majority (mayoría): Esta función parte de la cantidad de evoluciones pasadas a tomarse. Imaginemos que vamos a tomar hasta  $\tau = t - 4$ , existen 3 posibles situaciones: si el número de células vivas es mayor que el de muertas, en el anillo temporal se añadirá un 1; si el número de células muertas es mayor al de células vivas, entonces en el anillo temporal se añadirá un 0, en caso de que sea el mismo número de células vivas que de muertas, se añadirá en el anillo temporal el valor de  $\tau = t - 1$ .
2. Minority (minoría): Tomando de nuevo hasta  $\tau = t - 4$ , existen 3 posibles situaciones: si el número de células vivas es menor que el de muertas, en el anillo temporal se añadirá un 1; si el número de células muertas es menor que el de células vivas, en el anillo temporal se añadirá un 0, en caso de ser el mismo número se añadirá el valor de  $\tau = t - 1$ .
3. Parity (paridad): Esta función implica que si tomamos hasta  $\tau = t - 4$ , entonces se sumarán los valores de las 4 celdas (ceros y unos), y a ese valor se le aplicará un módulo 2, esto es, si el valor de la suma es impar entonces el valor a añadir en el anillo temporal es un 1, en caso de que sea par se añadirá un 0.

En todos los casos, cuando se tiene el anillo temporal se aplicará la regla elemental a éste y el resultado será la siguiente evolución del autómata.

## 2.3. Autómatas celulares elementales

### 2.3.1. Antecedentes

A pesar de su construcción muy simple, nada como los autómatas celulares generales parece haber sido considerado antes alrededor de los años cincuenta. Sin embargo, en los años cincuenta - inspirados de diversas maneras por el advenimiento de las computadoras electrónicas - varios tipos diferentes de sistemas equivalentes a autómatas celulares fueron introducidos de forma independiente. Se puede identificar una variedad de precursores. Operaciones sobre secuencias de dígitos se habían utilizado desde la antigüedad en la aritmética. Las aproximaciones de diferencias finitas a ecuaciones diferenciales comenzaron a surgir a principios del siglo XX y fueron bastante conocidas en los años treinta. Y las máquinas de Turing inventadas en 1936 estaban basadas en el pensamiento de operaciones arbitrarias sobre secuencias de elementos discretos.

La forma más conocida en la que se introdujeron los autómatas celulares (y que eventualmente llevó a su nombre) fue a través del trabajo de John von Neumann en el intento de desarrollar un modelo abstracto de auto-reproducción en biología -un tema que había surgido de las investigaciones en cibernética . Alrededor de 1947, tal vez basado en la ingeniería química, von Neumann comenzó pensando en modelos basados en fábricas 3D descritas por ecuaciones diferenciales parciales. Pronto cambió a pensar en la robótica y se imaginó tal vez implementando un ejemplo usando un conjunto de construcción de juguete. Por analogía con los diseños de circuitos electrónicos, se dio cuenta de que 2D debería ser suficiente. Y siguiendo una sugerencia de 1951 de Stanislaw Ulam (que puede haber considerado ya independientemente el problema) él simplificó su modelo y terminó para arriba con un autómata celular 2D (él al parecer esperó más adelante convertir los resultados de nuevo a las ecuaciones diferenciales). El autómata celular particular que construyó en 1952 tenía 29 colores posibles para cada celda y reglas complicadas específicamente configuradas para emular las operaciones de componentes de una computadora electrónica y va-

rios dispositivos mecánicos. Para dar una prueba matemática de la posibilidad de auto-reproducción, von Neumann describió entonces la construcción de una configuración celular de 200.000 que se reproduciría (los detalles fueron rellenados por Arthur Burks a principios de los años sesenta). Von Neumann parece haber creído, presumiblemente en parte, al ver la complejidad de los organismos biológicos reales y las computadoras electrónicas, de que algo así como este nivel de complejidad sería inevitablemente necesario para que un sistema exhibiera capacidades sofisticadas como la auto-reproducción.

A finales de la década de 1950 se había observado que los autómatas celulares podían ser vistos como ordenadores paralelos, y particularmente en los años sesenta se demostró una secuencia de teoremas cada vez más detallados y técnicos -a menudo análogos a los de las máquinas de Turing- sobre sus capacidades computacionales formales. A finales de los años sesenta comenzaron entonces los intentos de conectar los autómatas celulares a las discusiones matemáticas de los sistemas dinámicos, aunque, como se discutió más adelante, esto ya se había hecho una década antes, con terminología diferente. Y a mediados de los años setenta el trabajo sobre los autómatas celulares se había vuelto bastante esotérico y el interés en él se había desvanecido en gran medida. (Sin embargo, algunos trabajos continuaron, sobre todo en Rusia y Japón). Obsérvese que incluso en la informática se utilizaron diversos nombres para autómatas celulares, incluidos los autómatas de teselación, los espacios celulares, los autómatas iterativos, las estructuras homogéneas y los espacios universales.

A pesar de la falta de investigación científica, un ejemplo de un autómata celular entró en la informática recreativa de una manera importante a principios de los años setenta. Aparentemente motivado en parte por cuestiones de lógica matemática, y en parte por el trabajo de "juegos de simulación" por Ulam y otros, John Conway en 1968 comenzó a hacer experimentos (sobre todo a mano, pero más tarde en una computadora PDP-7) con una variedad de Diferentes reglas de autómatas celulares 2D, y en 1970 había elaborado un conjunto simple de reglas que él llamó <sup>El</sup> "Juego de la Vida", que exhiben una serie de comportamientos complejos. En gran parte a través de la popularización en *Scientific American* por Martin Gardner, la vida se hizo ampliamente conocida. Se dedicó una inmensa cantidad de esfuerzo a encontrar condiciones especiales iniciales que dan formas particulares de comportamiento repe-

titivo u otro, pero prácticamente no se realizó ningún trabajo científico sistemático (quizás en parte porque incluso Conway trató el sistema en gran medida como una recreación) y casi sin excepción solamente Las reglas muy específicas de la Vida fueron investigadas. (En 1978 como un posible análogo 1D de la vida más fácil de implementar en las primeras computadoras personales, Jonathan Millen sin embargo consideró brevemente lo que resulta ser el código  $20\ k = 2, r = 2$  regla totalista.)

Bastante desconectado de todo esto, incluso en la década de 1950, tipos específicos de autómatas celulares 2D y 1D ya estaban siendo utilizados en diversos dispositivos electrónicos y computadoras de propósito especial. De hecho, cuando el procesamiento de imágenes digitales empezó a realizarse a mediados de los años cincuenta (para aplicaciones tales como el reconocimiento óptico de caracteres y el recuento microscópico de partículas), las reglas de autómatas celulares 2D solían usarse para eliminar el ruido. Y durante varias décadas, a partir de 1960, se construyó una larga línea de llamados sistemas de lógica celular para implementar autómatas celulares 2D, principalmente para el procesamiento de imágenes. La mayoría de las reglas utilizadas se establecieron específicamente para tener un comportamiento simple, pero ocasionalmente se observó como un asunto en gran medida recreativo que, por ejemplo, patrones de rayas alternas (“clustering”) podría ser generado.

En matemáticas puras, secuencias infinitas de 0 y 1 han sido consideradas en varias formas desde al menos la década de 1800. A partir de la década de 1930, el desarrollo de la dinámica simbólica llevó a la investigación de las asignaciones de tales secuencias a si mismos. Y a mediados de los años cincuenta se estaban haciendo estudios (sobre todo por Gustav Hedlund) de los llamados mapas de bloques de conmutación-conmutación, que resultan ser exactamente autómatas celulares 1D. En los años cincuenta ya principios de los sesenta había trabajo en esta área (al menos en los Estados Unidos) por parte de matemáticos puros distinguidos, pero como era en gran parte para la aplicación a la criptografía, gran parte de ella se mantenía en secreto. Y lo que se publicó fue en su mayoría teoremas abstractos sobre características demasiado globales para revelar cualquier tipo de complejidad que se discutió.

Los tipos específicos de autómatas celulares también han surgido - por lo general bajo diferentes nombres - en una amplia gama de situaciones. A finales de los años

cincuenta y principios de los sesenta, se estudiaron los autómatas celulares 1D como una forma de optimizar los circuitos para la aritmética y otras operaciones. A partir de la década de 1960, las simulaciones de redes neuronales idealizadas a veces tenían neuronas conectadas a vecinos en una cuadrícula, produciendo un autómata celular 2D. De forma similar, varios modelos de medios activos -particularmente corazón y otros músculos- y procesos de difusión de reacción utilizaron una rejilla discreta y estados de excitación discretos, correspondientes a un autómata celular 2D. (En la física, las idealizaciones discretas de la mecánica estadística y las versiones dinámicas de sistemas como el modelo de Ising eran a veces cercanas a los autómatas celulares, excepto la diferencia crucial de tener la aleatoriedad incorporada en sus reglas subyacentes.) Los autómatas celulares aditivos como la regla 90 habían surgido implícitamente En los estudios del coeficiente binomio primo modulo en el siglo XIX, pero también apareció en diversos escenarios, como los "bosques de árboles raquíuticos" estudiados alrededor de 1970.

Sin embargo, a finales de los años setenta, a pesar de todas estas direcciones diferentes, la investigación sobre sistemas equivalentes a autómatas celulares había desaparecido en gran medida. Que esto debería haber sucedido justo en el momento en que las computadoras se estaban convirtiendo ampliamente disponibles para el trabajo exploratorio es irónico.

### 2.3.2. Definición

Los autómatas celulares elementales son autómatas unidimensionales donde hay dos estados posibles (etiquetados 0 y 1) y la regla para determinar el estado de una célula en la próxima generación depende solo del estado actual de la célula y sus dos vecinos inmediatos. Este es uno de los modelos posibles más sencillos de computación. Existen  $2^3 = 8$  configuraciones posibles para una célula y sus dos vecinos inmediatos. La regla que define el autómata celular tiene que especificar el estado resultante para cada una de estas posibilidades, es decir, que hay  $2^8 = 256$  posibles autómatas celulares elementales. Stephen Wolfram propuso un esquema, conocido como el código Wolfram, para asignar a cada regla un número de 0 a 255. Cada configuración actual posible está escrita en orden, 111, 110, ..., 001, 000, y el estado resultante para cada una de estas configuraciones está escrito en el mismo

orden e interpretado como la representación binaria de un número entero.

Wolfram representa a los autómatas celulares de una dimensión con dos parámetros  $(k, r)$ , donde  $k = |\Sigma|$  es el número de estados y  $r$  es el radio de vecinos, por lo tanto, el dominio de los ECA está definido por los parámetros  $(2,1)$ . Hay  $\Sigma^n$  vecindades diferentes (donde  $n = 2r+1$ ) y  $k^{k^n}$  distintas reglas de evolución.

Los autómatas celulares elementales, al ser los más básicos debido a que no son producidos por reglas difíciles de seguir, suelen mostrar comportamientos complejos. Durante el análisis de las reglas elementales propuestas por Wolfram, se han encontrado patrones interesantes en algunas reglas tales como la regla 110, en la cual incluso se ha hallado cómputo universal y patrones que dan paso al estudio de los super colisionadores. Este estudio exhaustivo de la regla 110 fue llevado a cabo por diversas personas tales como Harold V. McIntosh, Genaro J. Martínez, entre otros.

### 2.3.3. Propiedades

El aspecto que más caracteriza a los AC es su capacidad de lograr una serie de propiedades que surgen de la propia dinámica local a través del paso del tiempo y no desde un inicio, aplicándose a todo el sistema en general. Por lo tanto no es fácil analizar las propiedades globales de un AC desde su comienzo, complejo por naturaleza, a no ser por vía de la simulación, partiendo de un estado o configuración inicial de células y cambiando en cada instante los estados de todas ellas de forma síncrona.

Los autómatas celulares elementales se simulan mediante en uso de una rejilla, donde cada célula es representada por un cuadrado y siendo de color negro cuando el estado es 1, y de color blanco cuando el estado es 0. Reglas simples como la regla 0 la 255 después de pocas evoluciones caen en un estado en el cual se mantienen a través del tiempo, mientras que reglas como la 110 al evolucionar en el tiempo no muestran patrones de forma sencilla, sino que se requieren muchas evoluciones que no ser—íamos capaces de obtener sino fuese por el hecho de que podemos simularlos en una computadora. El hecho de que entre las reglas hayan algunas simples y otras complejas, algunas equivalentes al aplicar a todas las evoluciones una operación lógica (ejemplo de esto son la regla 126 y la regla 129, equivalentes al aplicar una NOT a todo el espacio de evoluciones), e incluso algunas presentando cómputo universal.

Su dinamismo, sus evoluciones que pueden caer en 4 clases de acuerdo a Wolfram, son las que permiten a los autómatas celulares elementales convertirse en un verdadero caso de estudio.

### 2.3.4. Clasificación de Wolfram

Wolfram, al ser el autor de estas reglas, estudió su comportamiento, escribiendo su libro titulado “A new kind of science” en el 2002, donde habla de todo lo que había encontrado sobre estas reglas, y en él coloca su propia clasificación, resultado del análisis en la teoría de probabilidad y los diagramas de De Bruijn y la teoría de campo medio, la cual es:

1. Clase I: Evolución a un estado uniforme. Después de transcurrido un cierto número de generaciones, todas las células del autómata convergen a un solo estado.
2. Clase II: Evolución a estados cíclicos aislados. Durante la evolución del autómata, existen ciertos patrones de comportamiento que se repiten de manera sistemática a través del tiempo. Estos patrones se pueden distinguir claramente sobre un “fondo” representado por un solo estado el cual es opuesto al de las células que representan el patrón de comportamiento cíclico.
3. Clase III: Evolución a estados cíclicos amplios. Al igual que en un autómata celular clase II, en un autómata celular clase III existen patrones de comportamiento repetitivos, aunque no tan fácilmente identificables a simple vista debido a que el comportamiento de éste puede ser sumamente caótico, lo que hace más complicado el análisis de este tipo de autómata.
4. Clase IV: Evolución a estados complejos aislados. Esta clase de autómata es una combinación de las clases I, II y III. Al igual que en los autómatas clase II, existen comportamientos cíclicos aislados, lo que hace distinguible un “fondo” uniforme el cual permite identificar dichos comportamientos los cuales son similares a los que se presentan en un autómata clase III.

Así, podemos observar ejemplos de esta clasificación en los autómatas celulares elementales como sigue:

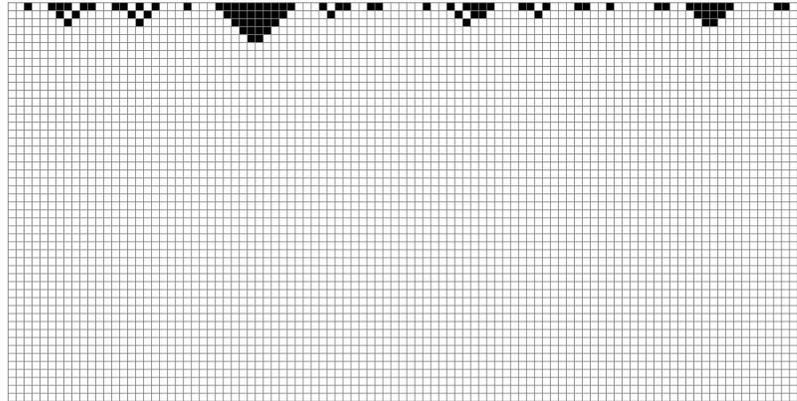


Figura 2.4: Ejemplo de un ECA clase I: regla 160.

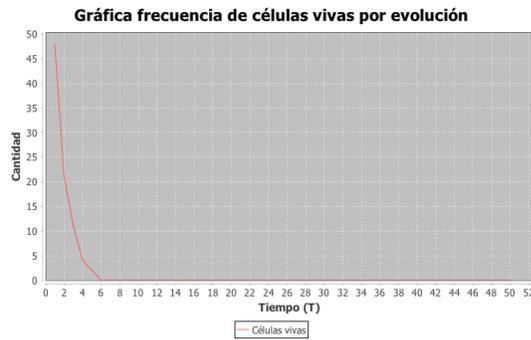


Figura 2.5: Gráfica de la frecuencia de células vivas por evolución: regla 160

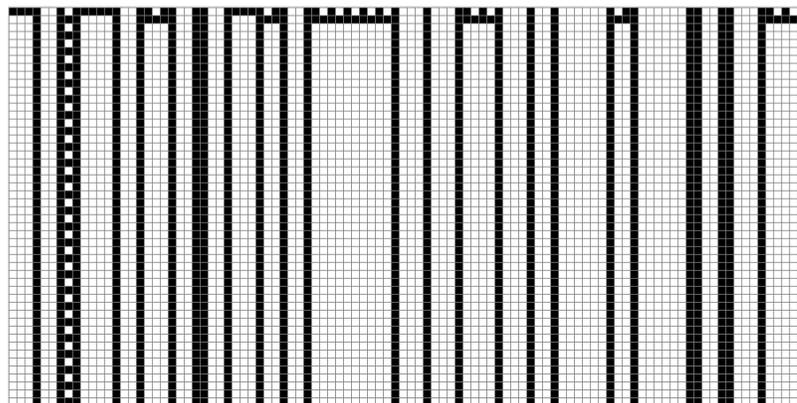


Figura 2.6: Ejemplo de un ECA clase II: regla 108

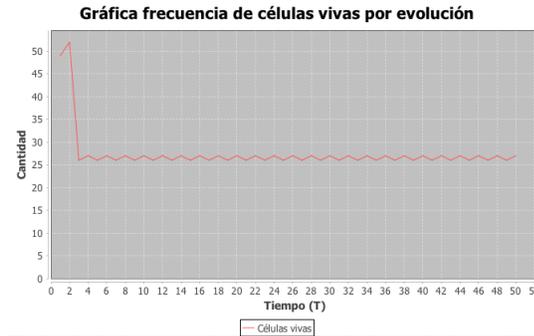


Figura 2.7: Gráfica de la frecuencia de células vivas por evolución: regla 108

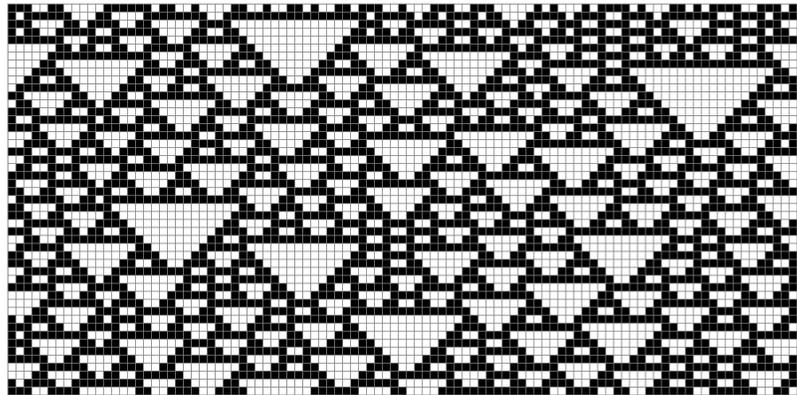


Figura 2.8: Ejemplo de un ECA clase III: regla 126

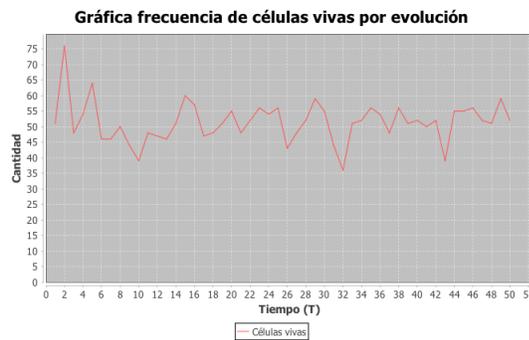


Figura 2.9: Gráfica de la frecuencia de células vivas por evolución: regla 126

## 2.4. Herramientas utilizadas en el análisis de los ACE

A lo largo de los años, desde el comienzo del estudio de los autómatas celulares, cuando no tenían nombre o bien no se sabía que efectivamente se estaba trabajando

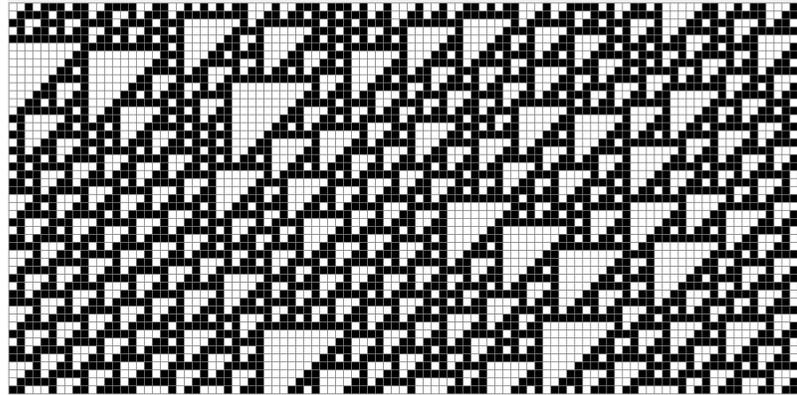


Figura 2.10: Ejemplo de un ECA clase IV: regla 110

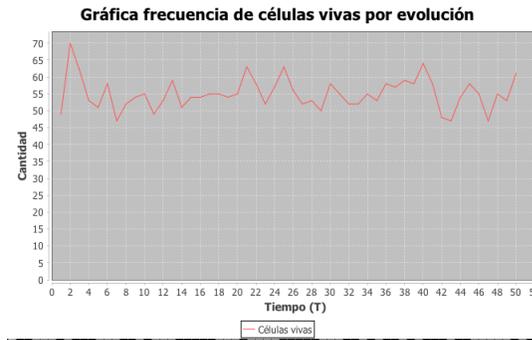


Figura 2.11: Gráfica de la frecuencia de células vivas por evolución: regla 110

con uno de ellos, debido a su comportamiento complejo surgieron diversas preguntas sobre cómo se podría formalizar su estudio. En determinado momento se decidió que lo mejor sería analizarlos con las herramientas actuales para los sistemas complejos, dando paso a la proyección hacia herramientas como los diagramas de bifurcación, la clasificación de Wuensche para los atractores e incluso se obtuvieron sus diagramas de De Bruijn en diversos niveles dependiendo del autómeta.

### 2.4.1. El exponente de Lyapunov para los ACE

Tomemos como ejemplo la regla 126, usemos una configuración inicial de 30 células de longitud: 111111100000101010001011001110 y evolucionemos 10 tiempos, obteniendo el siguiente gráfico:

Ahora cambiemos un poco la condición inicial, colocando una célula viva en la

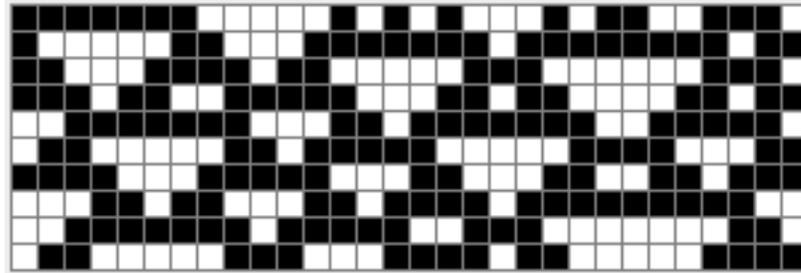


Figura 2.12: Evolución de la regla 126

celda 15, con la configuración inicial 111111100000111010001011001110, observemos el comportamiento ahora:

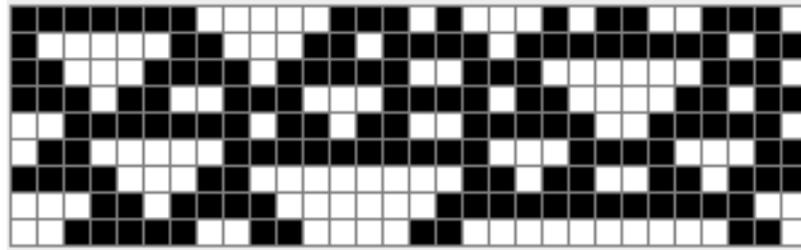


Figura 2.13: Evolución de la regla 126

Podemos observar que las evoluciones son distintas pero no sabemos con exactitud qué tan distintas son, por ello observemos cómo la evolución al cambiar una célula cambió:

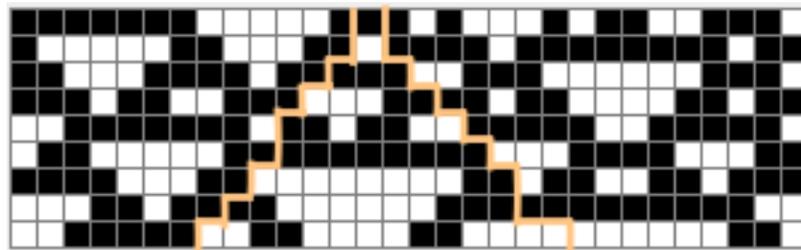


Figura 2.14: Evolución de la regla 126

La parte que se encuentra resaltada son las células que ya no son iguales a la primera evolución, así podemos ver cómo se expande el caos con un simple cambio, casi en cada evolución hubo un cambio.

### 2.4.2. Clasificación de Wuensche

Wuensche clasifica a los atractores de los autómatas en 4 clases al igual que Wolfram, pero él se basa principalmente en la forma que tienen los atractores, su jardín del Edén y el tamaño de su ciclo. Así, tenemos que la clasificación es:

1. Clase I: Poseen transitorios muy cortos, principalmente son atractores de un punto (aunque posiblemente también sean atractores periódicos) muy altos en grado y muy alta densidad en las hojas (dinámicas muy ordenadas). Esta clase posee ya sea uno o pocos estados que se estarán ciclando en el tiempo, mientras que su jardín del Edén tienden a tener muchos estados que convergen en un punto.
2. Clase II: Poseen transitorios muy cortos, principalmente pequeños atractores periódicos (pero también pueden poseer atractores de un solo punto), altos en grado y muy alta densidad en sus hojas. Esto es, los clase II poseen recorridos cortos o bien de un solo punto, pero se distinguen por tener más bajo el grado que los clase I.
3. Clase III: Poseen transitorios muy largos, atractores periódicos muy largos, son bajos en grado y tienen baja densidad en sus hojas (dinámicas caóticas). Este tipo tienen su anillo donde poseen sus estados que se repiten muy grande, arriba de los 1000 estados, y poseen baja densidad en sus hojas y son bajos en grado (no toma mucho llegar a los estados atractores).
4. Clase IV: Poseen transitorios moderados, longitud moderada de sus atractores periódicos, son moderados en grado y muy moderada densidad en sus hojas (posiblemente dinámicas complejas). Esta clase no posee tan grandes anillos de estados que se repiten con el tiempo, tampoco su grado es alto y son muy moderados con respecto a sus hojas (no hay tantos estados para llegar a los estados atractores).

### 2.4.3. Diagramas de De Bruijn

Los diagramas de De Bruijn son muy adecuados para describir las reglas de evolución e los autómatas celulares de una dimensión, a pesar de que originalmente

fueron usados en la teoría del registro de cambios (el tratamiento de secuencias donde sus elementos se superponen entre ellos). Los caminos en un diagrama de De Bruijn pueden representar cadenas, configuraciones, o clases de configuraciones en el espacio de evoluciones.

Para un autómata celular de una dimensión de orden  $(k,r)$ , el diagrama de De Bruijn está definido como una gráfica directa con  $k^{2r}$  vértices y  $k^{2r+1}$  aristas. Los vértices son rotulados con los elementos del alfabeto de longitud  $2r$ . Una arista el directamente del vértice  $i$  al vértice  $j$ , si y sólo si, los  $2r - 1$  símbolos finales de  $i$  son los mismos que los  $2r - 1$  iniciales en  $j$  formando una vecindad de  $2r + 1$  estados representados por  $ij$ ,

El diagrama de De Bruijn asociado a la regla 126 es representado en la siguiente figura:

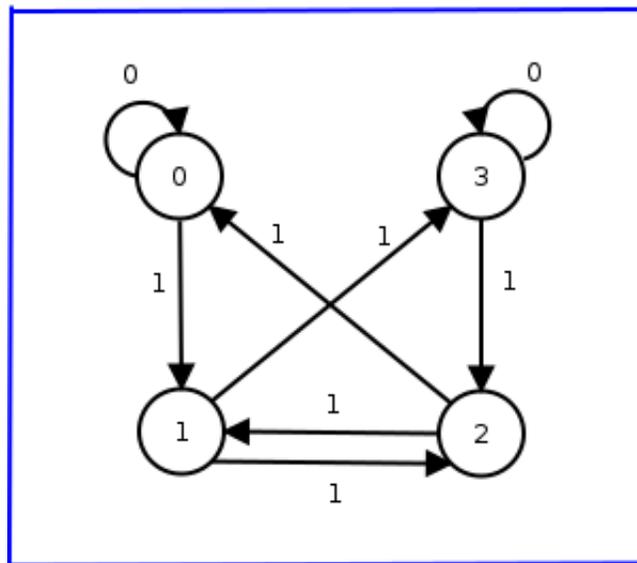


Figura 2.15: El diagrama de De Bruijn correspondiente a la regla 126

La siguiente figura expone que hay dos vecindades evolucionando hacia 0 y seis vecindades hacia 1, entonces la mayor frecuencia es del estado 1, indicando la posibilidad de tener un autómata inyectivo, que es, la existencia de configuraciones del Jardín del Edén. El análisis clásico en la teoría de grafos ha sido aplicado sobre los diagramas de De Bruijn para estudiar temas como la reversibilidad; en otro sentido, los ciclos en el diagrama indican construcciones periódicas en la evolución del

autómata si la etiqueta del círculo está de acuerdo con la secuencia definida por sus nodos, tomando condiciones periódicas limitadas. Tomemos la construcción equivalente de un diagrama de De Bruijn para describir la evolución en dos pasos de la regla 126 (teniendo ahora nodos compuestos por secuencias de 4 símbolos).

### Los k-caminos.

Supongamos que existe un camino desde el estado  $i$  hasta el estado  $j$  que no pasa por un estado mayor que  $k$ . Hay que considerar dos posibles casos:

1. El camino no pasa a través del estado  $k$ . En este caso, la etiqueta sobre el camino está en el lenguaje de  $R_{ij}^{k-1}$ .
2. El camino pasa a través del estado  $k$  al menos una vez. Podemos dividir el camino en varios tramos. El primero de ellos va desde el estado  $i$  hasta el estado  $k$  sin pasar por  $k$ , el último tramo va desde el estado  $k$  al  $k$  sin pasar a través de  $k$ , y los restantes tramos intermedios van de  $k$  a  $k$ , sin pasar por  $k$ . Observemos que si el camino atravesara el estado  $k$  sólo una vez, entonces no habría ningún tramo intermedio; sólo un camino desde  $i$  hasta  $k$  y un camino desde  $k$  hasta  $j$ . El conjunto de etiquetas para todos los caminos de este tipo se representa mediante la expresión regular  $R_{ik}^{k-1}(R_{kk}^{k-1})^*R_{kj}^{k-1}$ . Es decir, la primera expresión representa la parte del camino que alcanza el estado  $k$  por primera vez, la segunda representa la parte que va desde  $k$  hasta cero, una o más de una vez, y la tercera expresión representa la parte del camino que abandona  $k$  por última vez y pasa al estado  $j$ .

Si combinamos las expresiones para los caminos de los dos tipos anteriores, tenemos la expresión:

$$R_{ij}^k = R_{ij}^{k-1} + R_{ik}^{k-1}(R_{kk}^{k-1})^*R_{kj}^{k-1}$$

para las etiquetas de todos los caminos desde el estado  $i$  al estado  $j$  que no pasan por ningún estado mayor que  $k$ . Si construimos estas expresiones en orden creciente de superíndices, dado que cada  $R_{ij}^k$  sólo depende de las expresiones con superíndice más pequeño, entonces todas las expresiones estarán disponibles cuando las necesitemos.

Luego tenemos  $R_{ij}^n$  para todo  $i$  y  $j$ . Podemos suponer que el estado 1 es el estado inicial, aunque los estados de aceptación podrían ser cualquier conjunto de estados. La expresión regular para el lenguaje del autómata es entonces la suma (unión) de todas las expresiones  $R_{ij}^n$  tales que el estado  $j$  es un estado de aceptación.

## 2.5. Sistemas caóticos.

### 2.5.1. Definición de un sistema caótico.

La teoría del caos fue introducida en ecología por May(1974, 1976) y Oster(1976) en el contexto de funciones reales de variable real está siendo estudiada con intensidad en los últimos años y aparece en casi todos los modelos discretos no lineales.

Lo primero que nos llama la atención es el hecho de que vivimos inmersos en el caos. De manera usual, llamamos caos a todo aquello que no somos capaces de sistematizar.

El primer investigador del caos fue un meteorólogo llamado Edward Lorenz. En 1960 utilizaba un modelo matemático para predecir el tiempo, que consistía en un sistema de 12 ecuaciones no lineales. La simulación se realizaba con un ordenador, que daba como respuesta un comportamiento probable de la atmósfera. En cierta ocasión, quiso repetir de nuevo los cálculos anteriores, para ello volvió a introducir los números en el ordenador, pero para ahorrar papel y tiempo, solo utilizó 3 números decimales en vez de 6. Lo sorprendente fue que el resultado encontrado era totalmente diferente a los obtenidos en la vez anterior. Del análisis de esta situación surgió una nueva teoría que se conoce con el nombre de la teoría del caos.

Lo verdaderamente interesante era que diferencias muy pequeñas en las condiciones iniciales tenían una gran influencia en la resolución final del problema. A este efecto que tienen las pequeñas diferencias iniciales después se le dio el nombre de efecto mariposa: El movimiento de una simple ala de mariposa hoy produce un diminuto cambio en el estado de la atmósfera. Después de un cierto período de tiempo, el comportamiento de la atmósfera diverge del que debería haber tenido. Así que, en un período de un mes, un tornado que habría devastado la costa de Indonesia no se forma.

Antes de la aparición de esta nueva teoría, sólo había dos tipos de comportamien-

tos conocidos para un sistema dinámico: un estado fijo, donde los variables nunca cambian, y el comportamiento periódico, donde el sistema está en un “circuito cerrado” y se repite infinitamente.

### 2.5.2. Propiedades.

Algunos de los rasgos característicos de los sistemas caóticos son:

1. Son muy sensitivos a las condiciones iniciales. Un cambio muy pequeño en los datos iniciales dan lugar a resultados totalmente diferentes.
2. Parecen un desorden, o hechos al azar, pero no lo son, hay reglas que determinan su comportamiento. Los sistemas hechos al azar no son caóticos.

### 2.5.3. Identificación de un sistema caótico.

El caos no es más que un desorden solamente en apariencia, tiene muy poco que ver con el azar. Aunque parecen evolucionar de forma aleatoria y errática, estos sistemas tienen en realidad un orden interno subyacente. Por eso, aún cuando son impredecibles, también son deterministas. Lo que significa que su estado futuro está determinado por su estado actual y obedece estrictas leyes naturales de evolución dinámica. Pero estos sistemas son tan irregulares que jamás repiten su comportamiento pasado, ni siquiera de manera aproximada.

El caos parece formar parte de la estructura misma de la materia y está muy ligado a los fenómenos de auto-organización, ya que el sistema puede saltar espontánea y recurrentemente desde un estado hacia otro de mayor complejidad y organización.

## 2.6. Sistemas complejos.

### 2.6.1. Definición de un sistema complejo.

Los sistemas complejos se caracterizan fundamentalmente porque su comportamiento es imprevisible. Sin embargo, complejidad no es sinónimo de complicación: este último hace referencia a algo enmarañado, enredado, de difícil comprensión. En

realidad, y por el momento, no existe una definición precisa y absolutamente aceptada de lo que es un sistema complejo, pero pueden darse algunas peculiaridades comunes.

### 2.6.2. Propiedades.

1. En primer lugar, está compuesto por una gran cantidad de elementos relativamente idénticos. Por ejemplo, las células en un organismo, o las personas en una sociedad.
2. En segundo lugar, la interacción entre sus elementos es local y origina un comportamiento emergente que no puede explicarse a partir de dichos elementos tomados aisladamente. Un desierto puede contener billones de granos de arena, pero sus interacciones son excesivamente simples comparadas con las que se verifican en las abejas de un enjambre.
3. Por último, es muy difícil predecir su evolución dinámica futura; o sea, es prácticamente imposible vaticinar lo que ocurrirá más allá de un cierto horizonte temporal.

En la naturaleza se pueden encontrar una gran cantidad de ejemplos de sistemas complejos que se extienden desde la física hasta la neurología, desde la economía hasta la biología molecular, desde la sociología hasta las matemáticas. Por ese motivo, esta clase de sistemas no constituye un caso raro ni excepcional sino que se manifiesta en la inmensa mayoría de los fenómenos que se observan a diario. Sin embargo, y a pesar de su gran diversidad y abundancia, se pueden identificar conductas dinámicas genéricas, no importa su naturaleza (física, química, biológica o social); entre ellas, las leyes de crecimiento, la autoorganización y los procesos colectivos emergentes.

### 2.6.3. Identificación de un sistema complejo.

La mayoría de los sistemas complejos son inestables, se mantienen delicadamente equilibrados. Cualquier variación mínima entre sus elementos componentes puede modificar, de forma imprevisible, las interrelaciones y, por lo tanto, el comportamiento de todo el sistema. Así, la evolución de esta clase de sistemas se caracteriza por la

fluctuación, situación en la que el orden y el desorden se alternan constantemente. Sus estados evolutivos no transcurren a través de procesos continuos y graduales, sino que suceden por medio de reorganizaciones y saltos. Cada nuevo estado es sólo una transición, un período de reposo entrópico”.

---

# Capítulo 3

## La regla 126 de los ACE

### 3.1. Antecedentes

Los autómatas celulares, como se ha mencionado en el capítulo anterior, surgieron desde hace tiempo atrás, pero en el caso de los elementales la primera persona que habló de ellos fue Stephen Wolfram en 1983, y a partir de esa fecha se han hecho diversos estudios sobre la misma. La regla 126 posee un comportamiento caótico, por lo que Wolfram la clasificó como clase III, aunque añadiendo una extensión (memoria), se puede observar que la regla se comporta como una clase IV. Se demostró de igual forma que la regla genera un lenguaje regular en el libro “Scaling Phenomena in Disordered Systems” escrito en 1991 por Roger Pynn y Arne Skjeltorp, donde muestra los atractores de la regla y como éstos generan un lenguaje regular. De ahí los estudios de la regla han sido diversos, desde el análisis de sus diagramas de De Bruijn hasta su extensión con memoria, llegando a una hipótesis de que esta regla posee características similares a la regla 110. Harold V. McIntosh realizó una exploración exhaustiva de la regla 110, dejando gliders y gliders-gun encontrados en dicha regla, mientras que Genaro J. Martínez decidió explorar la regla 126 con memoria de 4 generaciones, escribiendo artículos sobre ésta, pero dejando la exploración de la regla elemental inconclusa, es por eso que se requiere hacer primeramente la exploración completa de la regla utilizando las herramientas más comunes, así como describir el por qué efectivamente genera un lenguaje regular.

### 3.2. Definición de la regla 126

La regla 126 es una de las reglas elementales de autómatas celulares introducidas por Stephen Wolfram en 1983 (Wolfram 1983, 2002). Especifica el color siguiente en una celda, dependiendo de su color y sus vecinos inmediatos. Los resultados de esta regla están codificados en la representación binaria  $126 = 01111110_2$ .

La definición de la regla 126 de forma gráfica es la siguiente:



Figura 3.1: La definición de la regla 126 de acuerdo a sus vecinos izquierdo y derecho.

Podemos generalizar esta regla de la siguiente forma: cuando la célula que se está evaluando, así como sus vecinos izquierdo y derecho posean el mismo estado (ya sea 0 o 1), entonces la siguiente evolución será una célula muerta (0), en caso contrario será una célula viva (1). De esta forma evitamos el usar las 8 condiciones que la definen, aunque también podemos utilizar su función totalística que no es más que la suma de los valores actuales de la 3 células que se emplean para ser evaluadas. Imaginemos que nuestra combinación a evaluar es 011, entonces su función totalística será  $0 + 1 + 1 = 2$ , ya que se suman los valores, así podemos decir que si la función totalística de la combinación que estemos evaluando es 0 o 3, entonces la siguiente evolución será 0, en caso contrario será 1.

La forma matemática de la regla 126 es  $\text{CellularAutomaton}[126, \text{init}, t]$ , donde  $\text{init}$  es la configuración inicial y  $t$  especifica la cantidad de evoluciones que se calcularán a partir de  $t = 0$ . De igual forma, la expresión booleana que la define es  $(p \oplus q) \vee (p \oplus r)$ , siendo  $p$ ,  $q$  y  $r$  las 3 células que se evalúan respectivamente. Esta expresión se lee como:  $(p \text{ ó } q) \text{ o } (p \text{ ó } r)$ , siendo dos OR exclusivas y una OR la que las une. La forma algebraica de la 126 es:  $\text{Mod}[p + q + p q + r + p r + q r, 2]$ , equivalente a su expresión booleana.

Evolucionando la regla algunas veces en el tiempo con una célula viva central podemos observar lo siguiente:

Como podemos observar, la regla 126 bajo estas condiciones iniciales no parece mostrar comportamientos aleatorios y complejos. Ahora, añadiendo una condición

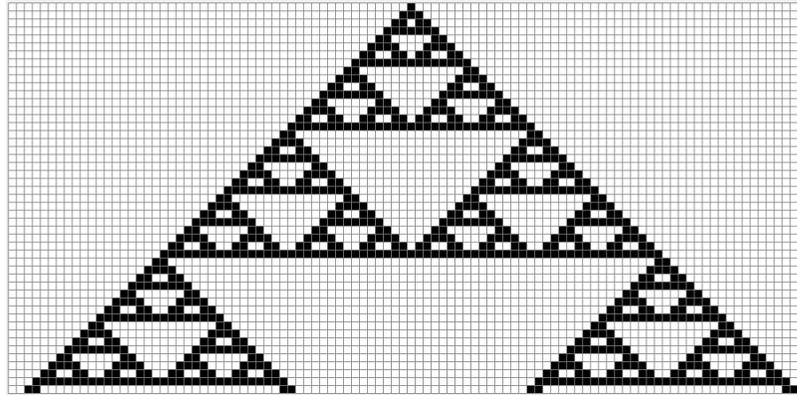


Figura 3.2: Evolución de la regla 126 hasta  $t = 50$  con una célula viva.

inicial aleatoria y de nuevo evolucionando podemos observar lo siguiente:

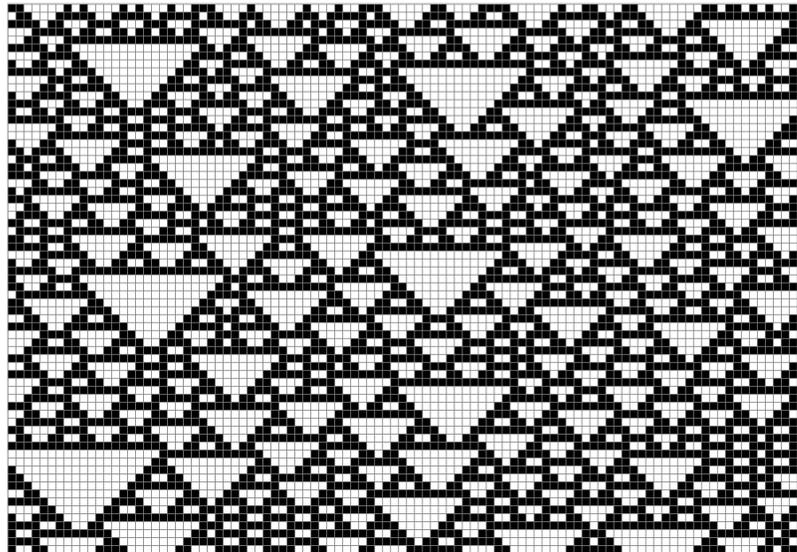


Figura 3.3: Evolución de la regla 126 hasta  $t = 70$  con el 30% de sus células vivas.

Como podemos observar, la regla bajo condiciones aleatorias ya no muestra el mismo comportamiento uniforme de antes.

### 3.3. Propiedades

Dada una secuencia de 1 y 0, como la generada por un autómata que evoluciona a partir de condiciones iniciales aleatorias, se puede realizar una transformada de Fourier discreta para determinar qué combinación de funciones sinusoidales se aproximan mejor a esa secuencia. Particularmente cuando el autómata tiene atractores no triviales, este espectro puede exhibir una variedad de características, tales como las vistas en la regla 126. Este espectro de potencia no es más que el cálculo de la transformada discreta de Fourier en diversos tiempos  $t$ .

La densidad de las evoluciones se muestra en la siguiente gráfica de tonos grises:

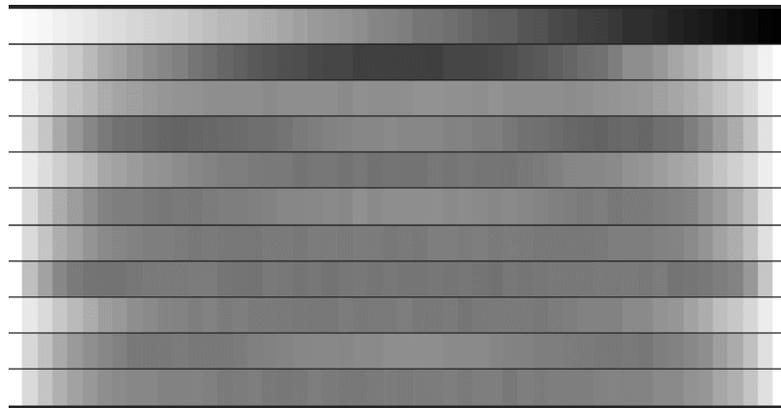


Figura 3.4: Densidad de las evoluciones en la regla 126.

Nos podemos preguntar cómo la densidad de las células negras cambia a medida que el autómata evoluciona. En esta imagen, cada tono de gris representa una densidad particular en una línea particular de células. La línea superior representa un conjunto de condiciones iniciales con densidad creciente, y cada paso debajo muestra la densidad del estado del autómata después de evolucionar a partir de esas condiciones iniciales. El número de condiciones iniciales diferentes utilizadas es finito, pero suficientemente grande como para aparecer relativamente continuo en las escalas usadas aquí.

### 3.4. Clasificación de la regla 126

De acuerdo a la clasificación de Wolfram, la regla 126 entra en la clase III. Ya habíamos comentado que la clase III denota comportamientos caóticos, y como en este caso la regla que se está estudiando entra en esta clasificación es momento de ver el porqué. Primeramente, tomaremos una evolución aleatoria de células como sigue:

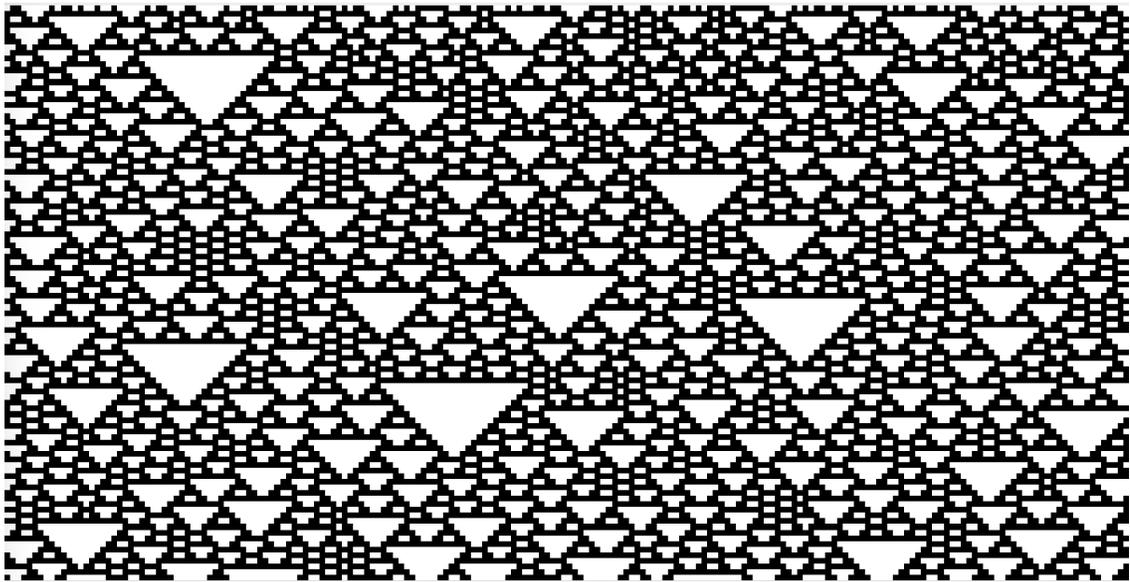


Figura 3.5: Evolución de la regla 126 aleatoria.

Como podemos observar en la figura con combinación aleatoria, los patrones encontrados son casi impredecibles, algunos se repiten pero otros definitivamente solo suceden una vez, ese comportamiento se conoce como caótico, debido a lo complejo que resulta describirlo y encontrar una función para sus evoluciones.

### 3.5. Diagramas de De Bruijn para la regla 126

Para la regla 126, vamos a obtener los  $k$ -caminos de su diagrama de De Bruijn. Ya que este diagrama solo posee 4 estados, tomaremos hasta  $k = 3$  como nuestro máximo, y comenzaremos por  $k = 0$ . Así que los  $k$ -caminos son los siguientes:

**Para  $k = 0$**

$$R_{00}^0 = 0$$

$$\begin{aligned}
R_{01}^0 &= 1 \\
R_{02}^0 &= \emptyset \\
R_{03}^0 &= \emptyset \\
R_{10}^0 &= \emptyset \\
R_{11}^0 &= \emptyset + \epsilon = \epsilon \\
R_{12}^0 &= 1 \\
R_{13}^0 &= 1 \\
R_{20}^0 &= 1 \\
R_{21}^0 &= 1 \\
R_{22}^0 &= \emptyset + \epsilon = \epsilon \\
R_{23}^0 &= \emptyset \\
R_{30}^0 &= \emptyset \\
R_{31}^0 &= \emptyset \\
R_{32}^0 &= 1 \\
R_{33}^0 &= 0
\end{aligned}$$

**Para  $k = 1$**

$$\begin{aligned}
R_{00}^1 &= R_{00}^0 + R_{01}^0(R_{11}^0)^*R_{10}^0 = 0 + 1(\epsilon)^*\emptyset = 0 + \emptyset = 0 \\
R_{01}^1 &= R_{01}^0 + R_{01}^0(R_{11}^0)^*R_{11}^0 = 1 + 1(\epsilon)^*\epsilon = 1 + 1 = 1 \\
R_{02}^1 &= R_{02}^0 + R_{01}^0(R_{11}^0)^*R_{12}^0 = \emptyset + 1(\epsilon)^*1 = 11 \\
R_{03}^1 &= R_{03}^0 + R_{01}^0(R_{11}^0)^*R_{13}^0 = \emptyset + 1(\epsilon)^*1 = 11 \\
R_{10}^1 &= R_{10}^0 + R_{11}^0(R_{11}^0)^*R_{10}^0 = \emptyset + \epsilon(\epsilon)^*\emptyset = \emptyset \\
R_{11}^1 &= R_{11}^0 + R_{11}^0(R_{11}^0)^*R_{11}^0 = \epsilon + \epsilon(\epsilon)^*\epsilon = \epsilon \\
R_{12}^1 &= R_{12}^0 + R_{11}^0(R_{11}^0)^*R_{12}^0 = 1 + \epsilon(\epsilon)^*1 = 1 + 1 = 1 \\
R_{13}^1 &= R_{13}^0 + R_{11}^0(R_{11}^0)^*R_{13}^0 = 1 + \epsilon(\epsilon)^*1 = 1 \\
R_{20}^1 &= R_{20}^0 + R_{21}^0(R_{11}^0)^*R_{10}^0 = 1 + 1(\epsilon)^*\emptyset = 1 \\
R_{21}^1 &= R_{21}^0 + R_{21}^0(R_{11}^0)^*R_{11}^0 = 1 + 1(\epsilon)^*\epsilon = 1 \\
R_{22}^1 &= R_{22}^0 + R_{21}^0(R_{11}^0)^*R_{12}^0 = \epsilon + 1(\epsilon)^*1 = \epsilon + 11 \\
R_{23}^1 &= R_{23}^0 + R_{21}^0(R_{11}^0)^*R_{13}^0 = \emptyset + 1(\epsilon)^*1 = 11 \\
R_{30}^1 &= R_{30}^0 + R_{31}^0(R_{11}^0)^*R_{10}^0 = \emptyset + \emptyset(\epsilon)^*\emptyset = \emptyset \\
R_{31}^1 &= R_{31}^0 + R_{31}^0(R_{11}^0)^*R_{11}^0 = \emptyset + \emptyset(\epsilon)^*\epsilon = \emptyset \\
R_{32}^1 &= R_{32}^0 + R_{31}^0(R_{11}^0)^*R_{12}^0 = 1 + \emptyset(\epsilon)^*1 = 1 \\
R_{33}^1 &= R_{33}^0 + R_{31}^0(R_{11}^0)^*R_{13}^0 = 0 + \emptyset(\epsilon)^*1 = 0
\end{aligned}$$

**Para  $k = 2$**

$$\begin{aligned}
 R_{00}^2 &= R_{00}^1 + R_{02}^1(R_{22}^1)^*R_{20}^1 = 0 + 11(\epsilon + 11)^*1 = 0 + (11)^*1 \\
 R_{01}^2 &= R_{01}^1 + R_{02}^1(R_{22}^1)^*R_{21}^1 = 1 + 11(\epsilon + 11)^*1 = 1 + (11)^*1 \\
 R_{02}^2 &= R_{02}^1 + R_{02}^1(R_{22}^1)^*R_{22}^1 = 11 + 11(\epsilon + 11)^*(\epsilon + 11) = (11)^* \\
 R_{03}^2 &= R_{03}^1 + R_{02}^1(R_{22}^1)^*R_{23}^1 = 11 + 11(\epsilon + 11)^*11 = (11)^* \\
 R_{10}^2 &= R_{10}^1 + R_{12}^1(R_{22}^1)^*R_{20}^1 = \emptyset + 1(\epsilon + 11)^*1 = 1(11)^*1 \\
 R_{11}^2 &= R_{11}^1 + R_{12}^1(R_{22}^1)^*R_{21}^1 = \epsilon + 1(\epsilon + 11)^*1 + 1(11)^*1 \\
 R_{12}^2 &= R_{12}^1 + R_{12}^1(R_{22}^1)^*R_{22}^1 = 1 + 1(\epsilon + 11)^*(\epsilon + 11) = 1 + 1(11)^* \\
 R_{13}^2 &= R_{13}^1 + R_{12}^1(R_{22}^1)^*R_{23}^1 = 1 + 1(\epsilon + 11)^*11 = 1 + 1(11)^* \\
 R_{20}^2 &= R_{20}^1 + R_{22}^1(R_{22}^1)^*R_{20}^1 = 1 + (\epsilon + 11)(\epsilon + 11)^*1 = 1 + (11)^*1 \\
 R_{21}^2 &= R_{21}^1 + R_{22}^1(R_{22}^1)^*R_{21}^1 = 1 + (\epsilon + 11)(\epsilon + 11)^*1 = 1 + (11)^*1 \\
 R_{22}^2 &= R_{22}^1 + R_{22}^1(R_{22}^1)^*R_{22}^1 = (R_{22}^1)^* = (11)^* \\
 R_{23}^2 &= R_{23}^1 + R_{22}^1(R_{22}^1)^*R_{23}^1 = 11 + (\epsilon + 11)(\epsilon + 11)^*11 = (11)^* \\
 R_{30}^2 &= R_{30}^1 + R_{32}^1(R_{22}^1)^*R_{20}^1 = \emptyset + 1(\epsilon + 11)^*1 = 1(11)^*1 \\
 R_{31}^2 &= R_{31}^1 + R_{32}^1(R_{22}^1)^*R_{21}^1 = \emptyset + 1(\epsilon + 11)^*1 = 1(11)^*1 \\
 R_{32}^2 &= R_{32}^1 + R_{32}^1(R_{22}^1)^*R_{22}^1 = 1 + 1(\epsilon + 11)^*(\epsilon + 11) = 1 + 1(11)^* \\
 R_{33}^2 &= R_{33}^1 + R_{32}^1(R_{22}^1)^*R_{23}^1 = 0 + 1(\epsilon + 11)^*11 = 0 + 1(11)^*
 \end{aligned}$$

**Para  $k = 3$**

$$\begin{aligned}
 R_{00}^3 &= R_{00}^2 + R_{03}^2(R_{33}^2)^*R_{30}^2 = 0 + (11)^*1 + (11)^*(0 + 1(11)^*)^*1(11)^*1 \\
 R_{01}^3 &= R_{01}^2 + R_{03}^2(R_{33}^2)^*R_{31}^2 = 1 + (11)^*1 + (11)^*(0 + 1(11)^*)^*1(11)^*1 \\
 R_{02}^3 &= R_{02}^2 + R_{03}^2(R_{33}^2)^*R_{32}^2 = (11)^* + (11)^*(0 + (11)^*)^*(1 + (11)^*)^* \\
 R_{03}^3 &= R_{03}^2 + R_{03}^2(R_{33}^2)^*R_{33}^2 = (11)^* + (11)^*(0 + (11)^*)^*(0 + (11)^*)^* \\
 R_{10}^3 &= R_{10}^2 + R_{13}^2(R_{33}^2)^*R_{30}^2 = 1(11)^*1 + (1 + 1(11)^*)(0 + 1(11)^*)^*1(11)^*1 \\
 R_{11}^3 &= R_{11}^2 + R_{13}^2(R_{33}^2)^*R_{31}^2 = 1(11)^*1 + (1 + 11(11)^*)(0 + 1(11)^*)^*1(11)^*1 \\
 R_{12}^3 &= R_{12}^2 + R_{13}^2(R_{33}^2)^*R_{32}^2 = 1 + 1(11)^* + (1 + 1(11)^*)(0 + 1(11)^*)^*(1 + 1(11)^*)^* \\
 R_{13}^3 &= R_{13}^2 + R_{13}^2(R_{33}^2)^*R_{33}^2 = 1 + 1(11)^* + (1 + 1(11)^*)(0 + 1(11)^*)^*(0 + 1(11)^*)^* \\
 R_{20}^3 &= R_{20}^2 + R_{23}^2(R_{33}^2)^*R_{30}^2 = 1 + (11)^*1 + (11)^*(0 + 1(11)^*)^*1(11)^*1 \\
 R_{21}^3 &= R_{21}^2 + R_{23}^2(R_{33}^2)^*R_{31}^2 = 1 + (11)^*1 + (11)^*(0 + 1(11)^*)^*1(11)^*1 \\
 R_{22}^3 &= R_{22}^2 + R_{23}^2(R_{33}^2)^*R_{32}^2 = (11)^* + (11)^*(0 + 1(11)^*)^*(1 + 1(11)^*)^* \\
 R_{23}^3 &= R_{23}^2 + R_{23}^2(R_{33}^2)^*R_{33}^2 = (11)^* + (11)^*(0 + 1(11)^*)^*(0 + 1(11)^*)^* \\
 R_{30}^3 &= R_{30}^2 + R_{33}^2(R_{33}^2)^*R_{30}^2 = 1(11)^*1 + (0 + 1(11)^*)(0 + 1(11)^*)^*1(11)^*1 \\
 R_{31}^3 &= R_{31}^2 + R_{33}^2(R_{33}^2)^*R_{31}^2 = 1(11)^*1 + (0 + 1(11)^*)(0 + 1(11)^*)^*1(11)^*1
 \end{aligned}$$

$$R_{32}^3 = R_{32}^2 + R_{33}^2(R_{33}^2)^*R_{32}^2 = 1 + 1(11)^* + (0 + 1(11)^*)(0 + 1(11)^*)^*(1 + 1(11)^*)$$

$$R_{33}^3 = R_{33}^2 + R_{33}^2(R_{33}^2)^*R_{33}^2 = (0 + 1(11)^*)^*$$

Como podemos observar en las expresiones regulares, la mayoría no son grandes y algunas inclusive no se pueden implementar (aquellas que no permiten generar al menos una cadena de 2 caracteres de longitud), también aquellas que generan ya sea una cadena de solamente ceros o de unos no presentan un comportamiento interesante debido a la definición de la regla 126, sin embargo, la última expresión regular es la que nos permite obtener un comportamiento complejo e interesante.

Obteniendo algunas cadenas aleatorias de la expresión regular  $R_{33}^3 = R_{33}^2 + R_{33}^2(R_{33}^2)^*R_{33}^2 = (0 + 1(11)^*)^*$ , se obtienen las siguientes evoluciones:

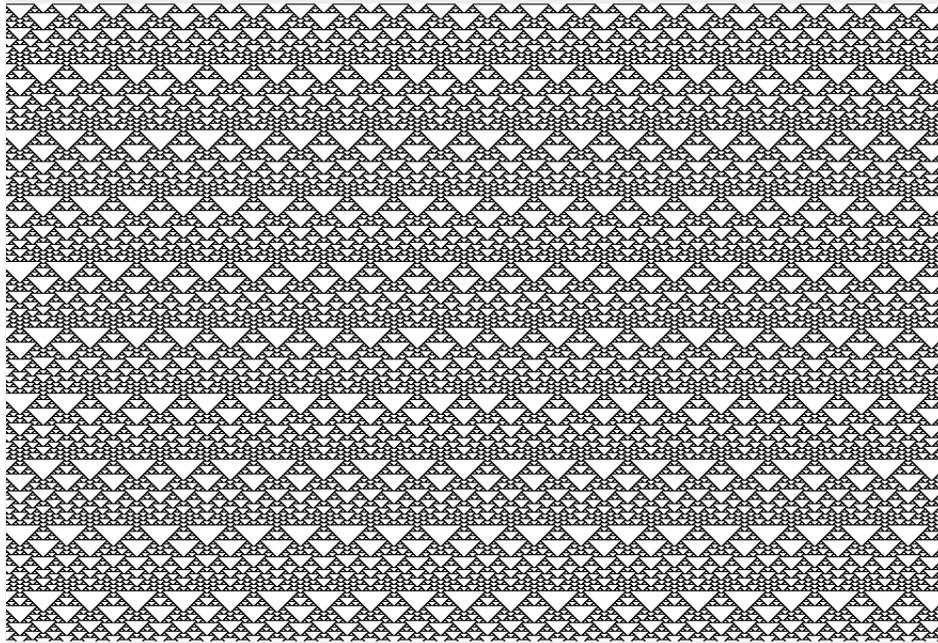


Figura 3.6: Gráfica de la expresión regular.

### 3.6. Clasificación de Wuensche para la regla 126

Como vimos en la sección de los atractores de la regla 126, con cadenas cortas no podemos observar un comportamiento caótico, pero al incrementar la longitud y llegar hasta  $l = 24$  podemos ver algo totalmente distinto. En la descriptiva de

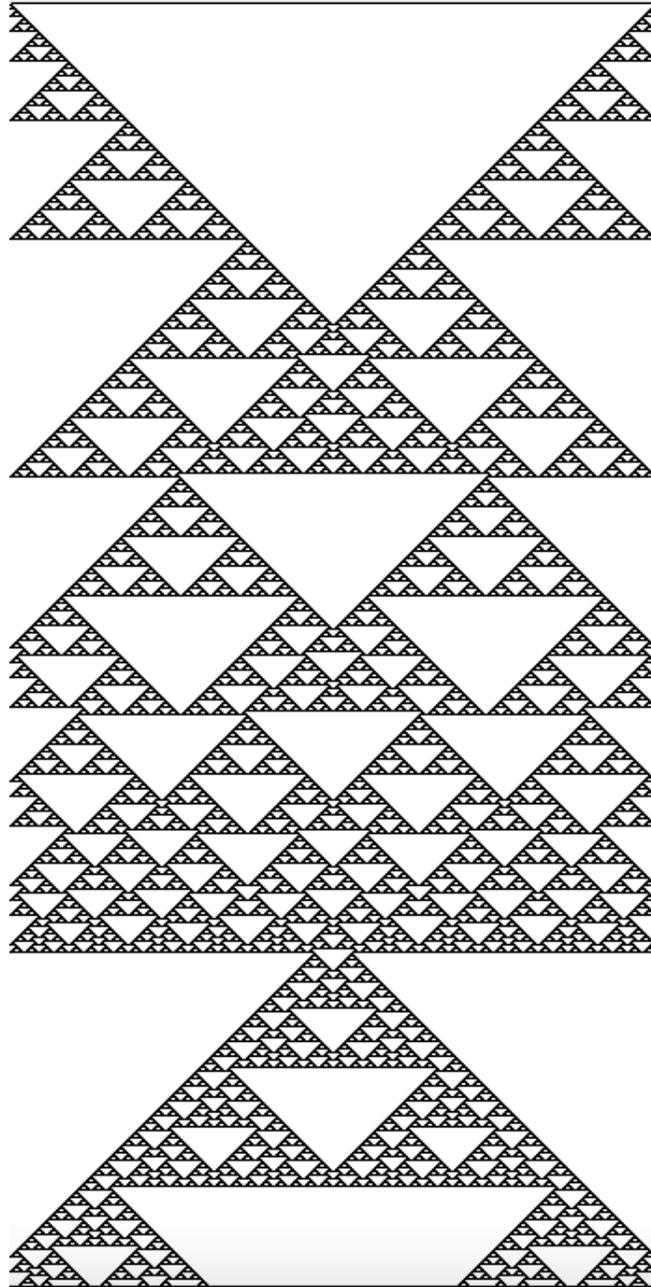


Figura 3.7: Gráfica de la expresión regular.

la clasificación de Wuensche habíamos puesto lo que sucedía con los clase III, que sus árboles no eran ni tan llenos de historia ni ciclos grandes, pero poseían un gran número de posibles rutas para llegar a uno de los estados atractor.

Como se observa para cadenas de longitud igual a 15, el atractor más grande posee una gran historia, sin embargo, cuando se llega al estado atractor no posee un gran número de estados en los cuales cicla, solo uno. En esa figura podemos observar que entonces el atractor cumple con la clasificación de Wuensche. Podemos tomar otro ejemplo dentro de los atractores: cuando la cadena es de longitud igual a 24 observamos que los ciclos van incrementando pero no de forma significativa, un clase IV posee ciclos de al menos 100 estados, en nuestro caso nuestros estados atractores cuando son un ciclo oscilan entre los 10 - 20 estados, pero la densidad que poseen en las hojas es alta, tal es el caso de estos atractores, los cuales tienen muchos estados que convergen a uno solo, y éste es uno de los caminos para llegar a los estados que conforma el atractor, así pues podemos concluir que los atractores de la regla 126 cumplen con la clasificación de Wuensche y esto se observa de forma clara cuando evolucionamos con cadenas grandes, a partir de  $l = 13$  se ve perfectamente su comportamiento caótico.

---

# Capítulo 4

## La regla 126 con memoria de 4 generaciones

### 4.1. Antecedentes

Si bien es cierto que los autómatas poseen características que los pueden volver sistemas complejos, a ellos solo les importa la evolución presente para generar la siguiente, olvidando por completo lo que habían generado en el pasado, por eso les llamamos ahistóricos. El caso de los autómatas con memoria es que éstos toman ciertas evoluciones pasadas en el tiempo y mediante una función calculan un anillo temporal, dicho anillo es evaluado posteriormente con la regla del autómata y el resultado obtenido se añade a la siguiente evolución, permitiendo así que su historia sea importante.

Así como a cualquier autómata, a la regla 126 se le puede añadir la función con memoria que se desee para observar su comportamiento, en este trabajo se usará la regla de mayoría tomando 4 generaciones, dicha función fue analizada y mostrada al público por Ramón Alonso-Sanz en su libro “Cellular Automata with Memory” en 2009, donde muestra el autómata y su evolución y lo compara con otros autómatas celulares elementales igual con memoria aplicada. Cuando este autómata se evoluciona a más de 500 evoluciones, el autómata muestra estructuras que parecieran moverse y repetirse en dos dimensiones y se encuentran rodeadas de una estructura repetitiva llamada fondo periódico, dichas estructuras fueron llamadas gliders y se

puede observar la forma en la que se mueven a través del autómata y lo que sucede si chocan con algunas otra estructura distinta a su fondo periódico. Después del trabajo por Alonso-Sanz, en 2011 junto a Genaro J. Martínez y Andrew Adamatzky escribieron un artículo titulado “Rule 126 Case Studying”, donde describen los gliders apreciables y algunas colisiones simuladas.

La razón por la cual la memoria fue tomada hasta 4 generaciones, es que cuando  $\tau = t - 2$ , genera la misma evolución que sino se utilizara memoria, y en el caso de  $\tau = t - 3$ , no se observan esos patrones durante la evolución, Así pues aumentando la memoria de igual forma muestra patrones como gliders pero no es el objeto de estudio de esta tesis.

## 4.2. La regla 126 con memoria: función de mayoría

La regla 126 con memoria de 4 generaciones emplea a función de mayoría, la cual define que al tener un número mayor de ceros o unos tomando 4 generaciones atrás, entonces se usará en el anillo temporal el valor respectivo, en caso de ser 2 ceros y 2 unos, se usará el valor que esté en  $\tau = t - 1$ . Al aplicarse a la regla 126, podemos observar la evolución de la figura 4.1 para un espacio de 500 células por 500 generaciones.

Podemos observar dentro del gráfico que algunas líneas resaltan más que otros, y pareciera que están rodeadas de estados que permite que resalten, estas líneas que se mueven de izquierda a derecha, viceversa o bien de arriba a abajo son los gliders y los estados que nos permiten observarlas y que estás a su alrededor se conoce como el fondo periódico. Las primeras 4 evoluciones del atractor se aplica la 126 de los ECA directamente, a partir de la 5ta es cuando se aplica la función de memoria y el anillo temporal. En la figura 4.2 podemos ver una evolución de la regla con memoria empleando una condición aleatoria con una densidad del 75 % de células muertas y 25 % de células vivas para un espacio de 500 células por 500 generaciones.

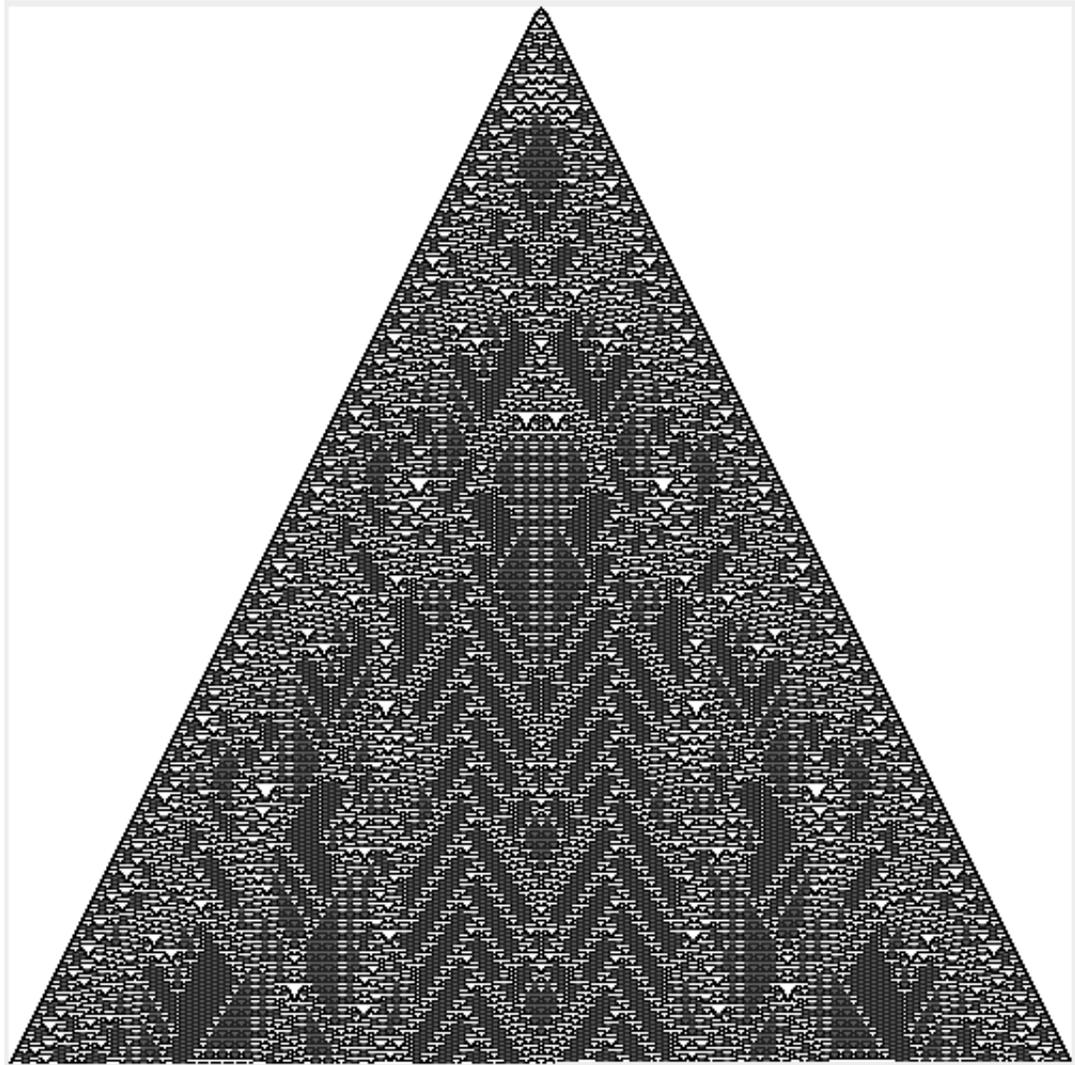


Figura 4.1: La regla 126 con memoria de 4 generaciones con una célula viva central

### 4.3. Propiedades

Una de las propiedades de la regla 126 con memoria de 4 generaciones es que posee diversos gliders con período igual a 2 o a 5, esto es que cada 2 o 5 evoluciones en el tiempo se volverá a repetir el patrón pero desplazado unas cuantas células a la izquierda o a la derecha. Estos patrones de igual forma se pueden rotar, así podemos comenzar con cualquiera de las 5 evoluciones que se repiten en el tiempo. Para tener un control sobre estos patrones, se deben especificar al menos 4 evoluciones que

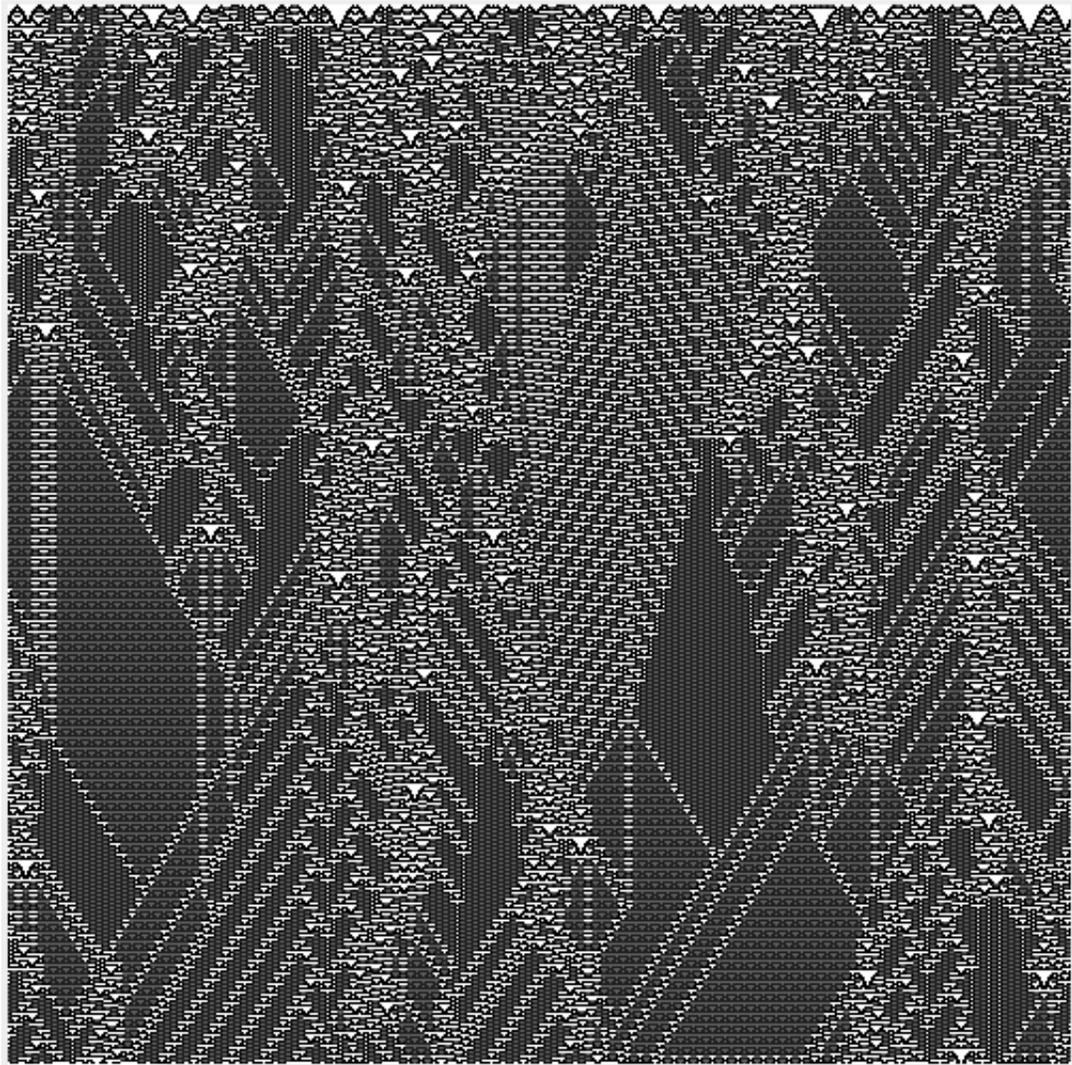


Figura 4.2: La regla 126 con memoria de 4 generaciones con una condición aleatoria

generan dichos patrones, para que en la 5ta evolución se comience a usar la memoria y el glider no sea destruido.

Como la regla 126 con memoria es una extensión de la elemental, todos los fondos periódicos que se encuentren, los gliders y filtros, también aplican para la regla sin memoria. Esto nos permite observar patrones que si intentáramos verlos solo usando la regla sin memoria nunca los veríamos o sería muy difícil, es por ello que es importante su estudio con memoria.

Existe un procedimiento inverso para pasar una función con memoria a una sin memoria y este es extender el anillo hasta que ninguna combinación tenga estados distintos en su siguiente evolución, esto nos permite traspasar esta función a una sin memoria para su análisis. La reglas 126 con memoria de 2 generaciones genera el mismo patrón que la de sin memoria, pero a partir de 3 células es casi imposible determinar la función sin memoria debido a que aún extendiendo el anillo hasta un radio de 35, sigue sin eliminarse la ambigüedad, y esto ya genera  $2^{35}$  combinaciones posibles, las cuales programarlas a lado de las  $2^3$  combinaciones de Wolfram realmente es ineficiente que seguir tratando el autómata con su función de memoria.

## 4.4. Elementos dentro del espacio de evoluciones

Dentro del espacio de evoluciones de la regla 126 con memoria, encontramos algunos elementos que pareciera se repiten a lo largo del tiempo y se observa cómo se mueven y mantienen su estructura, así como el fondo en el que viajan.

Dentro de este tipo de estructuras, nos encontramos con 4 tipos dentro de la regla 126, los cuales son:

1. **Fondo periódico:** Son un conjunto de células que parecen como un mosaico que se repite infinitamente, pero permiten la existencia de gliders, gliders-gun y estructuras estacionarias, con el fondo periodico los gliders que existen mantienen su forma gracias a que están dentro del fondo, fuera de él su estructura no se mantendría. Dentro de la regla 126 encontramos 2 fondos periodicos.
2. **Glider:** Por su traducción al español "planeadores", este tipo de estructura se caracteriza por ser un conjunto de células que pareciera se mueven ya sea a la izquierda o a la derecha y mantienen su forma. Dentro de la regla 126 encontramos 2 gliders distintos.
3. **Glider-gun:** Por su traducción al español "disparador de planeadores", son un conjunto de células que pareciera que "disparan" gliders, también podemos conocerlas como generadores de gliders. Dentro de la regla 126 encontramos un glider-gun.

4. **Estructura estacionaria:** Las estructuras estacionarias son similares a los gliders, solo que con la diferencia de que ellas no se mueven a la izquierda o a la derecha, se mantienen en una misma posición. Dentro de la regla 126 encontramos dos estructuras estacionarias.

En las siguientes secciones se describirán estas estructuras y se mostrarán dentro del espacio de evoluciones de la regla 126 con memoria, así como algunas propiedades que poseen.

#### 4.4.1. Fondos periodicos

Los fondos periodicos son "mosaicos" que permiten la existencia de gliders, gliders-gun y estructuras estacionarias, permiten que éstas mantengan su forma y puedan interactuar entre ellas, de ahí la importancia de conocer los diversos fondos periodicos que posee la regla 126 con memoria. Dentro del espacio de evoluciones nos encontramos con dos fondos periodicos que permiten la existencia de gliders.

##### Fondo periodico 1

El 1er fondo periodico es el siguiente:

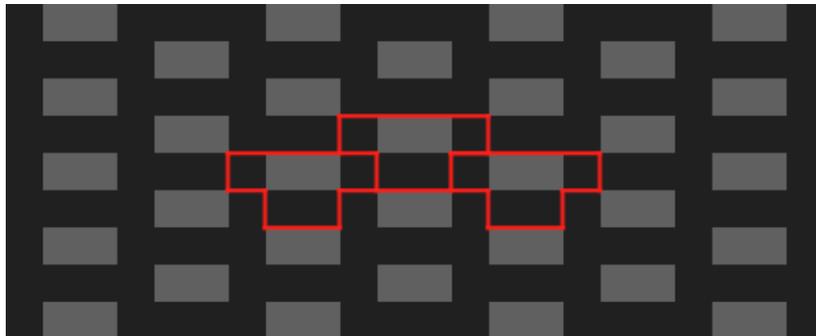


Figura 4.3: Fondo periódico 1 ( $fp_1$ ) en el espacio de evoluciones

Como podemos observar, parece un mosaico relleno de rectángulos blancos que están separados por líneas negras y además se alternan en orden. Sin embargo, el mosaico que define a nuestro fondo es una T que se indica en color rojo.

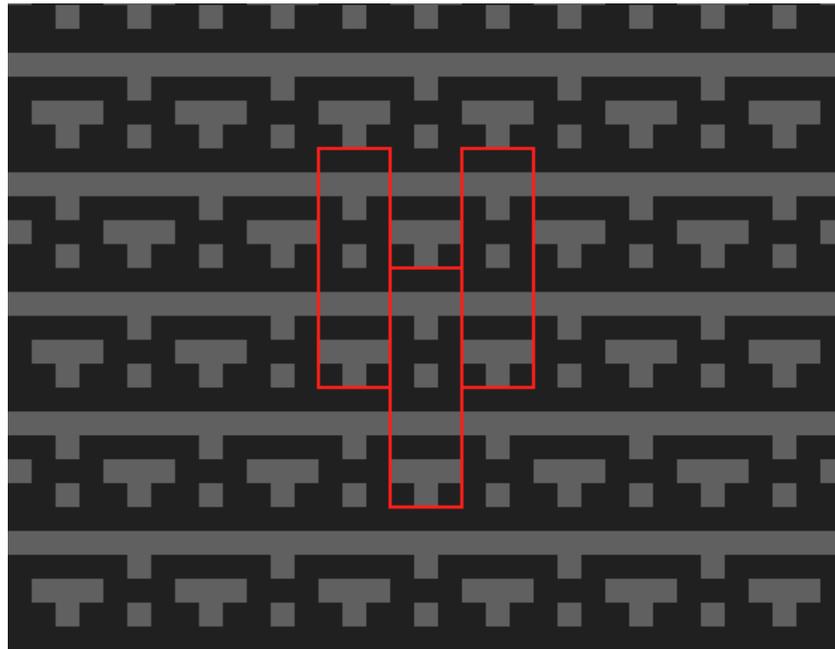
La expresión regular que define al fondo periódico  $fp_1$  es la de la tabla 4.1.

Línea	Células	Fase
1001	4	1
11	2	2

Cuadro 4.1: Líneas de células para formar el fondo periodico 1

### Fondo periodico 2

El 2do fondo periodico es el siguiente:

Figura 4.4: Fondo periodico 2( $fp_2$ ) en el espacio de evoluciones

Como podemos observar, parece un mosaico relleno de T's separadas por líneas blancas, este fondo es un poco más complejo que el fondo periodico 1, y cada uno tiene su conjunto de células que lo forman. El mosaico que lo define es un rectángulo de 3 células de ancho por 10 de alto, el cual se muestra en color rojo.

La expresión regular que define al fondo periódico  $fp_2$  es la de la tabla 4.2.

Línea	Células	Fase
111	3	1
000	3	2
101	3	3
111	3	4
101	3	5
111	3	6
000	3	7
111	3	8
000	3	9
101	3	10

Cuadro 4.2: Líneas de células para formar el fondo periodico 2

### 4.4.2. Gliders

Los gliders como vimos, son un conjunto de células que se mueven en el espacio de evoluciones y mantienen una forma, pueden moverse ya sea a la izquierda o a la derecha y pueden abarcar más de una evolución, en esta sección vamos a presentar los dos gliders encontrados en la regla 126 con memoria. A cada uno de los gliders se les etiquetará con una "g" seguida del número de glider.

#### Glider g1

El glider 1 lo podemos observar en la figura 4.5.

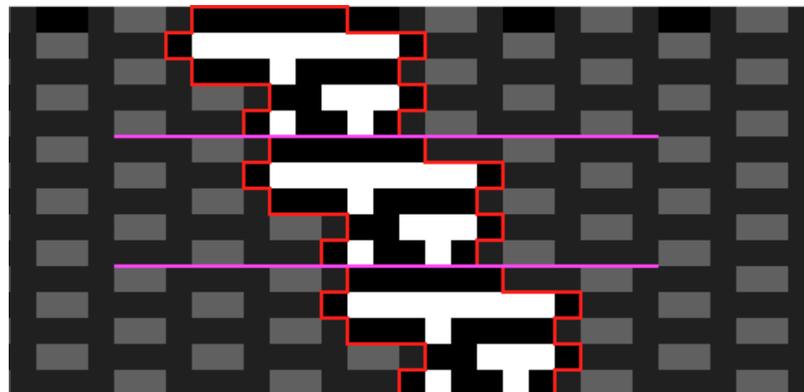


Figura 4.5: Glider 1( $g_1$ ) moviéndose dentro del espacio de evoluciones

Como podemos observar en la figura, el glider 1 tiene 5 evoluciones para ser formado y además vive dentro del fondo periodico 1. Observemos ahora qué células forman al glider en la tabla 4.3

Línea	Células	Fase
111111	6	1
1000000001	10	2
11101111	8	3
110001	6	4
101101	6	5

Cuadro 4.3: Líneas de células para formar el glider 1

### Glider g2

El glider 2 lo podemos observar en la figura 4.6.

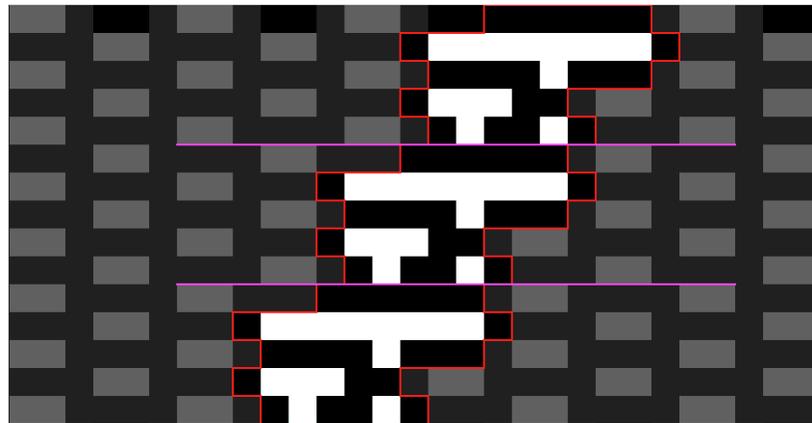


Figura 4.6: Glider 2( $g_2$ ) moviéndose dentro del espacio de evoluciones

Como se observa en la figura, el glider 2 es similar al glider 1, pareciera como si fuese su espejo. Este glider se mueve hacia la izquierda y también está compuesto por 5 evoluciones y vive dentro del fondo periodico 1. Veamos su tabla de propiedades.

### Glider g3

El glider 3 lo podemos observar en la figura 4.7.

Línea	Células	Fase
111111	6	1
1000000001	10	2
11110111	8	3
100011	6	4
101101	6	5

Cuadro 4.4: Líneas de células para formar el glider 2

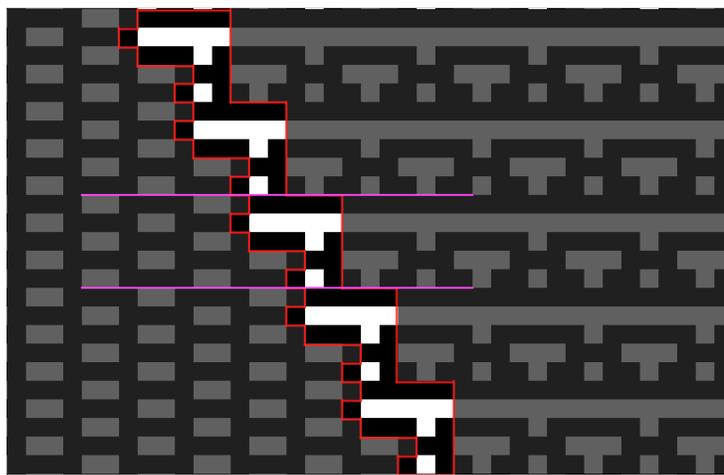


Figura 4.7: Glider  $3(g_3)$  moviéndose dentro del espacio de evoluciones

Como se observa en la figura, el glider 3 coexiste entre los fondos periódicos 1 y 2, por lo que podemos usarlo como un puente entre estos dos espacios. La expresión regular que lo define se describe en la tabla 4.5

### Glider g4

El glider 4 lo podemos observar en la figura 4.8.

Como se observa en la figura, el glider 4 coexiste entre los fondos periódicos 1 y 2, por lo que podemos usarlo como un puente entre estos dos espacios. La expresión regular que lo define se describe en la tabla 4.6

### Glider g5

El glider 5 lo podemos observar en la figura 4.9.

Línea	Células	Fase
11111	5	1
100000	6	2
11101	5	3
11	2	4
101	3	5

Cuadro 4.5: Líneas de células para formar el glider 3

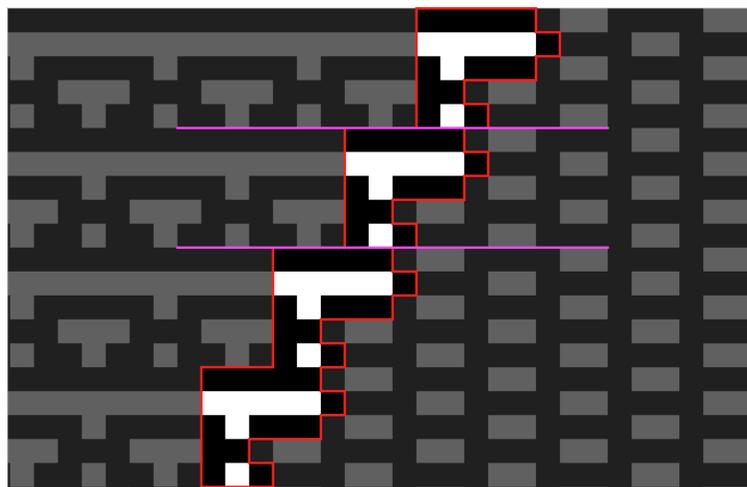


Figura 4.8: Glider 4( $g_4$ ) moviéndose dentro del espacio de evoluciones

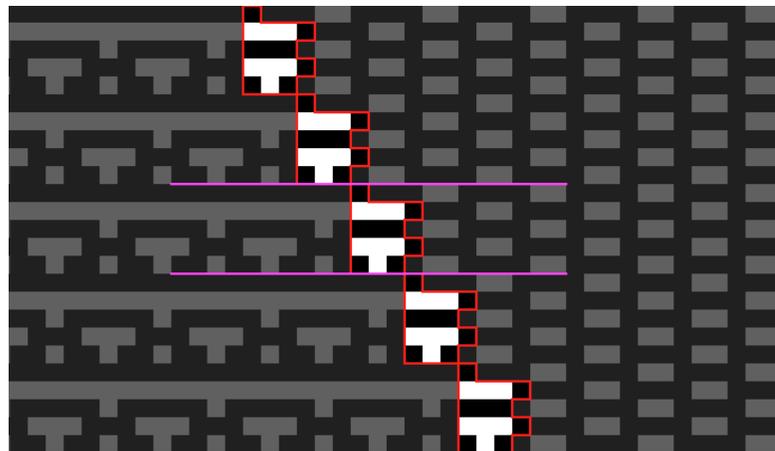


Figura 4.9: Glider 5( $g_5$ ) moviéndose dentro del espacio de evoluciones

Línea	Células	Fase
11111	5	1
000001	6	2
10111	5	3
11	2	4
101	3	5

Cuadro 4.6: Líneas de células para formar el glider 4

Como se observa en la figura, el glider 5 coexiste entre los fondos periódicos 1 y 2, por lo que podemos usarlo como un puente entre estos dos espacios. La expresión regular que lo define se describe en la tabla 4.7

Línea	Células	Fase
1	1	1
0001	4	2
111	3	3
0001	4	4
101	3	5

Cuadro 4.7: Líneas de células para formar el glider 5

### Glider g6

El glider 6 lo podemos observar en la figura 4.10.

Como se observa en la figura, el glider 6 coexiste entre los fondos periódicos 1 y 2, por lo que podemos usarlo como un puente entre estos dos espacios. La expresión regular que lo define se describe en la tabla 4.8

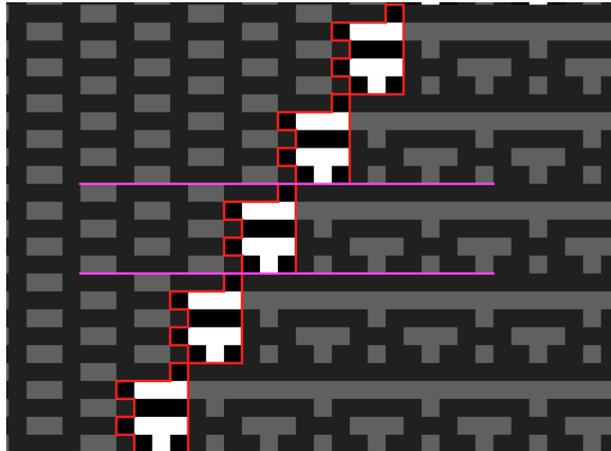


Figura 4.10: Glider  $6(g_6)$  moviéndose dentro del espacio de evoluciones

Línea	Células	Fase
1	1	1
1000	4	2
111	3	3
1000	4	4
101	3	5

Cuadro 4.8: Líneas de células para formar el glider 6

### 4.4.3. Estructuras estacionarias

Las estructuras estacionarias son similares a los gliders, con la diferencia de que éstas no se mueven para un lado, sino que se mantienen en una posición y avanzan exclusivamente para "abajo". Dentro de la regla 126 con memoria encontramos dos estructuras estacionarias que viven en fondos periodicos distintos. Las estructuras estacionarias se denotarán con una "s" seguida del número de la estructura.

#### Estructura estacionaria s1

La estructura estacionaria 1 tiene la forma que se muestra en la figura 4.11

Como podemos observar, es una estructura muy pequeña que solamente ocupa 2 evoluciones y no se desplaza a ningún lado, así que podemos describir las células que la componen en la tabla 4.9

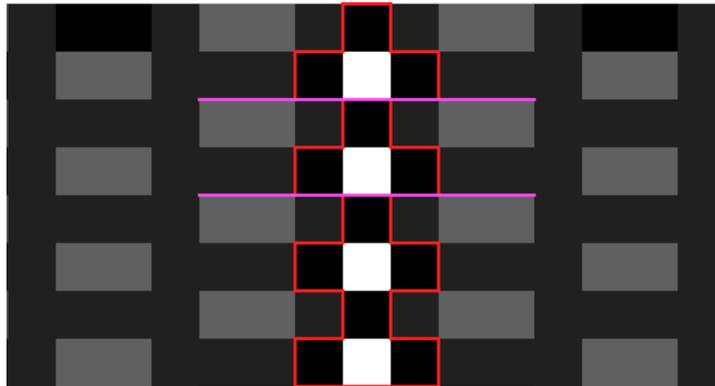


Figura 4.11: Configuración estacionaria ( $s_1$ ) moviéndose dentro del espacio de evoluciones

Línea	Células	Fase
1	1	1
101	3	2

Cuadro 4.9: Líneas de células para formar la estructura estacionaria 1

### Estructura estacionaria s2

La estructura estacionaria 2 tiene la siguiente forma:

Como podemos observar, esta estructura estacionaria vive en el fondo periodico 2, pero en algunas evoluciones pareciera que desaparece. La tabla que describe las células que la forman es la 4.10

Como podemos observar en la tabla, esta estructura estacionaria está compuesta por 10 evoluciones y tiene 3 fases distintas, las cuales se repiten conforme va avanzando nuestra estructura estacionaria.

#### 4.4.4. Gliders-gun

Los gliders-gun son "disparadores" de gliders, podemos también entenderlos como generadores de gliders. Se observan en el espacio de evoluciones generando gliders que se mueven en el espacio. Dentro de la regla 126 con memoria podemos observar una variedad de gliders que no difieren mucho en los gliders que generan, sino en su estructura para generarlos, por lo que se describirán algunos de ellos. A partir de

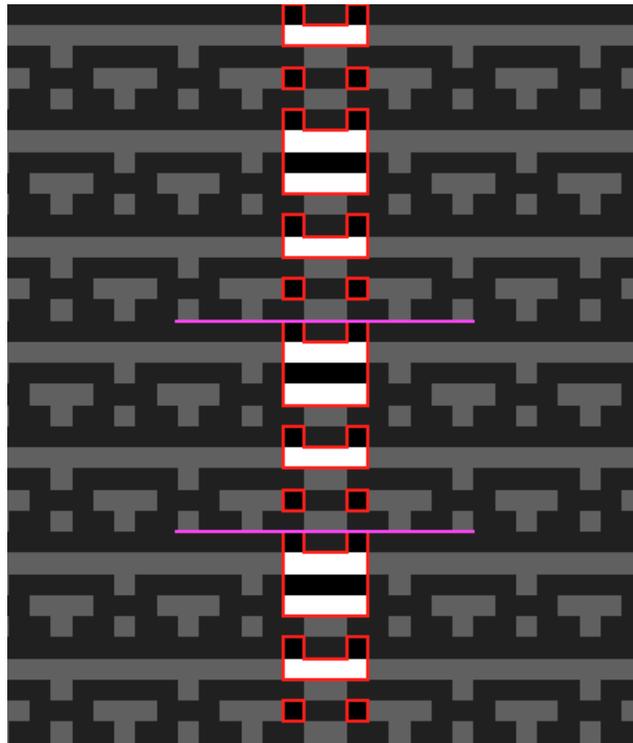


Figura 4.12: Configuración estacionaria 2 moviéndose dentro del espacio de evoluciones

este momento para referirnos a un glider lo haremos con la palabra "gun" seguido del número de glider.

### Glider gun 1

El glider-gun 1 es el siguiente:

Como podemos observar, el glider gun 1 genera los gliders g1 y g2. Podemos ver que dentro de este glider-gun, los gliders generados están separados por el fondo periódico 1, y podemos ver que la distancia entre los gliders es mínima.

### Glider gun 2

El glider-gun 2 es el siguiente:

Como podemos observar, el glider-gun 2 genera los gliders g1 y g2. Así como el gun1, este glider-gun vive también en el fondo periódico 1 pero la distancia entre los

Línea	Células	Fase
1 1	2	1
0000	4	2
1111	4	3
0000	4	4
	0	5
1 1	2	6
0000	4	7
	0	8
1 1	2	9
	0	10

Cuadro 4.10: Líneas de células para formar la estructura estacionaria 2

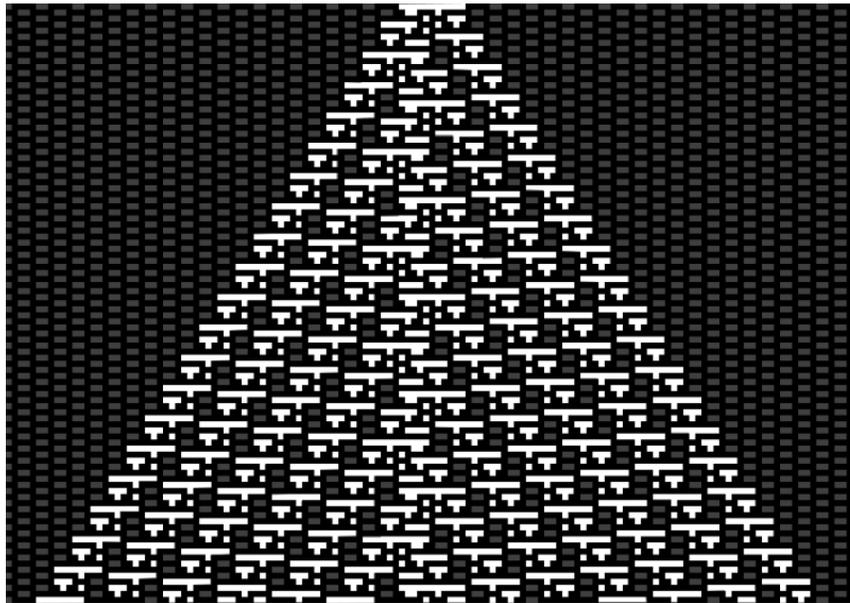


Figura 4.13: Glider-gun 1 (gun1) generando los gliders g1 y g2 dentro del espacio de evoluciones

gliders es mayor.

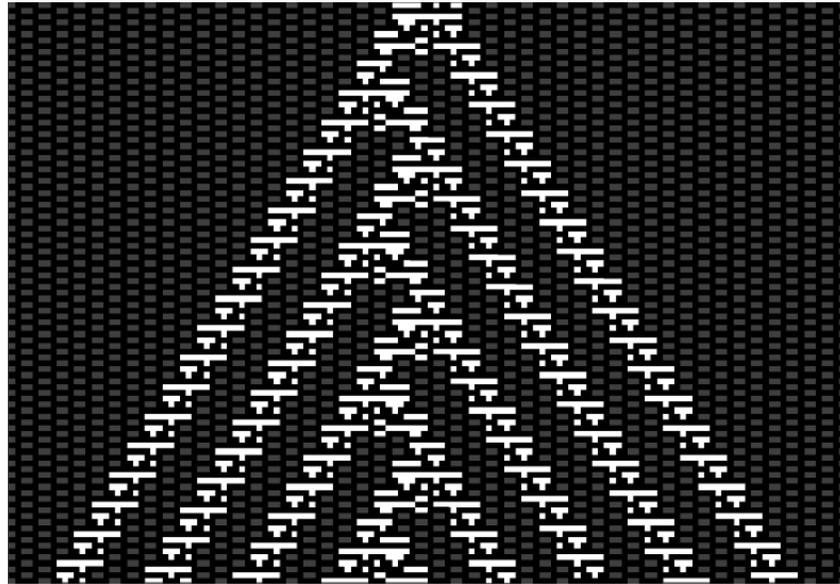


Figura 4.14: Glider-gun 2 (gun2) generando los gliders  $g_1$  y  $g_2$  dentro del espacio de evoluciones

## 4.5. Puntos de colisión de los elementos dentro del espacio de evoluciones

Los puntos de colisión son evoluciones donde un glider o una estructura estacionaria colisionan entre sí en alguna evolución y generan un patrón nuevo. Dentro de los gliders de la regla 126 con memoria encontramos que varían en cantidad de puntos dependiendo del tipo de glider, lo mismo sucede con las estructuras estacionarias. En esta sección se mostrarán los diversos puntos para los gliders  $g_1$ ,  $g_2$  y las estructuras estacionarias  $s_1$  y  $s_2$ .

### 4.5.1. Puntos de colisión de los gliders

#### Puntos en el glider $g_1$

Los puntos de colisión del glider  $g_1$  son los que se señalan con flechas en la figura 4.15

Como podemos observar, el glider  $g_1$  posee 3 puntos de colisión, los cuales podemos variar al rotarlo en sus 5 fases distintas.

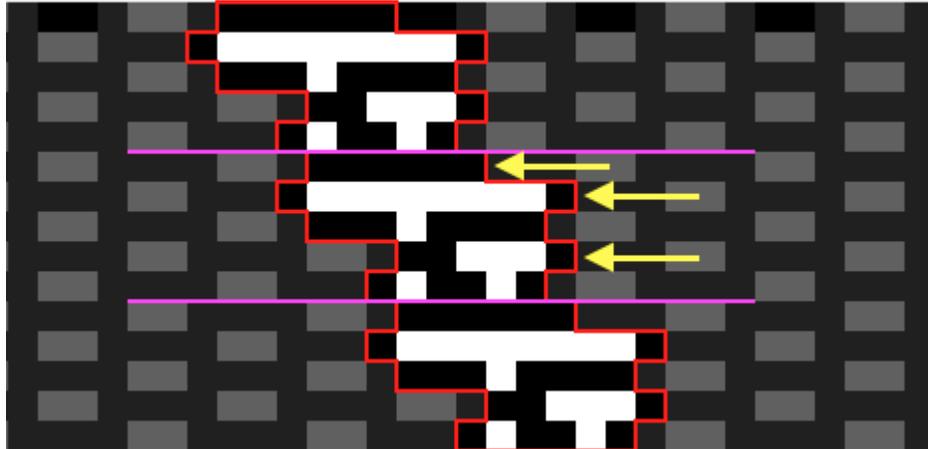


Figura 4.15: Puntos de colisión del glider  $g_1$  en el espacio de evoluciones

### Puntos en el glider $g_2$

Los puntos de colisión del glider  $g_2$  son los señalados en la figura 4.16

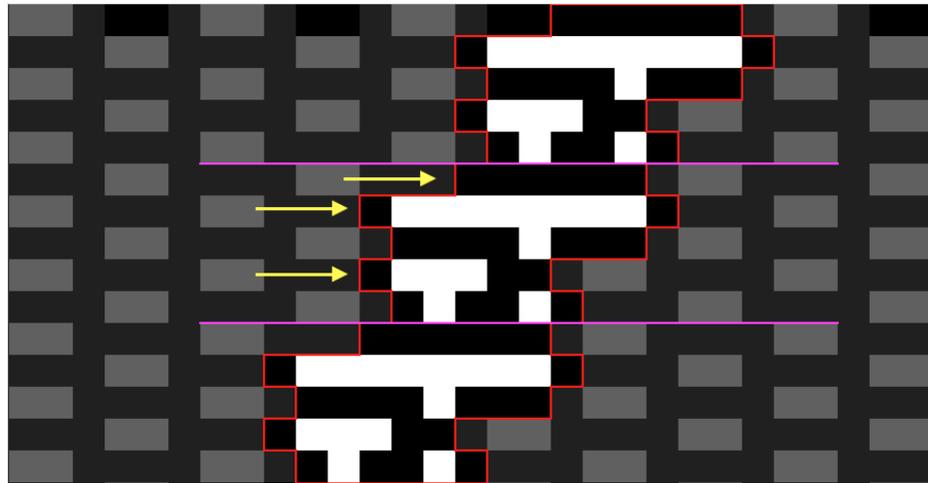


Figura 4.16: Puntos de colisión del glider  $g_2$  en el espacio de evoluciones

Como podemos observar, el glider  $g_2$  posee 3 puntos de colisión, los cuales podemos variar al rotarlo en sus 5 fases distintas.

### Puntos en el glider $g_3$

Los puntos de colisión del glider  $g_3$  son los señalados en la figura 4.17

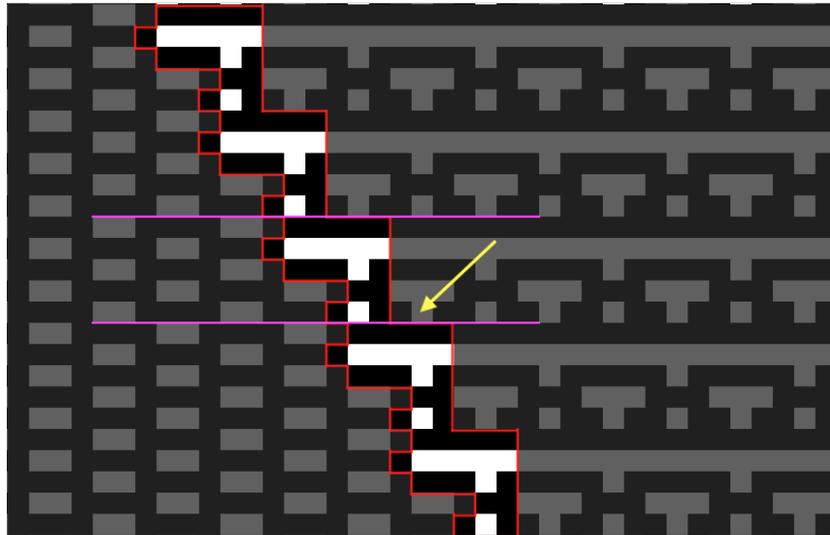


Figura 4.17: Puntos de colisión del glider  $g_3$  en el espacio de evoluciones

Como podemos observar, el glider  $g_3$  posee solo un punto de colisión.

#### Puntos en el glider $g_4$

Los puntos de colisión del glider  $g_4$  son los señalados en la figura 4.18

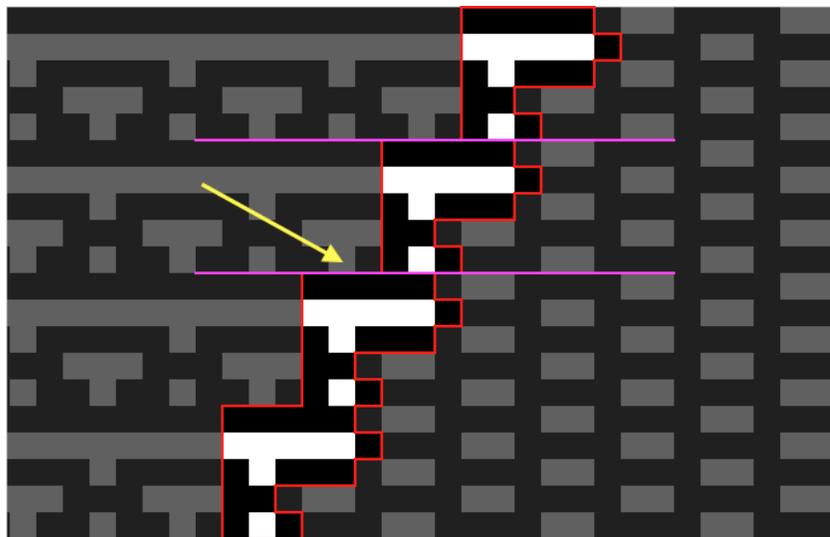


Figura 4.18: Puntos de colisión del glider  $g_4$  en el espacio de evoluciones

Como podemos observar, el glider  $g_4$  posee solo un punto de colisión.

### Puntos en el glider $g_5$

Los puntos de colisión del glider  $g_5$  son los señalados en la figura 4.19

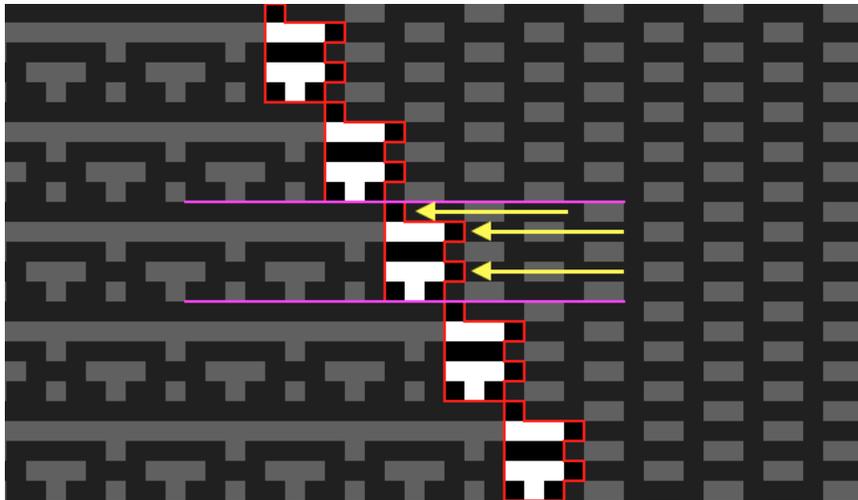


Figura 4.19: Puntos de colisión del glider  $g_5$  en el espacio de evoluciones

Como podemos observar, el glider  $g_5$  posee 3 puntos de colisión que son accesibles si rotamos el glider en sus 5 fases.

### Puntos en el glider $g_6$

Los puntos de colisión del glider  $g_6$  son los señalados en la figura 4.20

Como podemos observar, el glider  $g_6$  posee 3 puntos de colisión que son accesibles si rotamos el glider en sus 5 fases.

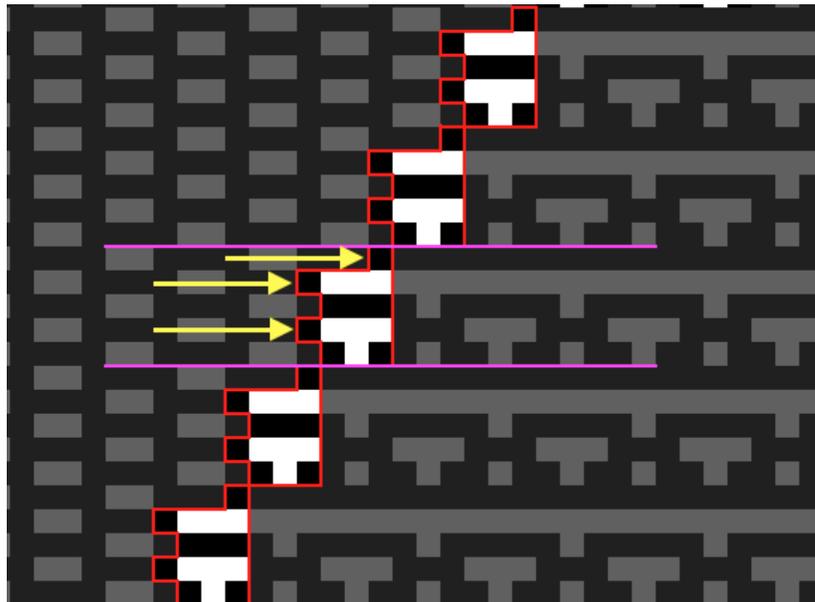


Figura 4.20: Puntos de colisión del glider  $g_6$  en el espacio de evoluciones

#### 4.5.2. Puntos de colisión de las estructuras estacionarias

##### Puntos en la estructura estacionaria $s_1$

La estructura estacionaria  $s_1$  tiene los puntos de colisión indicados con flechas en la figura 4.21

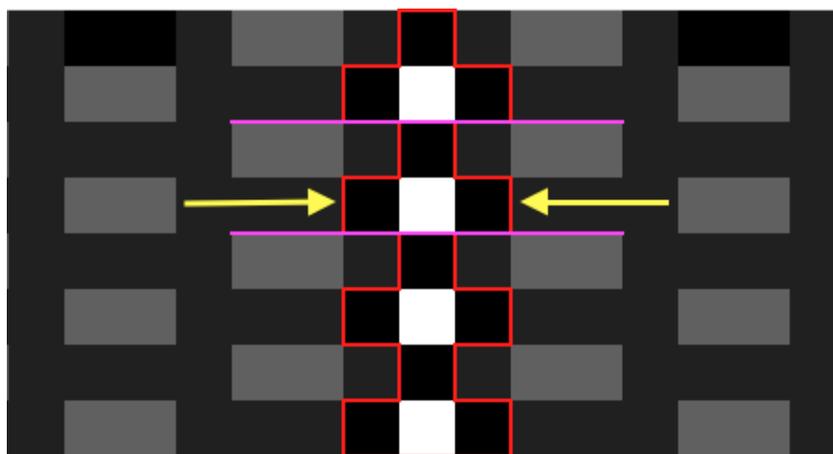


Figura 4.21: Puntos de colisión de la estructura estacionaria  $s_1$  en el espacio de evoluciones

Como podemos observar en la figura 4.21, este still-life posee dos puntos de colisión a los costados.

### Puntos en la estructura estacionaria $s_2$

La estructura estacionaria  $s_2$  tiene los puntos de colisión indicados con flechas en la figura 4.22

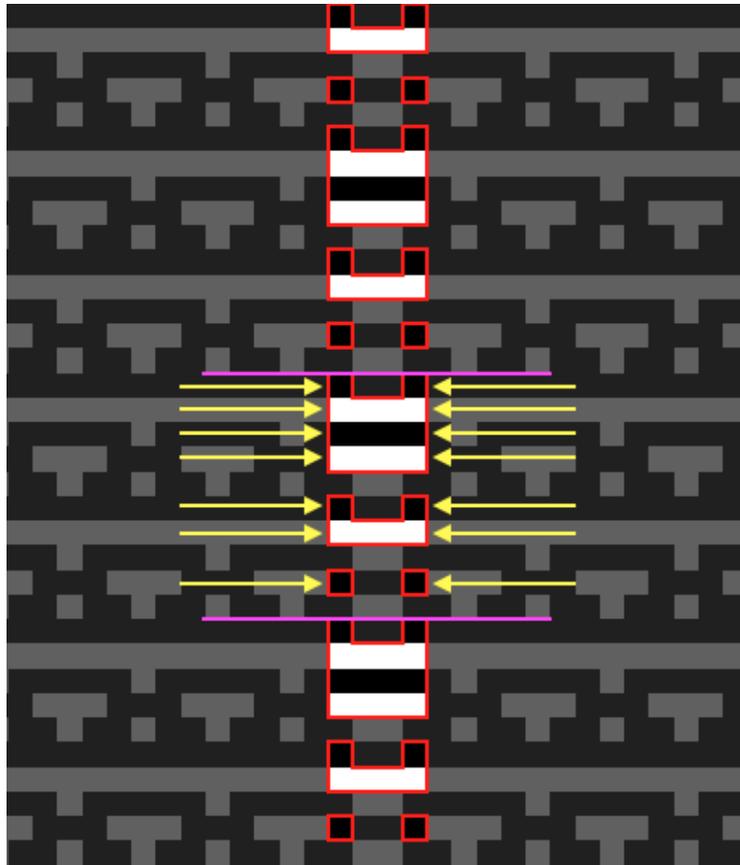


Figura 4.22: Puntos de colisión de la estructura estacionaria  $s_2$  en el espacio de evoluciones

Como podemos observar en la figura 4.22,  $s_2$  posee 14 puntos de colisión, 7 de cada lado.

## 4.6. Colisiones entre los elementos dentro del espacio de evoluciones

En esta sección se resumirán las colisiones distintas obtenidas con las estructuras identificadas dentro del espacio de evoluciones, para ver todas las colisiones realizadas de manera exhaustiva consulte el apéndice B. Dichas colisiones se clasificaron de acuerdo a la cantidad de partículas que intervinieron en la colisión, siendo los de dos partículas colisiones binarias, las de tres partículas ternarias y así sucesivamente.

Para entender el resultado que nos generan las colisiones, utilizaremos una notación en forma de ecuación de la siguiente manera:

$$g_1 \leftrightarrow s_2 \leftrightarrow g_3 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow g_n \leftrightarrow s_n = K$$

Dónde:

1.  $g_n$  denotará el glider con su respectivo número.
2.  $s_n$  denotará la estructura estacionaria con su respectivo número.
3.  $K$  denotará una combinación de gliders, fondos periódicos, etc, dependiendo del resultado de la colisión.  $K$  puede poseer partículas separadas por:
  - **Elevadas a alguna potencia:** Indica que son partículas iguales y que no están separadas, el número de la potencia indica la cantidad de partículas que están juntas. Ejemplos:  $g_1^2$ ,  $g_3^4$ , etc.
  - **Multiplicadas:** Para partículas iguales indica que están separadas por un bloque de fondo periódico, el número que viene con ellas indica la cantidad de partículas. Para partículas distintas indica que vienen pegadas. Ejemplos:  $g_1g_2$ ,  $2g_1$ , etc.
  - **Signo de +:** Para partículas iguales indica que se encuentran separadas por más de un bloque de fondo periódico. Para partículas distintas indica que están separadas por uno o más bloques de fondo periódico. Ejemplos:  $g_1 + g_1$ ,  $g_3 + g_4$ , etc.

### 4.6.1. Colisiones binarias

Se comenzarán con las colisiones que solo involucran dos elementos dentro del espacio de evoluciones: las colisiones binarias.

**Gliders:**  $g_1$  y  $g_2$

En la figura 4.23 podemos observar las colisiones obtenidas con los gliders  $g_1$  y  $g_2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

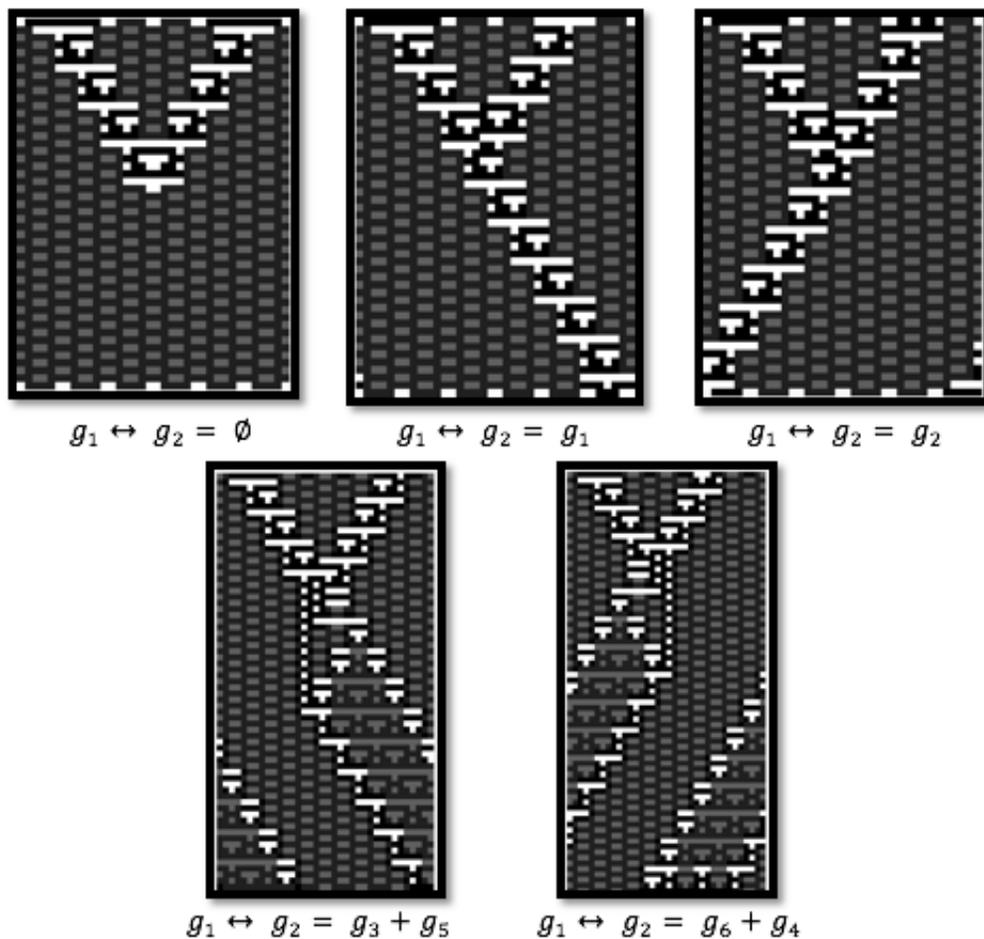


Figura 4.23: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_1$  y  $g_2$  con su respectiva ecuación

En la figura 4.23 podemos observar 5 colisiones distintas que producen diversos

resultados, las ecuaciones indicadas son:

1.  $g_1 \leftrightarrow g_2 = \emptyset$
2.  $g_1 \leftrightarrow g_2 = g_1$
3.  $g_1 \leftrightarrow g_2 = g_2$
4.  $g_1 \leftrightarrow g_2 = g_3 + g_5$
5.  $g_1 \leftrightarrow g_2 = g_6 + g_4$

**Gliders:  $g_1$  y  $g_6$**

En la figura 4.24 podemos observar las colisiones obtenidas con los gliders  $g_1$  y  $g_6$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

En la figura 4.24 podemos observar 5 colisiones distintas que producen diversos resultados, la única colisión que nos produce a  $g_6$  de nuevo se indica porque dos veces porque en una ocasión llega con un retraso, mientras que en la otra continúa su camino de manera normal. Las ecuaciones indicadas son:

1.  $g_1 \leftrightarrow g_6 = g_6 - \text{with} - \text{delay}$
2.  $g_1 \leftrightarrow g_6 = g_3^2$
3.  $g_1 \leftrightarrow g_6 = g_6$
4.  $g_1 \leftrightarrow g_6 = g_2 + g_6 + g_5 + g_3$
5.  $g_1 \leftrightarrow g_6 = g_6 + g_5 + g_3$

**Gliders:  $g_1$  y  $s_1$**

En la figura 4.25 podemos observar la colisión obtenida con el glider  $g_1$  y la estructura estacionaria  $s_1$  respectivamente.

En la figura 4.25 podemos observar que la colisión obtenida simplemente es que la estructura estacionaria  $s_1$  se mantiene mientras que el glider  $g_1$  parece que es destruido, así rotemos el glider obtendremos el mismo resultado, por lo que la lista de las colisiones es simplemente esta:

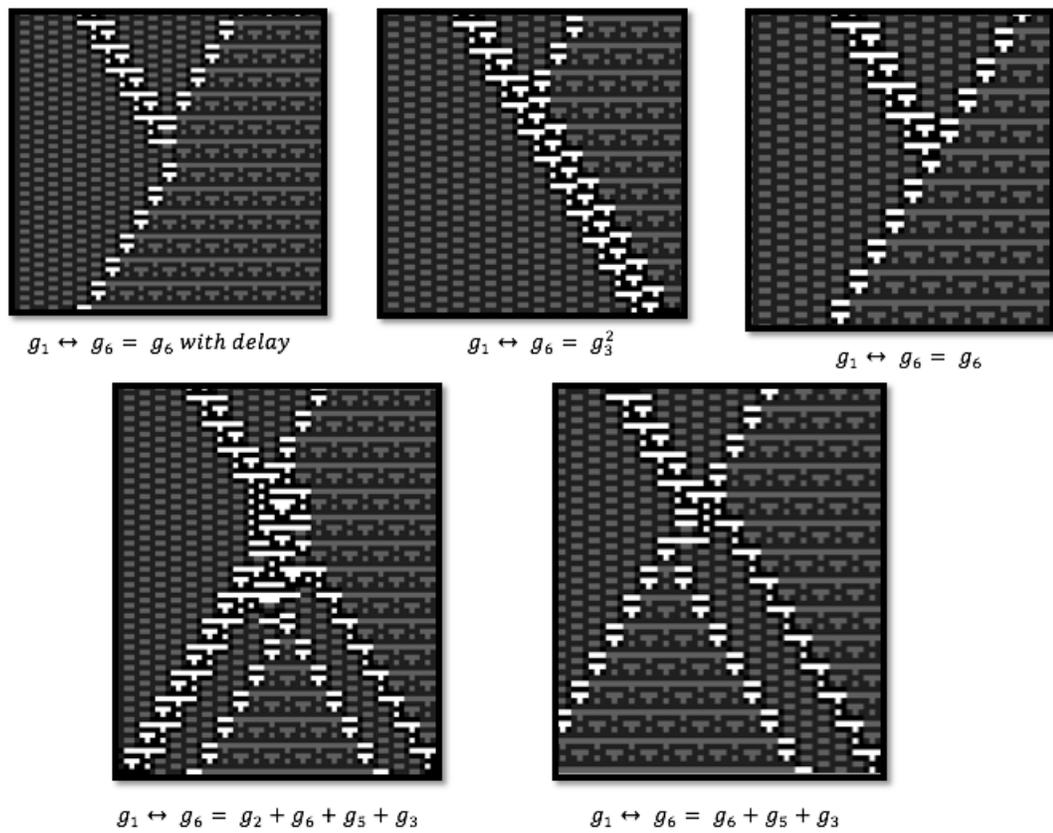
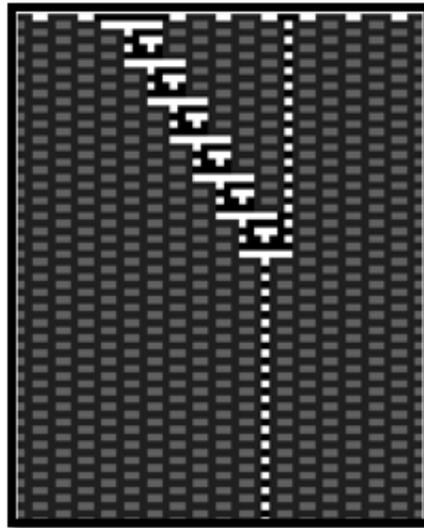


Figura 4.24: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_1$  y  $g_6$  con su respectiva ecuación



$$g_1 \leftrightarrow s_1 = s_1$$

Figura 4.25: La colisión obtenida entre  $g_1$  y  $s_1$

1.  $g_1 \leftrightarrow s_1 = s_1$

#### Gliders: $g_3$ y $g_4$

En la figura 4.26 podemos observar la colisión obtenida con el glider  $g_3$  y el glider  $g_4$  respectivamente.

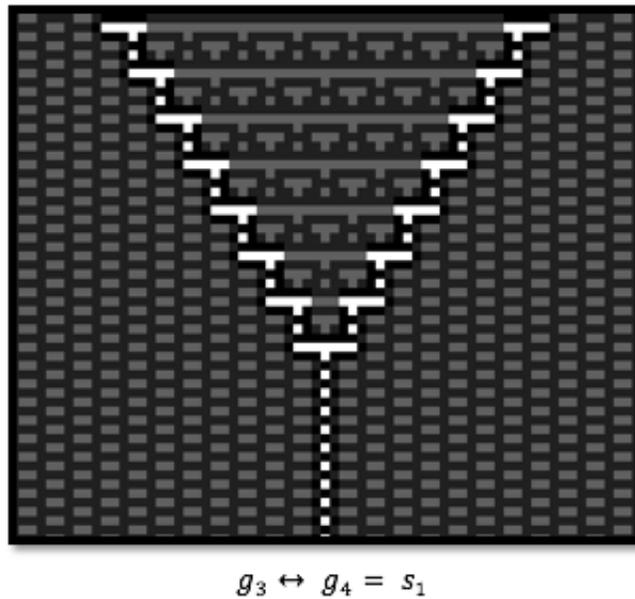
En la figura 4.26 podemos observar que la colisión obtenida genera una nueva partícula que ni siquiera participó en la colisión ( $s_1$ ). La ecuación que lo describe es la siguiente.

1.  $g_3 \leftrightarrow g_4 = s_1$

#### Gliders: $g_3$ y $s_2$

En la figura 4.27 podemos observar la colisión obtenida con el glider  $g_3$  y el still-life  $s_2$  respectivamente.

En la figura 4.27 podemos observar que la colisión obtenida genera una nueva partícula que ni siquiera participó en la colisión ( $g_6$ ). La ecuación que lo describe es la siguiente.

Figura 4.26: La colisión obtenida entre  $g_3$  y  $g_4$ 

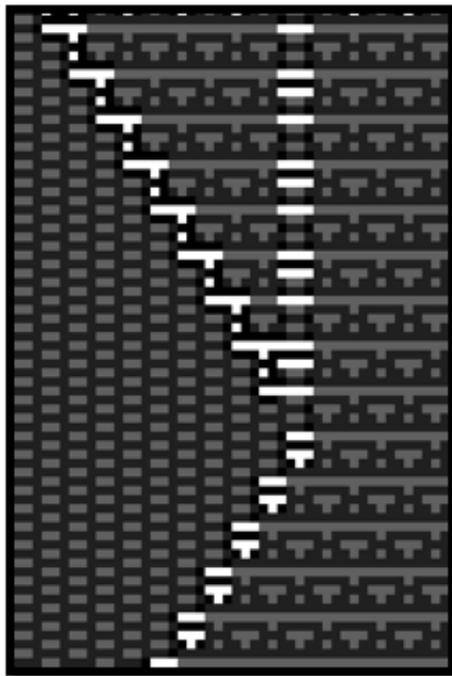
1.  $g_3 \leftrightarrow s_2 = g_6$

#### Gliders: $g_5$ y $g_2$

En la figura 4.28 podemos observar las colisiones obtenidas con el glider  $g_5$  y el glider  $g_2$  respectivamente.

Como podemos observar en la figura 4.28, dos colisiones mantienen a  $g_5$  pero una provoca un delay y la desplaza, mientras que la otra no se altera, las demás colisiones generan nuevas partículas. Las ecuaciones que definen las colisiones obtenidas son

1.  $g_5 \leftrightarrow g_2 = g_5 - \text{with} - \text{delay}$
2.  $g_5 \leftrightarrow g_2 = g_5$
3.  $g_5 \leftrightarrow g_2 = g_6 + g_5$
4.  $g_5 \leftrightarrow g_2 = g_4 + g_6 + g_5 + g_1$
5.  $g_5 \leftrightarrow g_2 = g_3^2$



$$g_3 \leftrightarrow s_2 = g_6$$

Figura 4.27: La colisión obtenida entre  $g_3$  y  $s_2$

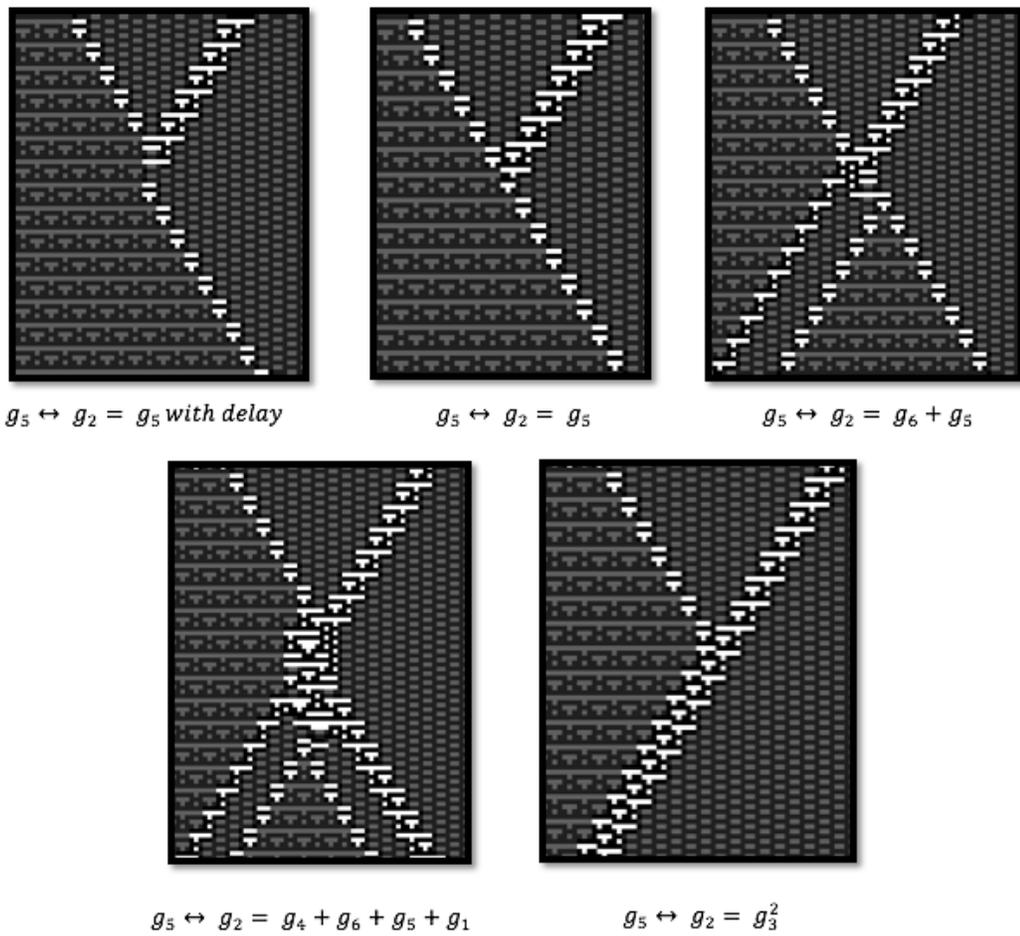


Figura 4.28: La colisión obtenida entre  $g_5$  y  $g_2$

**Gliders:  $g_5$  y  $g_6$**

En la figura 4.29 podemos observar las colisiones obtenidas con el glider  $g_5$  y el glider  $g_6$  respectivamente.

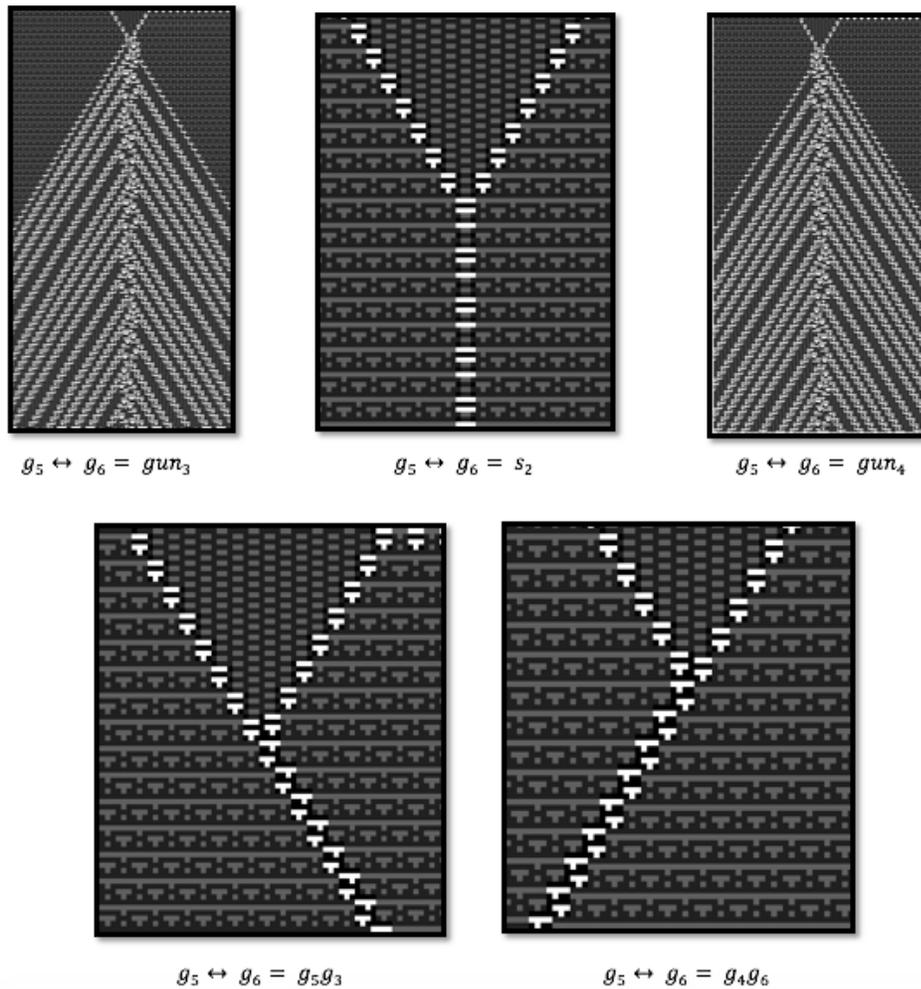


Figura 4.29: La colisión obtenida entre  $g_5$  y  $g_6$

Como podemos observar en la figura 4.29, obtenemos glider-gun de las colisiones, esto nos facilita su creación. Las ecuaciones que definen las colisiones obtenidas son:

1.  $g_5 \leftrightarrow g_6 = gun_3$
2.  $g_5 \leftrightarrow g_6 = s_2$

3.  $g_5 \leftrightarrow g_6 = gun_4$

4.  $g_5 \leftrightarrow g_6 = g_5g_3$

5.  $g_5 \leftrightarrow g_6 = g_4g_6$

**Gliders:  $g_5$  y  $s_1$**

En la figura 4.30 podemos observar la colisión obtenida con el glider  $g_5$  y el still-life  $s_1$  respectivamente.

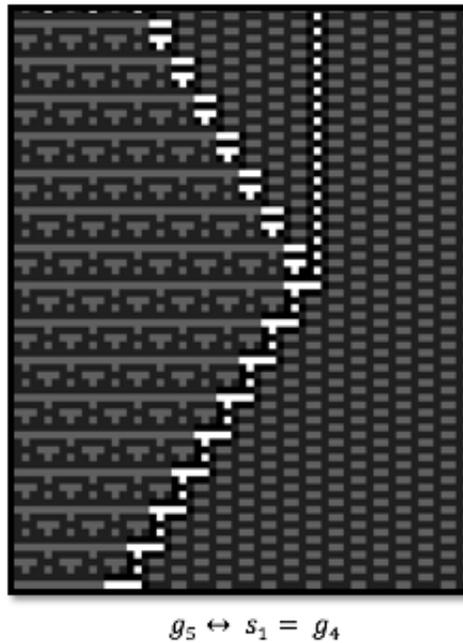


Figura 4.30: La colisión obtenida entre  $g_5$  y  $s_1$

Como podemos observar en la figura 4.30, pareciera que rebota el glider, provocando que mute a ser  $g_4$ , la ecuación que define la interacción es la siguiente:

1.  $g_5 \leftrightarrow s_1 = g_4$

**Gliders:  $s_1$  y  $g_2$**

En la figura 4.31 podemos observar la colisión obtenida con el still-life  $s_1$  y el glider  $g_2$  respectivamente.

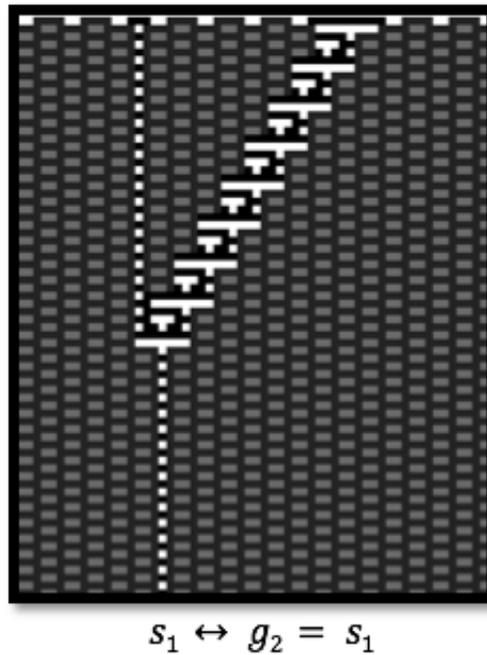


Figura 4.31: La colisión obtenida entre  $s_1$  y  $g_2$

Como podemos observar en la figura 4.31, absorbe al glider y continúa  $s_1$  un poco desplazado. La ecuación que define la interacción es la siguiente:

1.  $s_1 \leftrightarrow g_2 = s_1$

**Gliders:**  $s_1$  y  $g_6$

En la figura 4.32 podemos observar la colisión obtenida con el still-life  $s_1$  y el glider  $g_6$  respectivamente.

Como podemos observar en la figura 4.32, rebota al glider y lo muta a  $g_3$ . La ecuación que define la interacción es la siguiente:

1.  $s_1 \leftrightarrow g_6 = g_3$

**Gliders:**  $s_2$  y  $g_4$

En la figura 4.33 podemos observar la colisión obtenida con el still-life  $s_2$  y el glider  $g_4$  respectivamente.

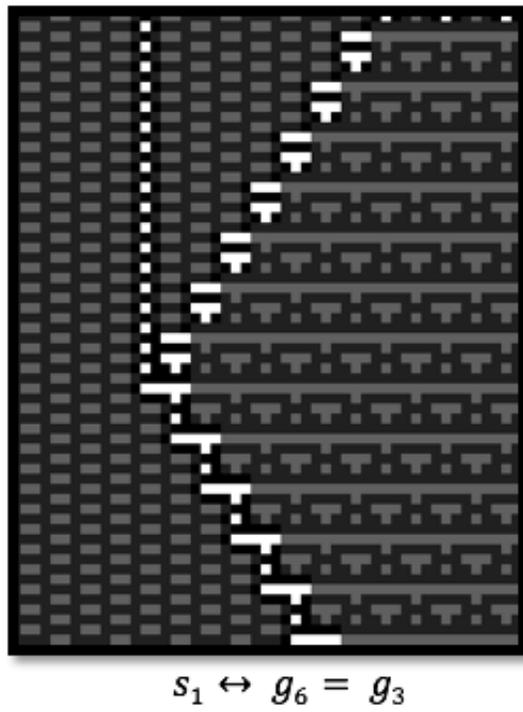
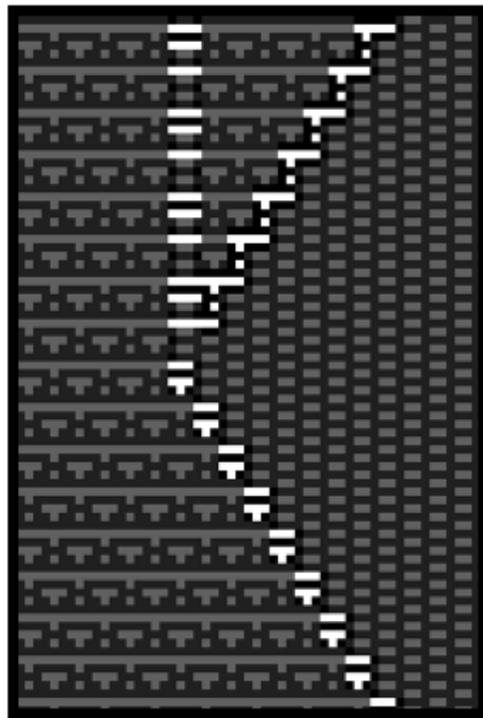


Figura 4.32: La colisión obtenida entre  $s_1$  y  $g_6$



$$s_2 \leftrightarrow g_4 = g_5$$

Figura 4.33: La colisión obtenida entre  $s_2$  y  $g_4$

Como podemos observar en la figura 4.33, rebota al glider y lo muta a  $g_5$ . La ecuación que define la interacción es la siguiente:

1.  $s_2 \leftrightarrow g_4 = g_5$

### Resumen de colisiones binarias

En la tabla 4.11 se resumen todas las ecuaciones de las colisiones que ejemplificamos. En total son 165 colisiones binarias posibles, esto se calculó empleando teoría de conjuntos(más detalles en el apéndice B).

Ecuación	Resultado
$g_1 \leftrightarrow g_2$	$\emptyset$
$g_1 \leftrightarrow g_2$	$g_1$
$g_1 \leftrightarrow g_2$	$g_2$
$g_1 \leftrightarrow g_2$	$g_3 + g_5$
$g_1 \leftrightarrow g_2$	$g_6 + g_4$
$g_1 \leftrightarrow g_6$	$g_6 - with - delay$
$g_1 \leftrightarrow g_6$	$g_3^2$
$g_1 \leftrightarrow g_6$	$g_6$
$g_1 \leftrightarrow g_6$	$g_2 + g_6 + g_5 + g_3$
$g_1 \leftrightarrow g_6$	$g_6 + g_5 + g_3$
$g_1 \leftrightarrow s_1$	$s_1$
$g_3 \leftrightarrow g_4$	$s_1$
$g_3 \leftrightarrow s_2$	$g_6$
$g_5 \leftrightarrow g_2$	$g_5 - with - delay$
$g_5 \leftrightarrow g_2$	$g_5$
$g_5 \leftrightarrow g_2$	$g_6 + g_5$
$g_5 \leftrightarrow g_2$	$g_4 + g_6 + g_5 + g_1$
$g_5 \leftrightarrow g_2$	$g_3^2$
$g_5 \leftrightarrow g_6$	$gun_3$
$g_5 \leftrightarrow g_6$	$s_2$
$g_5 \leftrightarrow g_6$	$gun_4$

Continúa en la siguiente página

Cuadro 4.11 – Continuación de la página anterior

Ecuación	Resultado
$g_5 \leftrightarrow g_6$	$g_5g_3$
$g_5 \leftrightarrow g_6$	$g_4g_6$
$g_5 \leftrightarrow s_1$	$g_4$
$s_1 \leftrightarrow g_2$	$s_1$
$s_1 \leftrightarrow g_6$	$g_3$
$s_2 \leftrightarrow g_4$	$g_5$

Cuadro 4.11: Tabla resumida de colisiones binarias

### 4.6.2. Colisiones ternarias

En esta sección describiremos las colisiones que involucran 3 estructuras dentro del espacio de evoluciones: colisiones ternarias.

#### Gliders: $2g_1$ y $g_2$

En la figura 4.34 podemos observar las colisiones obtenidas con los gliders  $2g_1$  y  $g_2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

En la figura 4.34 podemos observar 5 colisiones distintas que producen diversos resultados, las ecuaciones indicadas son:

1.  $2g_1 \leftrightarrow g_2 = 2g_1$
2.  $2g_1 \leftrightarrow g_2 = g_3 + g_5$
3.  $2g_1 \leftrightarrow g_2 = g_6 + g_4$
4.  $2g_1 \leftrightarrow g_2 = g_6 + g_4$
5.  $2g_1 \leftrightarrow g_2 = g_1$

#### Gliders: $2g_1$ y $g_6$

En la figura 4.35 podemos observar las colisiones obtenidas con los gliders  $2g_1$  y  $g_6$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

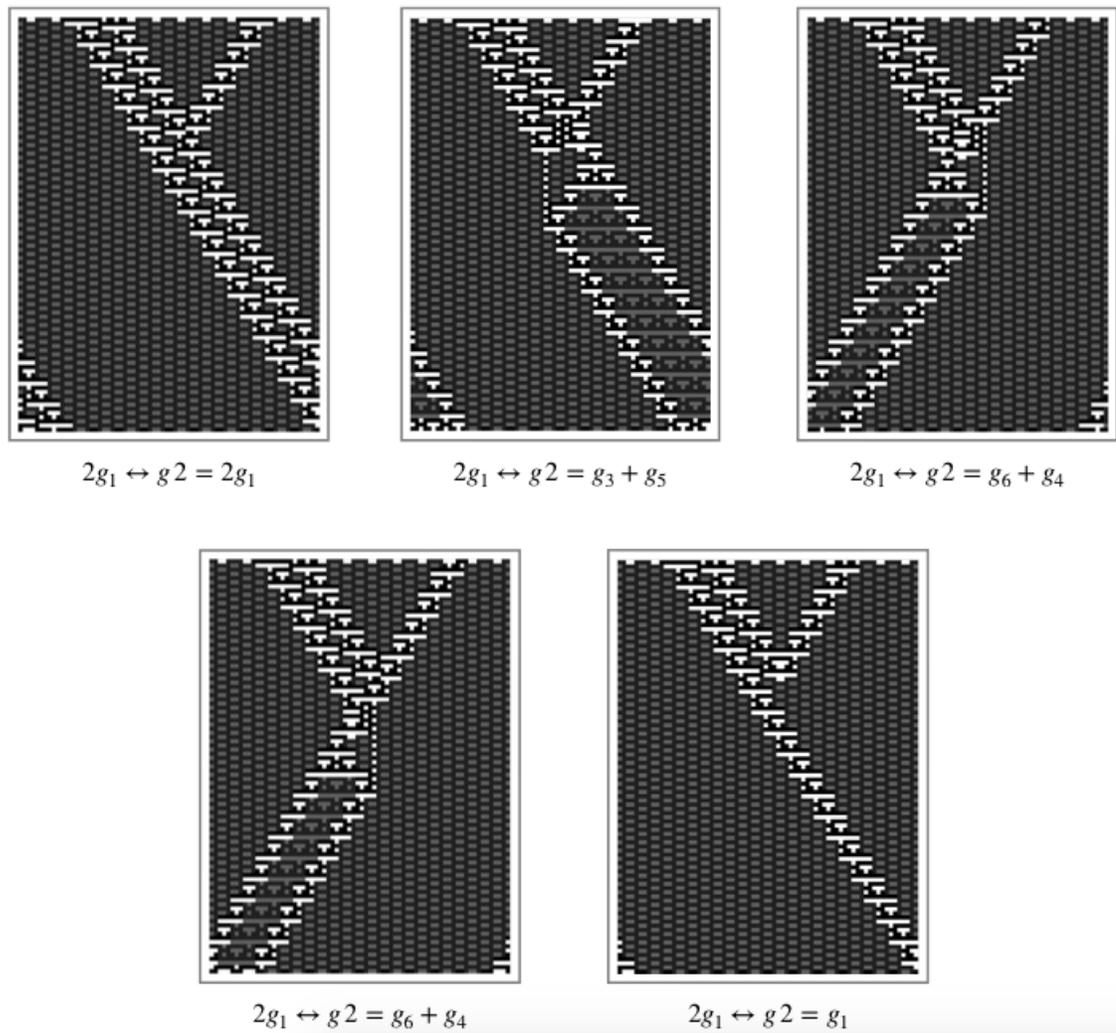


Figura 4.34: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $2g_1$  y  $g_2$  con su respectiva ecuación

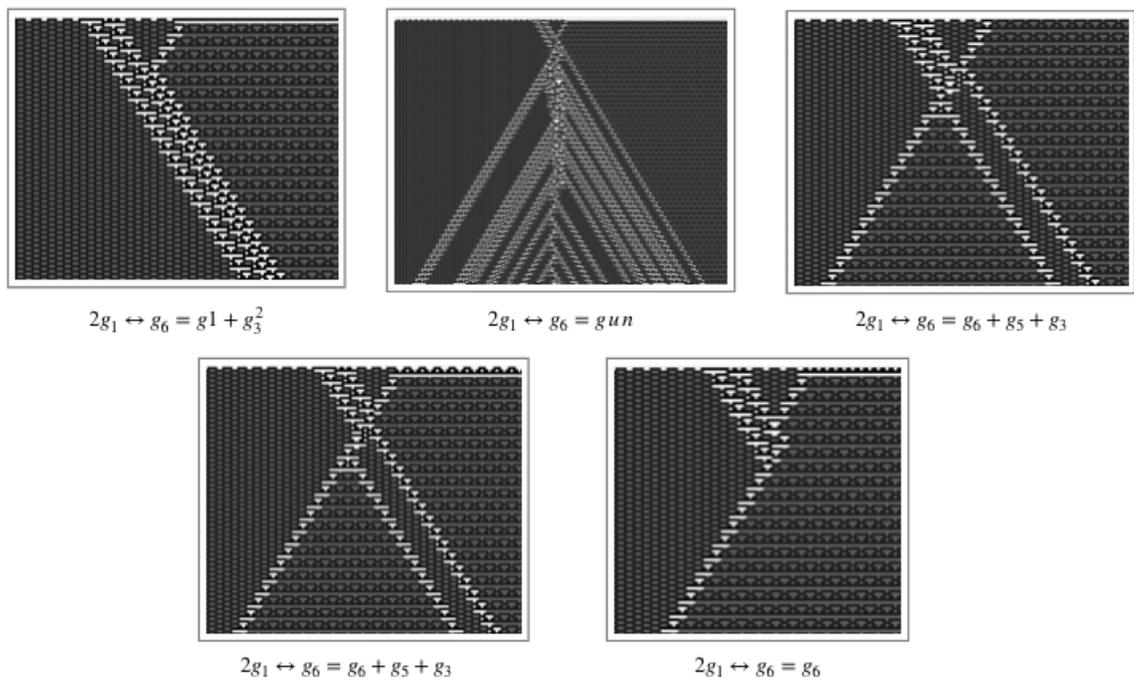


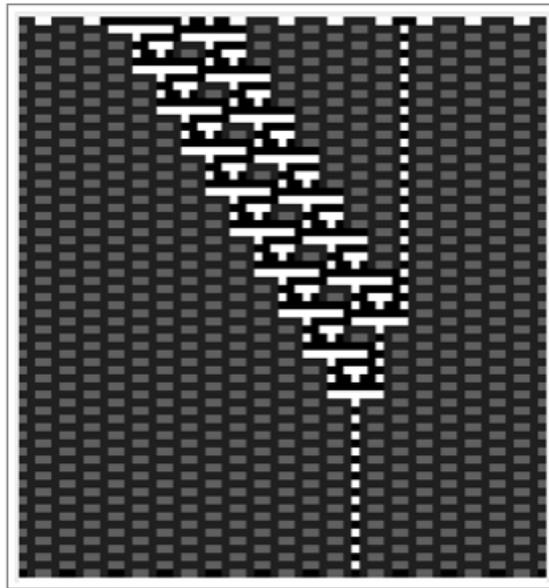
Figura 4.35: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $2g_1$  y  $g_6$  con su respectiva ecuación

En la figura 4.35 podemos observar 5 colisiones distintas que producen diversos resultados, las ecuaciones indicadas son:

1.  $2g_1 \leftrightarrow g_6 = g_1 + g_3^2$
2.  $2g_1 \leftrightarrow g_6 = gun$
3.  $2g_1 \leftrightarrow g_6 = g_6 + g_5 + g_3$
4.  $2g_1 \leftrightarrow g_6 = g_6 + g_5 + g_3$
5.  $2g_1 \leftrightarrow g_6 = g_6$

#### Gliders: $2g_1$ y $s_1$

En la figura 4.36 podemos observar las colisiones obtenidas con los gliders  $2g_1$  y el still-life  $s_1$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.



$$2g_1 \leftrightarrow s_1 = s_1$$

Figura 4.36: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $2g_1$  y  $s_1$  con su respectiva ecuación

En la figura 4.36 podemos observar solo una colisión distinta, la cual su ecuación es:

- $2g_1 \leftrightarrow s_1 = s_1$

**Gliders:**  $g_1 + g_1$  y  $g_2$

En la figura 4.37 podemos observar las colisiones obtenidas con los gliders  $g_1 + g_1$  y  $g_2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

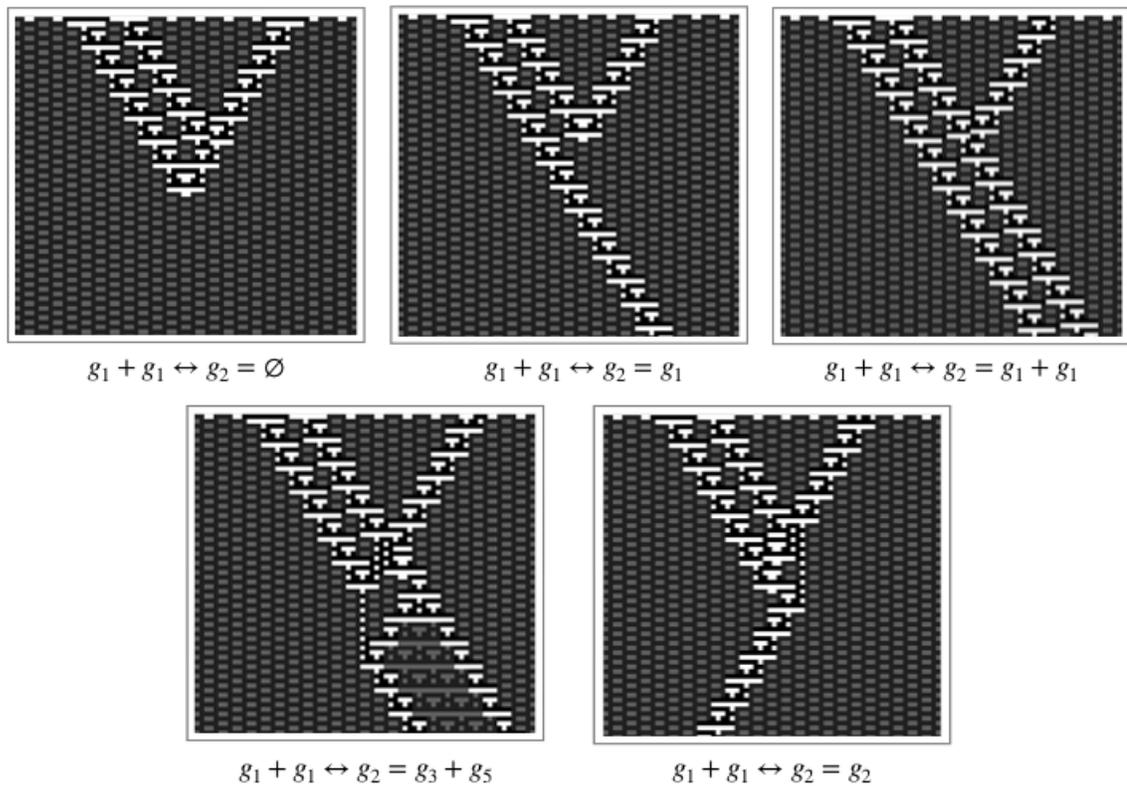


Figura 4.37: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_1 + g_1$  y  $g_2$  con su respectiva ecuación

En la figura 4.37 podemos observar 5 colisiones distintas que producen diversos resultados, las ecuaciones indicadas son:

- $g_1 + g_1 \leftrightarrow g_2 = \emptyset$

2.  $g_1 + g_1 \leftrightarrow g_2 = g_1$
3.  $g_1 + g_1 \leftrightarrow g_2 = g_1 + g_1$
4.  $g_1 + g_1 \leftrightarrow g_2 = g_3 + g_5$
5.  $g_1 + g_1 \leftrightarrow g_2 = g_2$

**Gliders:**  $g_1 + g_1$  y  $g_6$

En la figura 4.38 podemos observar las colisiones obtenidas con los gliders  $g_1 + g_1$  y  $g_6$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

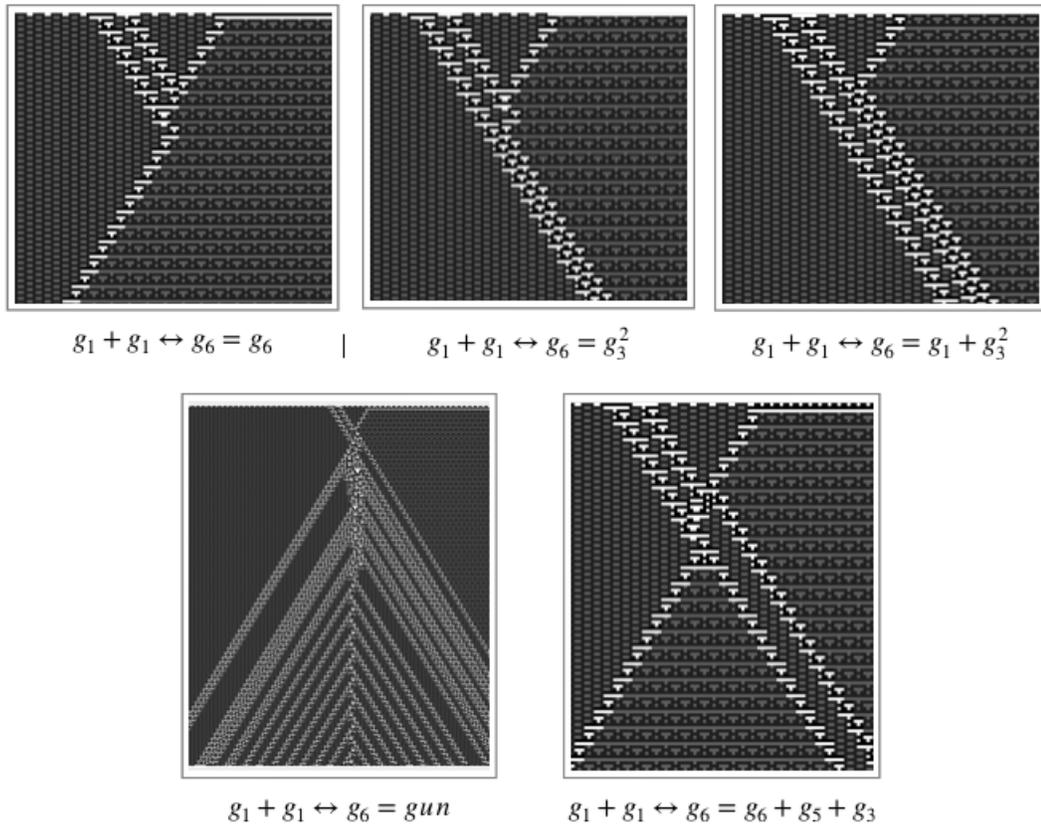


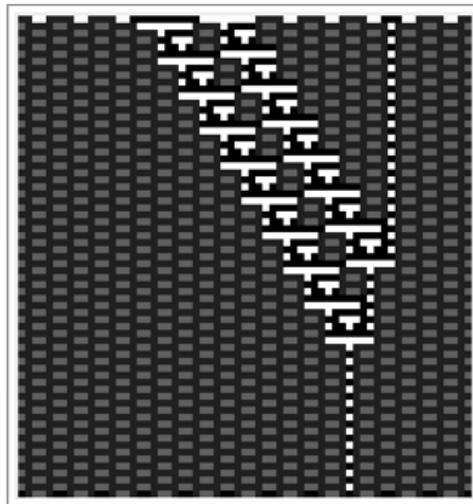
Figura 4.38: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_1 + g_1$  y  $g_6$  con su respectiva ecuación

En la figura 4.38 podemos observar 5 colisiones distintas que producen diversos resultados, las ecuaciones indicadas son:

1.  $g_1 + g_1 \leftrightarrow g_6 = g_6$
2.  $g_1 + g_1 \leftrightarrow g_6 = g_3^2$
3.  $g_1 + g_1 \leftrightarrow g_6 = g_1 + g_3^2$
4.  $g_1 + g_1 \leftrightarrow g_6 = gun$
5.  $g_1 + g_1 \leftrightarrow g_6 = g_6 + g_5 + g_3$

#### Gliders: $g_1 + g_1$ y $s_1$

En la figura 4.39 podemos observar las colisiones obtenidas con los gliders  $g_1 + g_1$  y el still-life  $s_1$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.



$$g_1 + g_1 \leftrightarrow s_1 = s_1$$

Figura 4.39: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_1 + g_1$  y  $s_1$  con su respectiva ecuación

En la figura 4.39 podemos observar solo una colisión distinta, la cual su ecuación es:

1.  $g_1 + g_1 \leftrightarrow s_1 = s_1$

**Gliders:**  $g_1$  y  $2g_2$

En la figura 4.40 podemos observar las colisiones obtenidas con los gliders  $g_1$  y  $2g_2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

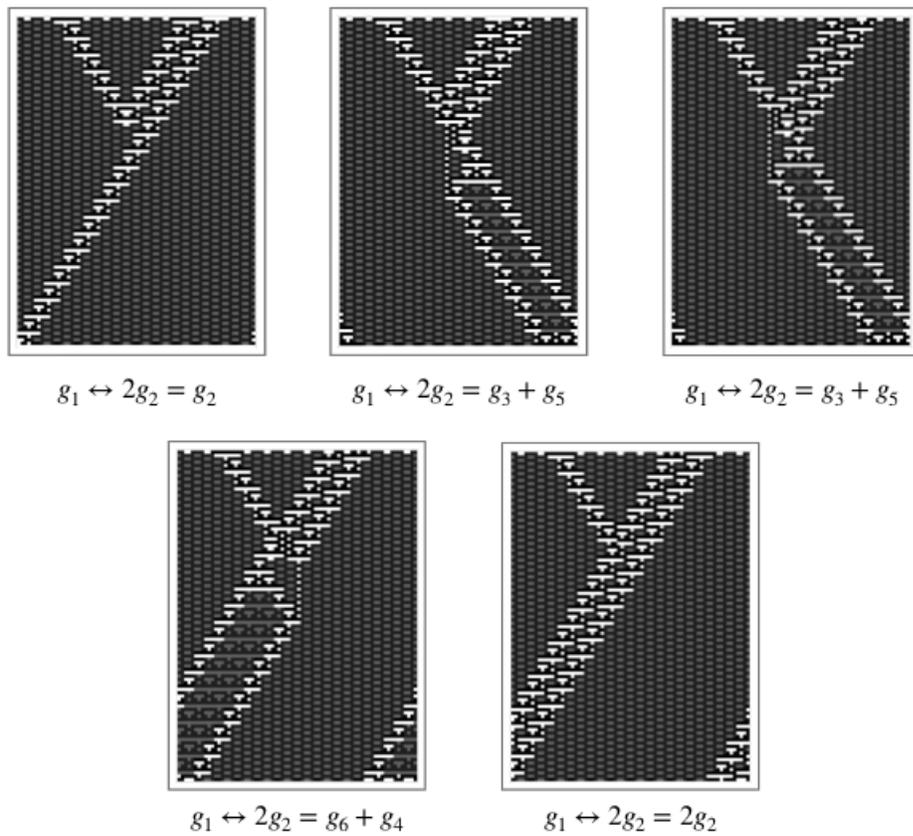


Figura 4.40: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_1$  y  $2g_2$  con su respectiva ecuación

En la figura 4.40 podemos observar 5 colisiones distintas que producen diversos resultados, las ecuaciones indicadas son:

1.  $g_1 \leftrightarrow 2g_2 = g_2$
2.  $g_1 \leftrightarrow 2g_2 = g_3 + g_5$

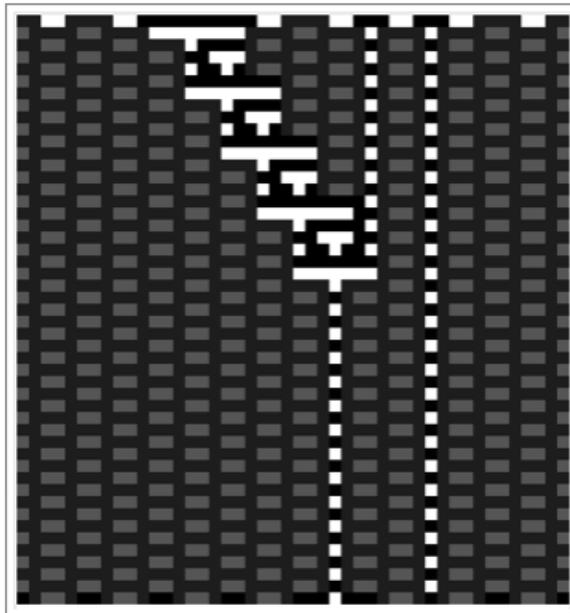
3.  $g_1 \leftrightarrow 2g_2 = g_3 + g_5$

4.  $g_1 \leftrightarrow 2g_2 = g_6 + g_4$

5.  $g_1 \leftrightarrow 2g_2 = 2g_2$

**Gliders:  $g_1$  y  $2s_1$**

En la figura 4.41 podemos observar las colisiones obtenidas con los gliders  $g_1$  y el still-life  $2s_1$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.



$g_1 \leftrightarrow 2s_1 = s_1 + s_1$

Figura 4.41: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_1$  y  $2s_1$  con su respectiva ecuación

En la figura 4.41 podemos observar solo una colisión distinta, la cual su ecuación es:

1.  $g_1 \leftrightarrow 2s_1 = s_1 + s_1$

**Gliders:**  $g_1$  y  $g_2 + g_2$

En la figura 4.42 podemos observar las colisiones obtenidas con los gliders  $g_1$  y  $g_2 + g_2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

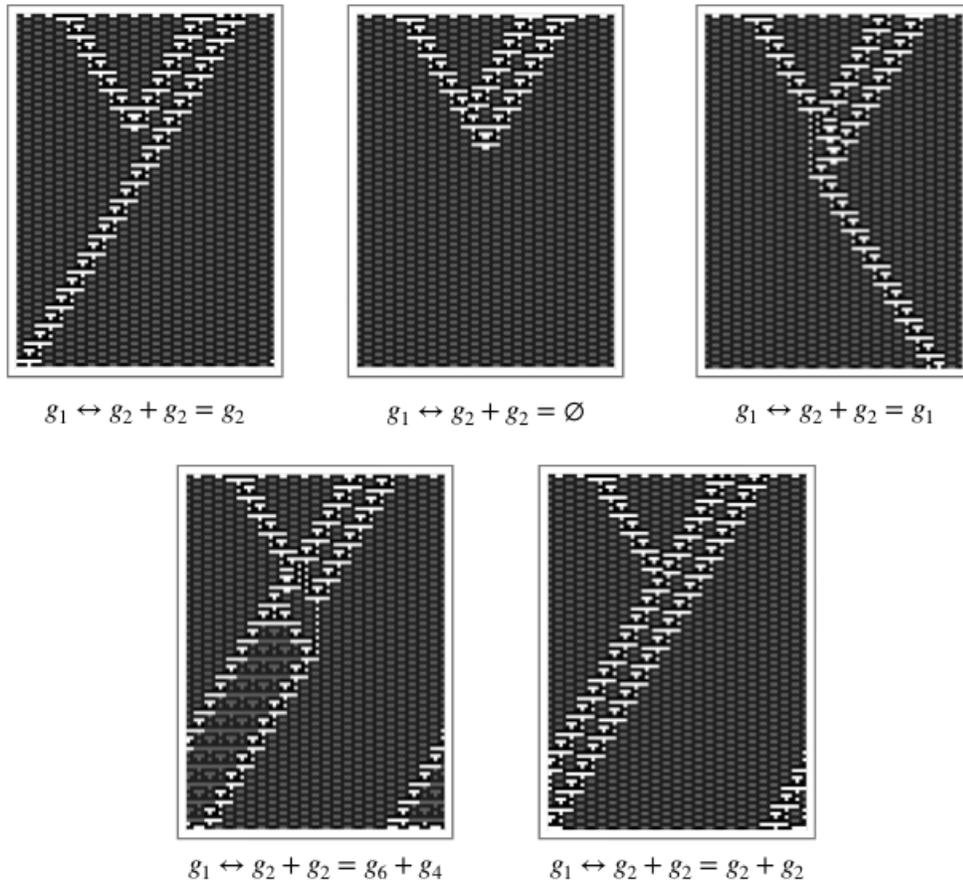


Figura 4.42: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_1$  y  $g_2 + g_2$  con su respectiva ecuación

En la figura 4.42 podemos observar 5 colisiones distintas que producen diversos resultados, las ecuaciones indicadas son:

1.  $g_1 \leftrightarrow g_2 + g_2 = g_2$
2.  $g_1 \leftrightarrow g_2 + g_2 = \emptyset$

3.  $g_1 \leftrightarrow g_2 + g_2 = g_1$
4.  $g_1 \leftrightarrow g_2 + g_2 = g_6 + g_4$
5.  $g_1 \leftrightarrow g_2 + g_2 = g_2 + g_2$

**Gliders:  $g_1$  y  $g_2^2$**

En la figura 4.43 podemos observar las colisiones obtenidas con los gliders  $g_1$  y  $g_2^2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

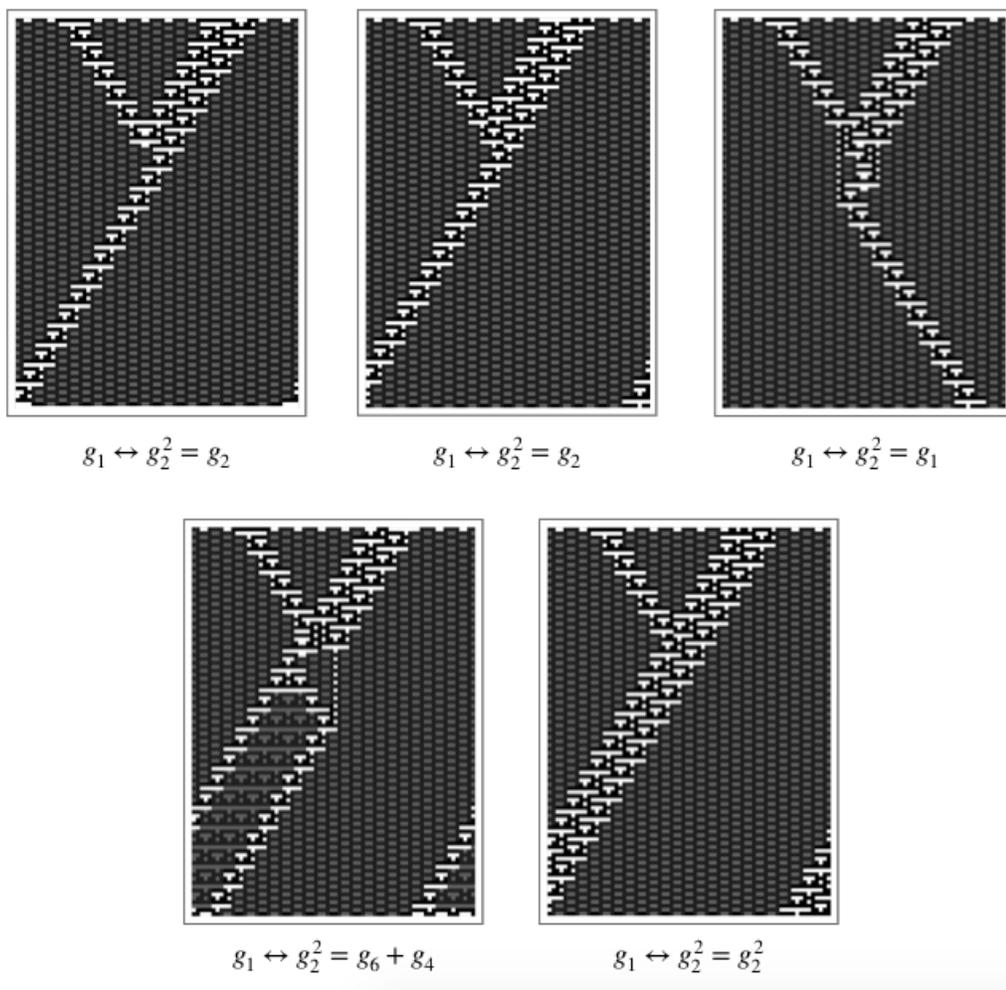


Figura 4.43: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_1$  y  $g_2^2$  con su respectiva ecuación

En la figura 4.43 podemos observar 5 colisiones distintas que producen diversos resultados, las ecuaciones indicadas son:

1.  $g_1 \leftrightarrow g_2^2 = g_2$
2.  $g_1 \leftrightarrow g_2^2 = g_2$
3.  $g_1 \leftrightarrow g_2^2 = g_1$
4.  $g_1 \leftrightarrow g_2^2 = g_6 + g_4$
5.  $g_1 \leftrightarrow g_2^2 = g_2^2$

**Gliders:**  $g_1$  y  $g_6 + g_4$

En la figura 4.44 podemos observar las colisiones obtenidas con los gliders  $g_1$  y  $g_6 + g_4$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

En la figura 4.44 podemos observar 5 colisiones distintas que producen diversos resultados, las ecuaciones indicadas son:

1.  $g_1 \leftrightarrow g_6 + g_4 = g_6 g_4$
2.  $g_1 \leftrightarrow g_6 + g_4 = g_1$
3.  $g_1 \leftrightarrow g_6 + g_4 = g_6 + g_4$
4.  $g_1 \leftrightarrow g_6 + g_4 = gun$
5.  $g_1 \leftrightarrow g_6 + g_4 = g_6 + g_4$

**Gliders:**  $g_1$  y  $g_6^2$

En la figura 4.45 podemos observar las colisiones obtenidas con los gliders  $g_1$  y  $g_6^2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

En la figura 4.45 podemos observar 5 colisiones distintas que producen diversos resultados, las ecuaciones indicadas son:

1.  $g_1 \leftrightarrow g_6^2 = g_6 + s_2$

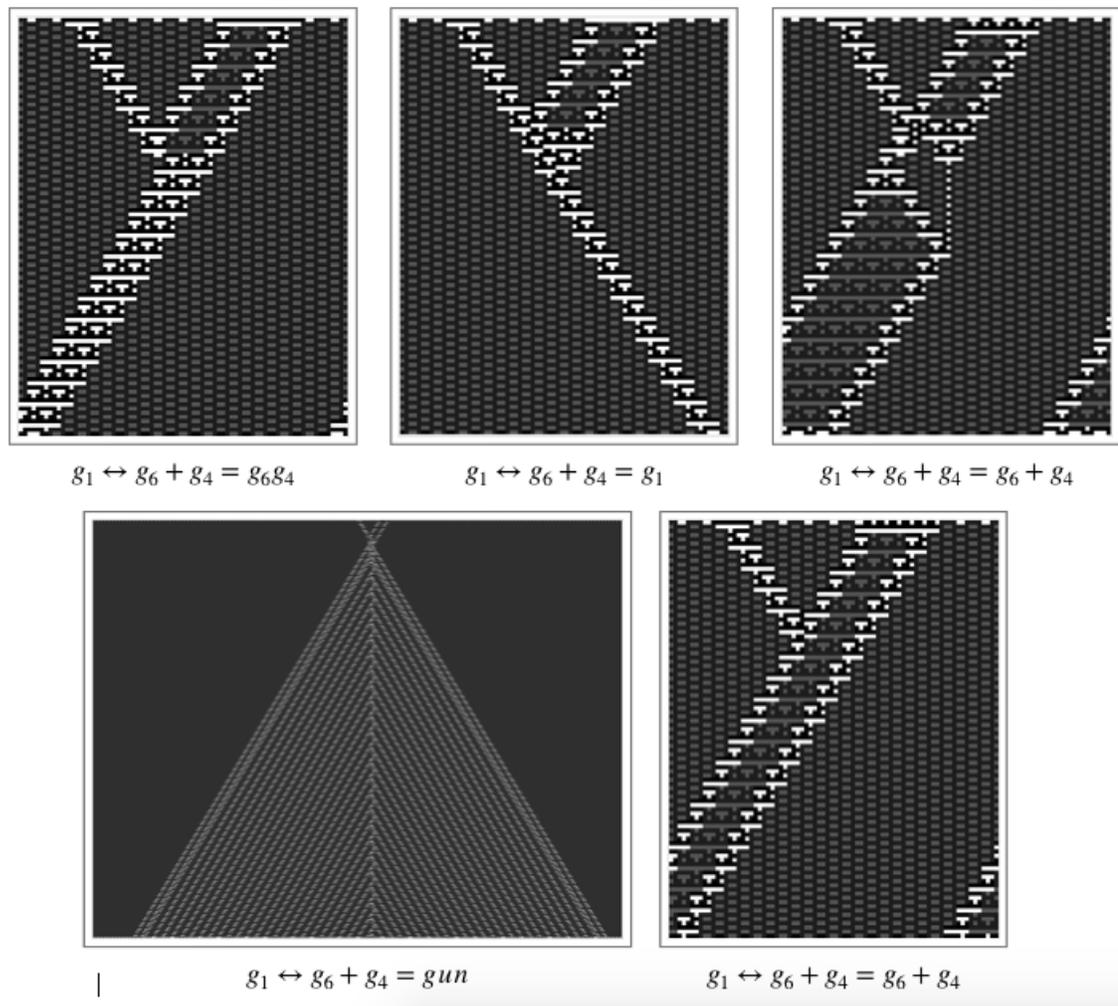


Figura 4.44: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_1$  y  $g_6 + g_4$  con su respectiva ecuación

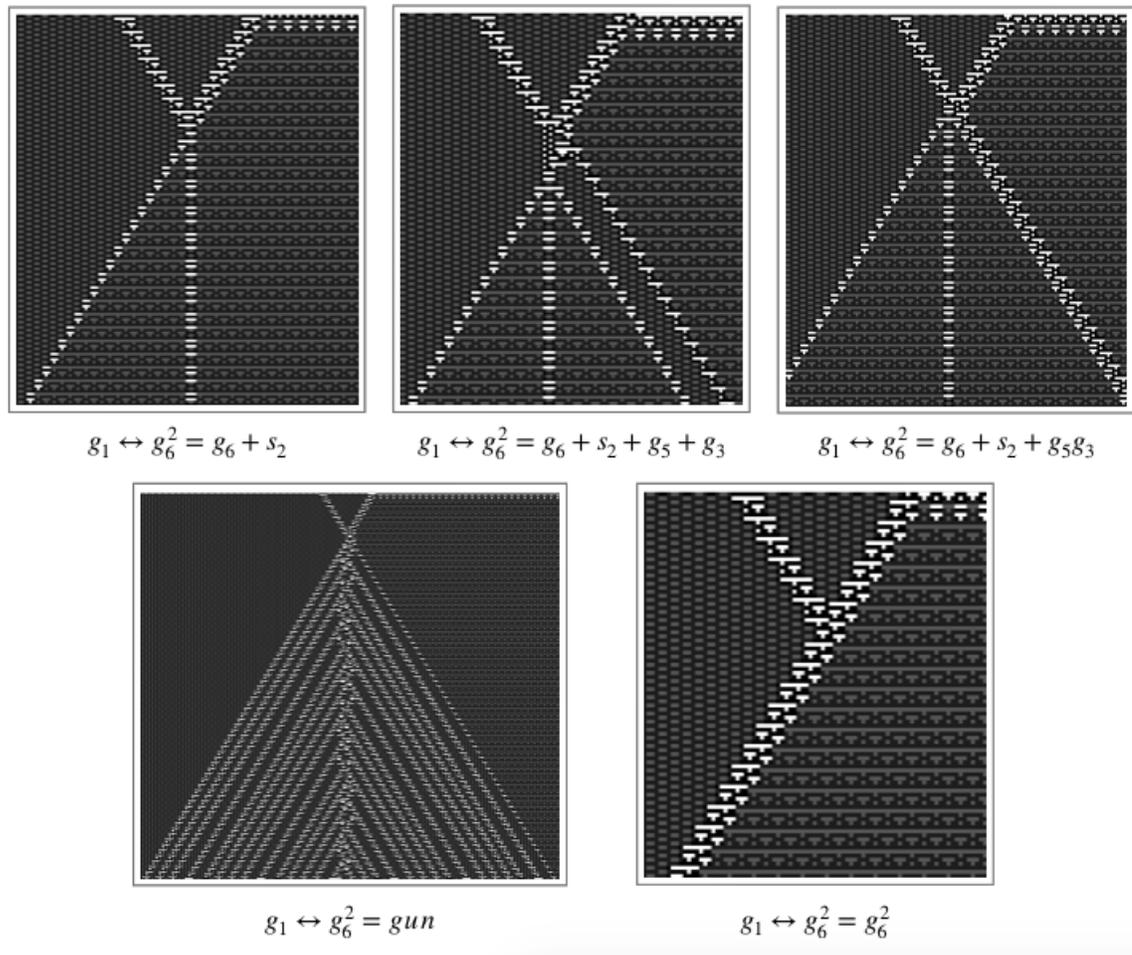


Figura 4.45: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_1$  y  $g_6^2$  con su respectiva ecuación

$$2. g_1 \leftrightarrow g_6^2 = g_6 + s_2 + g_5 + g_3$$

$$3. g_1 \leftrightarrow g_6^2 = g_6 + s_2 + g_5g_3$$

$$4. g_1 \leftrightarrow g_6^2 = gun$$

$$5. g_1 \leftrightarrow g_6^2 = g_6^2$$

### Gliders: $g_1$ y $g_6g_4$

En la figura 4.46 podemos observar las colisiones obtenidas con los gliders  $g_1$  y  $g_6g_4$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

En la figura 4.46 podemos observar 5 colisiones distintas que producen diversos resultados, las ecuaciones indicadas son:

$$1. g_1 \leftrightarrow g_6g_4 = g_2$$

$$2. g_1 \leftrightarrow g_6g_4 = g_6 + g_5$$

$$3. g_1 \leftrightarrow g_6g_4 = g_6g_4$$

$$4. g_1 \leftrightarrow g_6g_4 = g_1$$

$$5. g_1 \leftrightarrow g_6g_4 = g_6g_4$$

$$6. g_1 \leftrightarrow g_6g_4 = g_2 + g_6 + g_5 + g_1$$

$$7. g_1 \leftrightarrow g_6g_4 = g_6 + g_5$$

$$8. g_1 \leftrightarrow g_6g_4 = g_6 + g_4$$

$$9. g_1 \leftrightarrow g_6g_4 = gun$$

$$10. g_1 \leftrightarrow g_6g_4 = gun$$

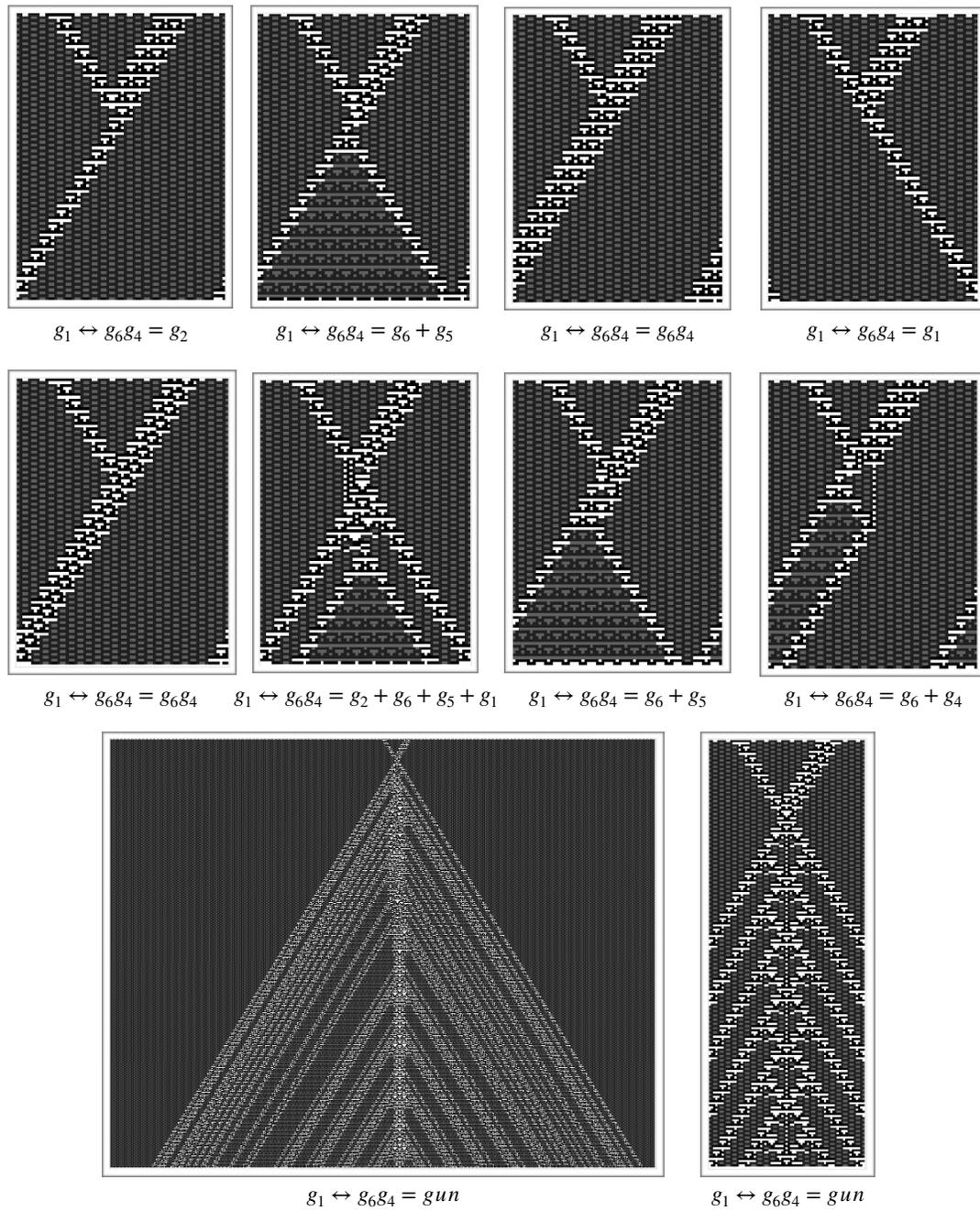
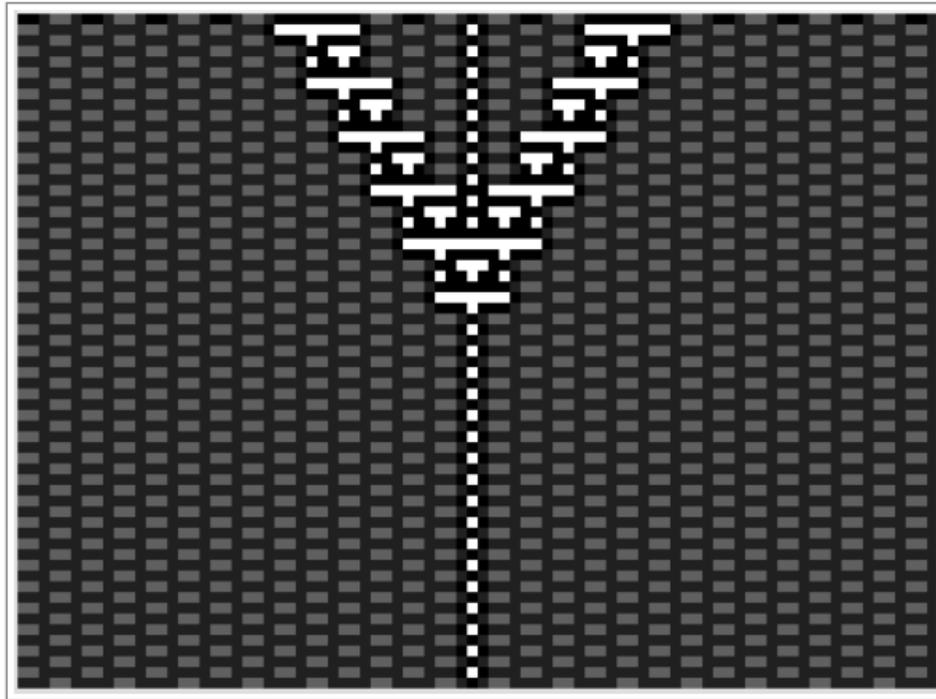


Figura 4.46: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_1$  y  $g_6g_4$  con su respectiva ecuación



|

$$g_1 \leftrightarrow s_1 \leftrightarrow g_2 = s_1$$

Figura 4.47: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_1, s_1, g_2$  con su respectiva ecuación

**Gliders:  $g_1$ ,  $s_1$  y  $g_2$**

En la figura 4.47 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_1$ ,  $s_1$  y  $g_2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

En la figura 4.47 podemos observar solo una colisión distinta, la cual su ecuación es:

1.  $g_1 \leftrightarrow s_1 \leftrightarrow g_2 = s_1$

**Gliders:  $g_1$ ,  $s_1$  y  $g_6$**

En la figura 4.48 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_1$ ,  $s_1$  y  $g_6$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

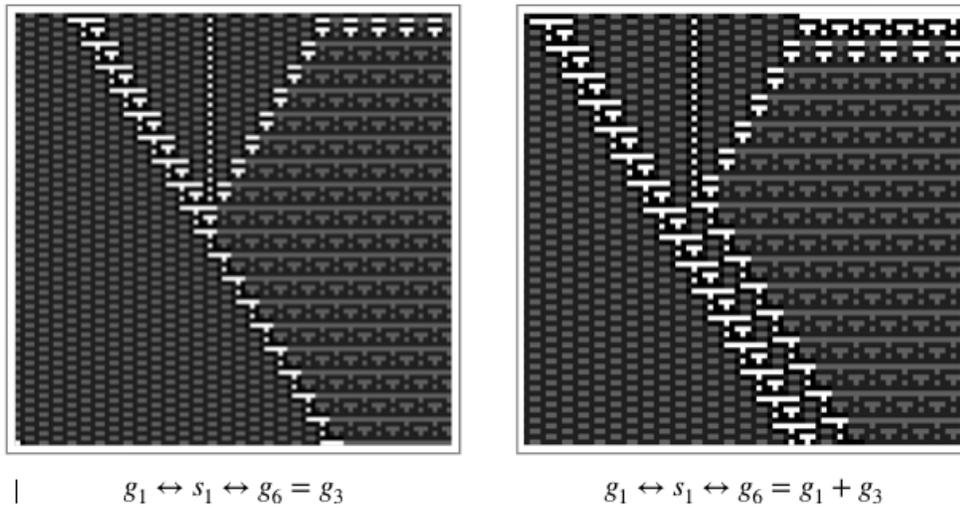


Figura 4.48: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_1$ ,  $s_1$   $g_6$  con su respectiva ecuación

En la figura 4.48 podemos observar dos colisiones distintas, las cuales sus ecuaciones son:

1.  $g_1 \leftrightarrow s_1 \leftrightarrow g_6 = g_3$
2.  $g_1 \leftrightarrow s_1 \leftrightarrow g_6 = g_1 + g_3$

**Gliders:**  $g_1^2$  y  $g_2$

En la figura 4.49 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_1^2$  y  $g_2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

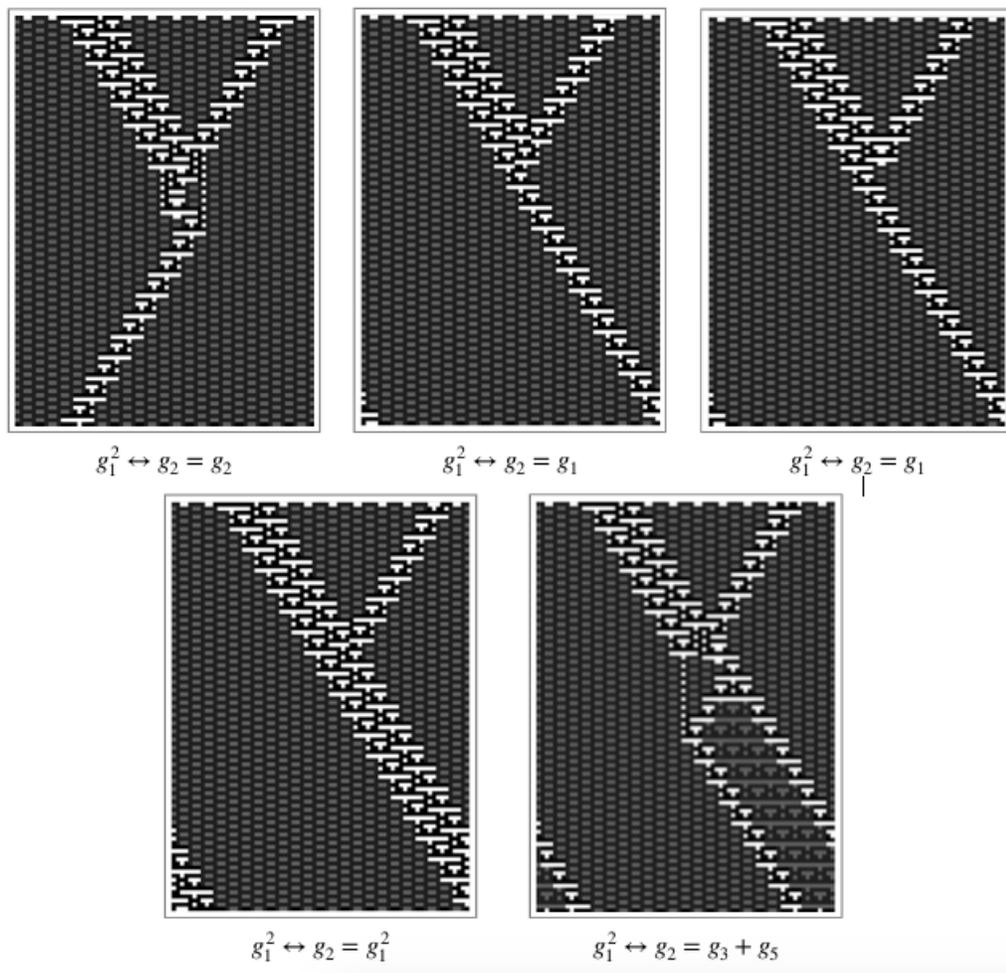


Figura 4.49: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_1^2$  y  $g_2$  con su respectiva ecuación

En la figura 4.49 podemos observar dos colisiones distintas, las cuales sus ecuaciones son:

1.  $g_1^2 \leftrightarrow g_2 = g_2$
2.  $g_1^2 \leftrightarrow g_2 = g_1$

3.  $g_1^2 \leftrightarrow g_2 = g_1$
4.  $g_1^2 \leftrightarrow g_2 = g_1^2$
5.  $g_1^2 \leftrightarrow g_2 = g_3 + g_5$

**Gliders:**  $g_1^2$  y  $g_6$

En la figura 4.50 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_1^2$  y  $g_6$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

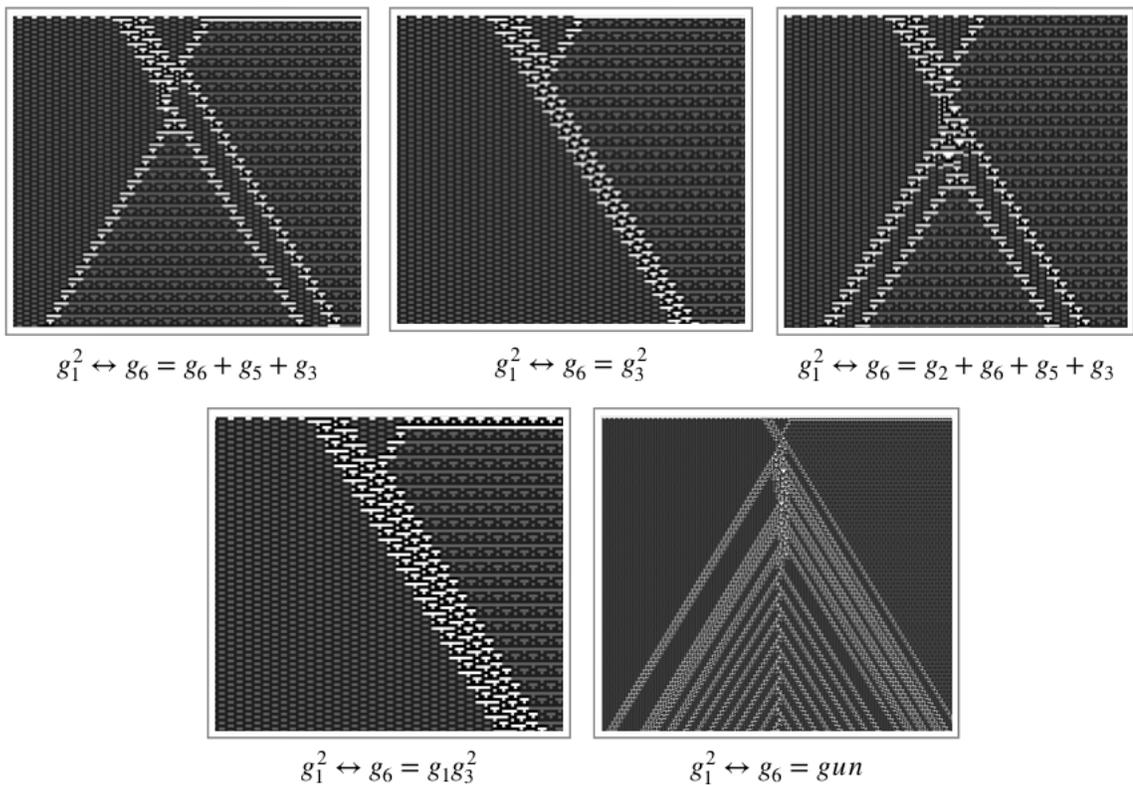


Figura 4.50: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_1^2$  y  $g_6$  con su respectiva ecuación

En la figura 4.50 podemos observar cinco colisiones distintas, las cuales sus ecuaciones son:

1.  $g_1^2 \leftrightarrow g_6 = g_6 + g_5 + g_3$

2.  $g_1^2 \leftrightarrow g_6 = g_3^2$
3.  $g_1^2 \leftrightarrow g_6 = g_2 + g_6 + g_5 + g_3$
4.  $g_1^2 \leftrightarrow g_6 = g_1 g_3^2$
5.  $g_1^2 \leftrightarrow g_6 = gun$

**Gliders:**  $g_1^2$  y  $s_1$

En la figura 4.51 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_1^2$  y  $s_1$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

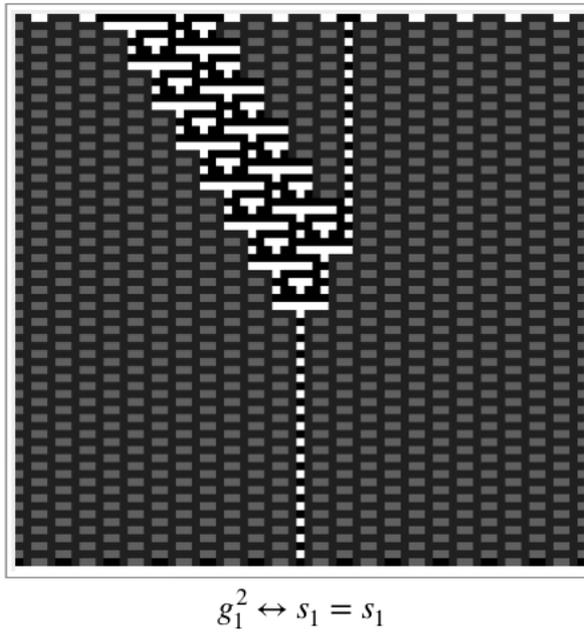


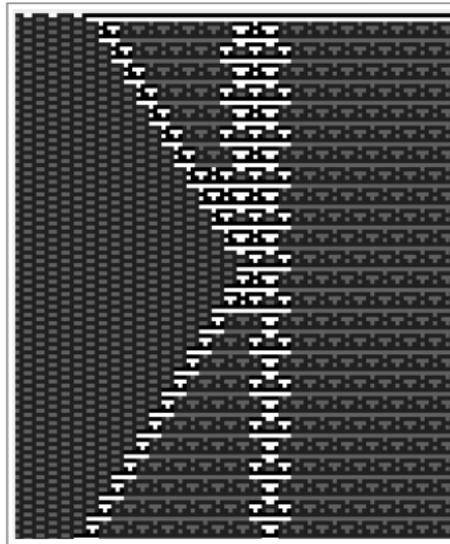
Figura 4.51: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_1^2$  y  $s_1$  con su respectiva ecuación

En la figura 4.51 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:

1.  $g_1^2 \leftrightarrow s_1 = s_1$

**Gliders:  $g_3$  y  $2s_2$** 

En la figura 4.52 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_3$  y  $2s_2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.



$$g_3 \leftrightarrow 2s_2 = g_6 + s_2$$

Figura 4.52: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_3$  y  $2s_2$  con su respectiva ecuación

En la figura 4.52 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:

1.  $g_3 \leftrightarrow 2s_2 = g_6 + s_2$

**Gliders:  $g_3$ ,  $g_4$  y  $g_2$** 

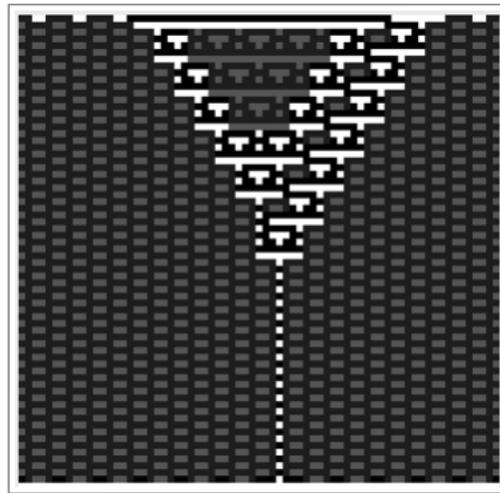
En la figura 4.53 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_3$ ,  $g_4$  y  $g_2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

En la figura 4.53 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:

1.  $g_3 \leftrightarrow g_4 + g_2 = s_1$

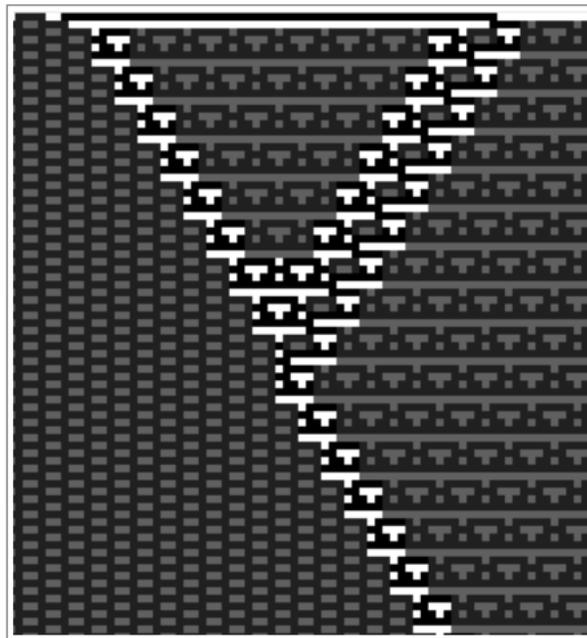
**Gliders:  $g_3$ ,  $g_4$  y  $g_6$** 

En la figura 4.54 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_3$ ,  $g_4$  y  $g_6$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.



$$g_3 \leftrightarrow g_4 + g_2 = s_1$$

Figura 4.53: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_3$ ,  $g_4$  y  $g_2$  con su respectiva ecuación



$$g_3 \leftrightarrow g_4 + g_6 = g_3$$

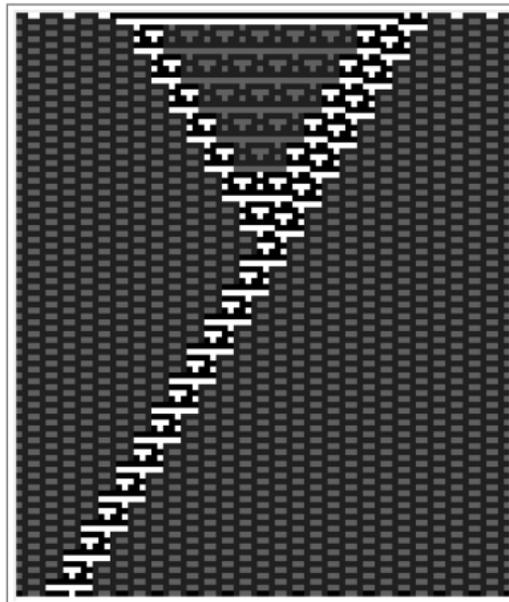
Figura 4.54: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_3$ ,  $g_4$  y  $g_6$  con su respectiva ecuación

En la figura 4.54 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:

1.  $g_3 \leftrightarrow g_4 + g_6 = g_3$

**Gliders:**  $g_3$  y  $g_4^2$

En la figura 4.55 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_3$  y  $g_4^2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.



$$g_3 \leftrightarrow g_4^2 = g_2$$

Figura 4.55: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_3$  y  $g_4^2$  con su respectiva ecuación

En la figura 4.55 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:

1.  $g_3 \leftrightarrow g_4^2 = g_2$

**Gliders:**  $g_3$  y  $g_4g_2$

En la figura 4.56 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_3$  y  $g_4g_2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

En la figura 4.56 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:

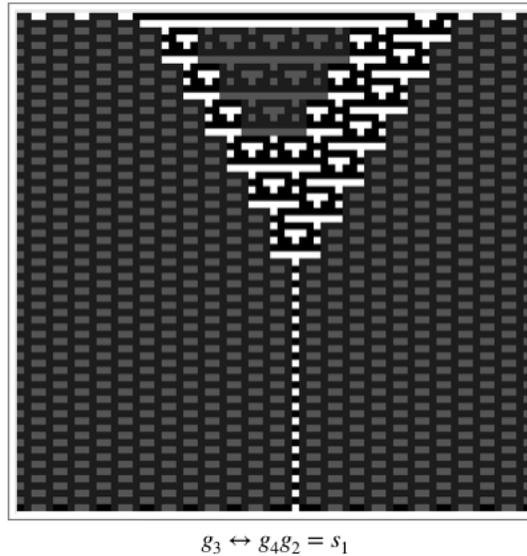


Figura 4.56: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_3$  y  $g_4g_2$  con su respectiva ecuación

1.  $g_3 \leftrightarrow g_4g_2 = s_1$

**Gliders:**  $g_3$ ,  $s_2$  y  $s_2$

En la figura 4.57 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_3$ ,  $s_2$  y  $s_2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

En la figura 4.57 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:

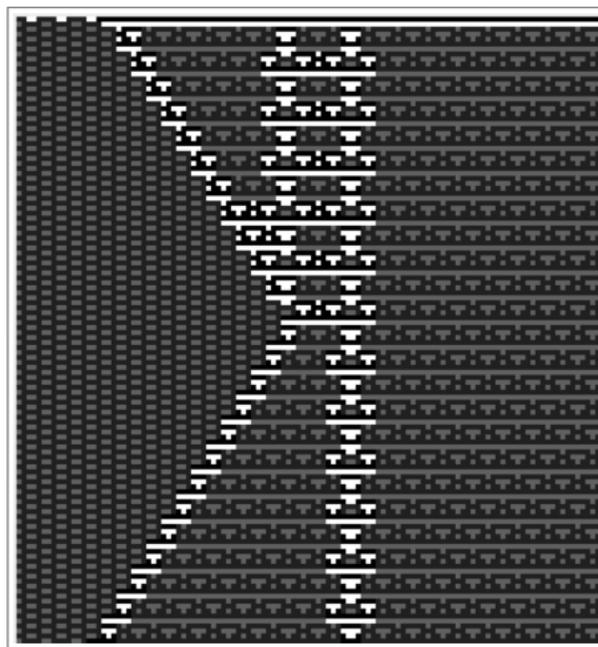
1.  $g_3 \leftrightarrow s_2 + s_2 = g_6 + s_2$

**Gliders:**  $g_3$ ,  $s_2$  y  $g_4$

En la figura 4.58 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_3$ ,  $s_2$  y  $g_4$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

En la figura 4.58 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:

1.  $g_3 \leftrightarrow s_2 \leftrightarrow g_4 = g_6 + g_4$
2.  $g_3 \leftrightarrow s_2 \leftrightarrow g_4 = g_2$



$$g_3 \leftrightarrow s_2 + s_2 = g_6 + s_2$$

Figura 4.57: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_3$ ,  $s_2$  y  $s_2$  con su respectiva ecuación

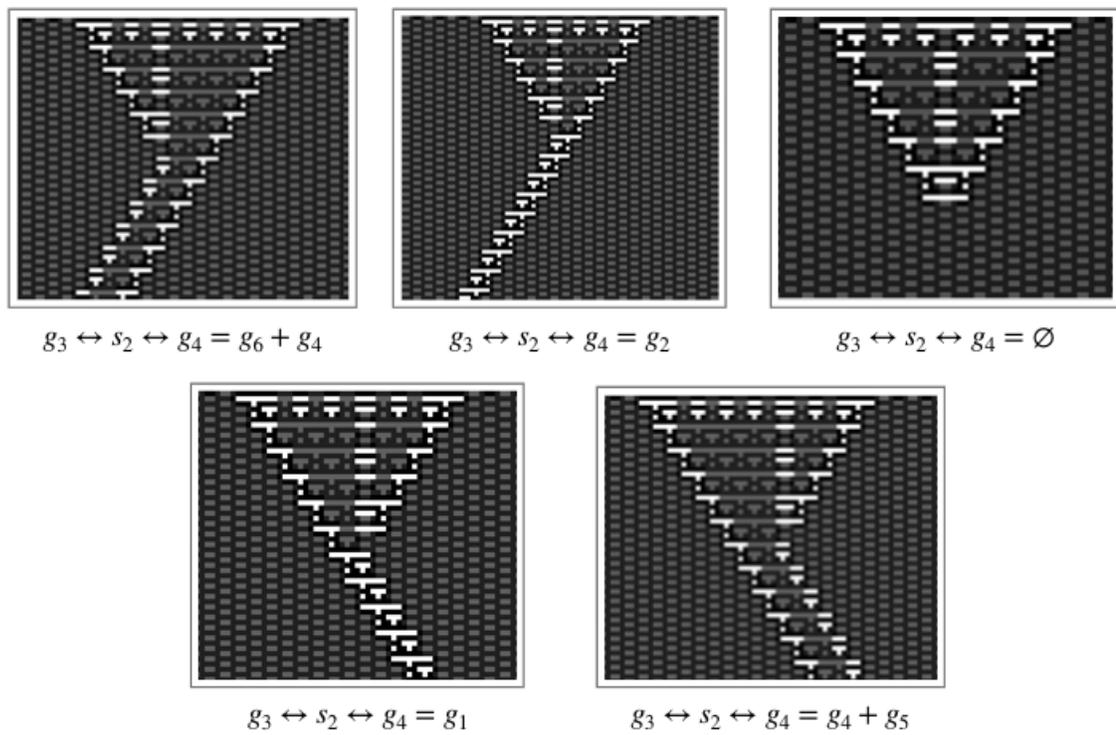
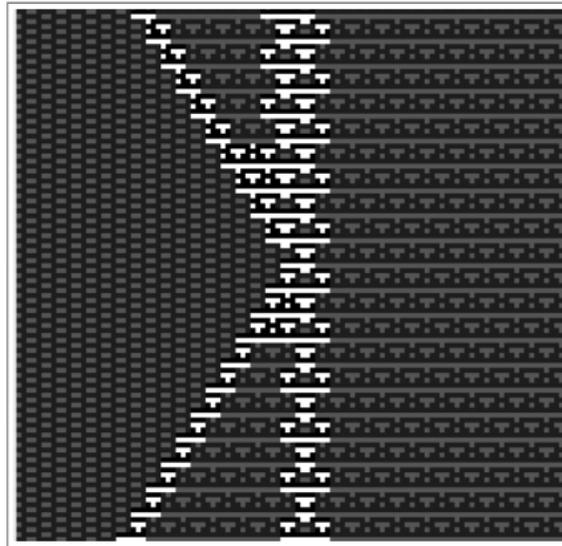


Figura 4.58: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_3$ ,  $s_2$  y  $g_4$  con su respectiva ecuación

3.  $g_3 \leftrightarrow s_2 \leftrightarrow g_4 = \emptyset$
4.  $g_3 \leftrightarrow s_2 \leftrightarrow g_4 = g_1$
5.  $g_3 \leftrightarrow s_2 \leftrightarrow g_4 = g_4 + g_5$

**Gliders:  $g_3$  y  $s_2^2$**

En la figura 4.59 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_3$  y  $s_2^2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.



$$g_3 \leftrightarrow s_2^2 = g_6 + s_2$$

Figura 4.59: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_3$  y  $s_2^2$  con su respectiva ecuación

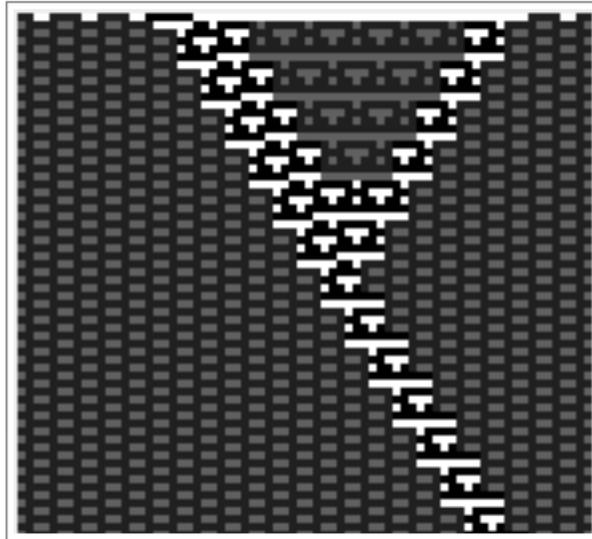
En la figura 4.59 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:

1.  $g_3 \leftrightarrow s_2^2 = g_6 + s_2$

**Gliders:  $g_3^2$  y  $g_4$**

En la figura 4.60 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_3^2$  y  $g_4$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

En la figura 4.60 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:



$$g_3^2 \leftrightarrow g_4 = g_1$$

Figura 4.60: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_3^2$  y  $g_4$  con su respectiva ecuación

1.  $g_3^2 \leftrightarrow g_4 = g_1$

**Gliders:**  $g_3^2$  y  $s_2$

En la figura 4.61 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_3^2$  y  $s_2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

En la figura 4.61 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:

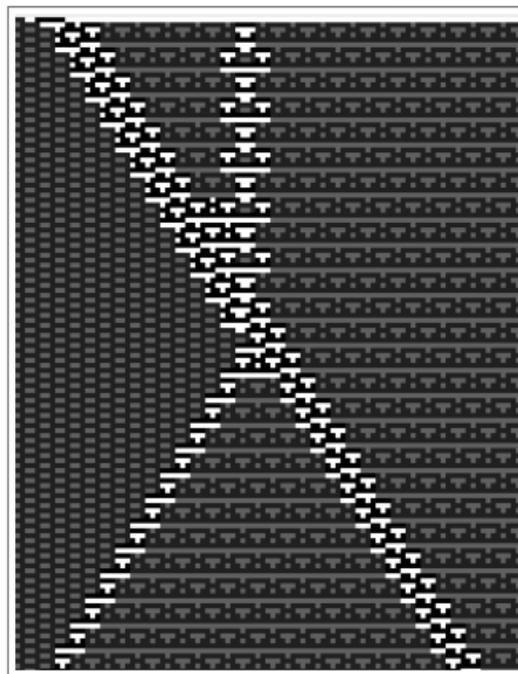
1.  $g_3^2 \leftrightarrow s_2 = g_6 + g_5g_3$

**Gliders:**  $g_5$  y  $2g_2$

En la figura 4.62 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_5$  y  $2g_2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

En la figura 4.62 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:

1.  $g_5 \leftrightarrow 2g_2 = g_5$
2.  $g_5 \leftrightarrow 2g_2 = g_4 + g_6 + g_5$



$$g_3^2 \leftrightarrow s_2 = g_6 + g_5g_3$$

Figura 4.61: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_3^2$  y  $s_2$  con su respectiva ecuación

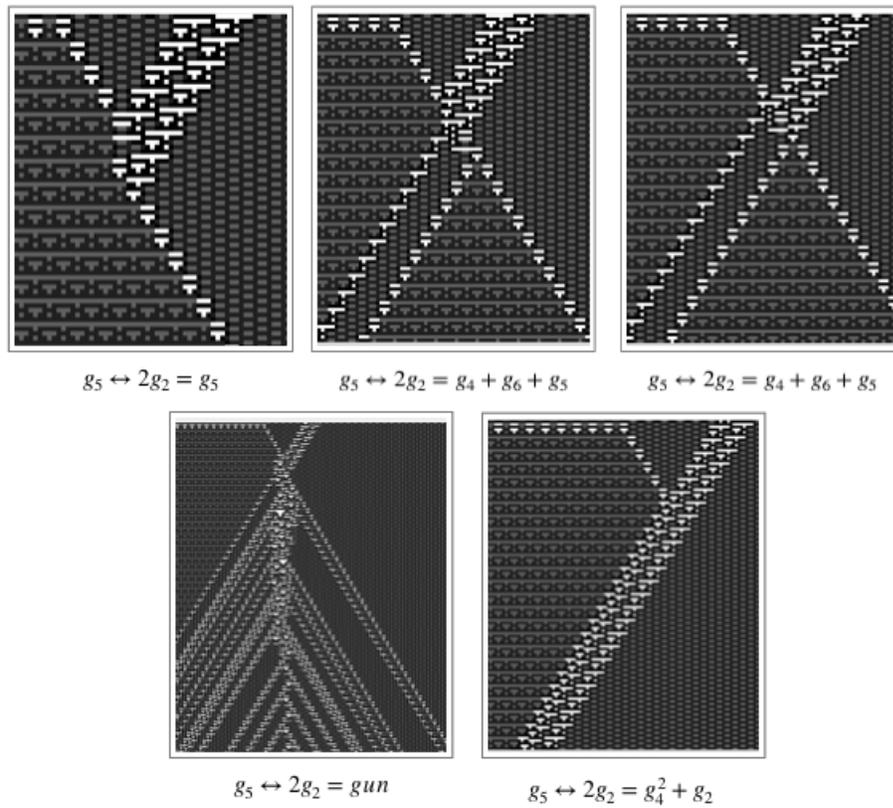


Figura 4.62: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_5$  y  $2g_2$  con su respectiva ecuación

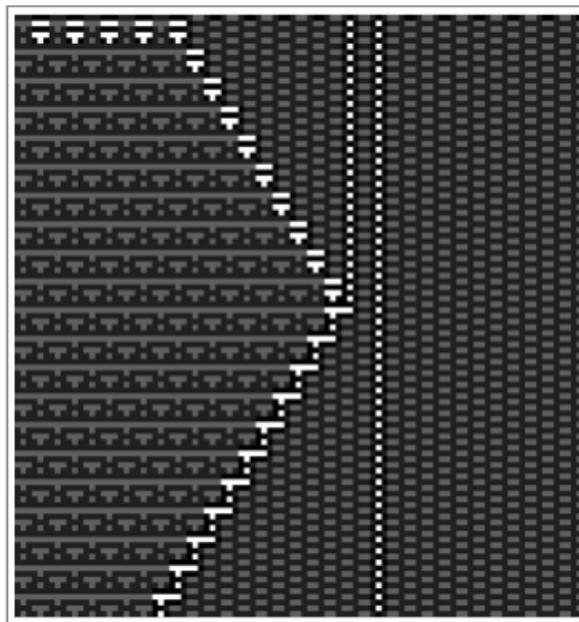
3.  $g_5 \leftrightarrow 2g_2 = g_4 + g_6 + g_5$

4.  $g_5 \leftrightarrow 2g_2 = gun$

5.  $g_5 \leftrightarrow 2g_2 = g_4^2 + g_2$

**Gliders:**  $g_5$  y  $2s_1$

En la figura 4.63 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_5$  y  $2s_1$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.



$g_5 \leftrightarrow 2s_1 = s_1$

Figura 4.63: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_5$  y  $2s_1$  con su respectiva ecuación

En la figura 4.63 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:

1.  $g_5 \leftrightarrow 2s_1 = s_1$

**Gliders:  $g_5$ ,  $g_2$  y  $g_2$**

En la figura 4.64 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_5$  y  $g_2 + g_2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

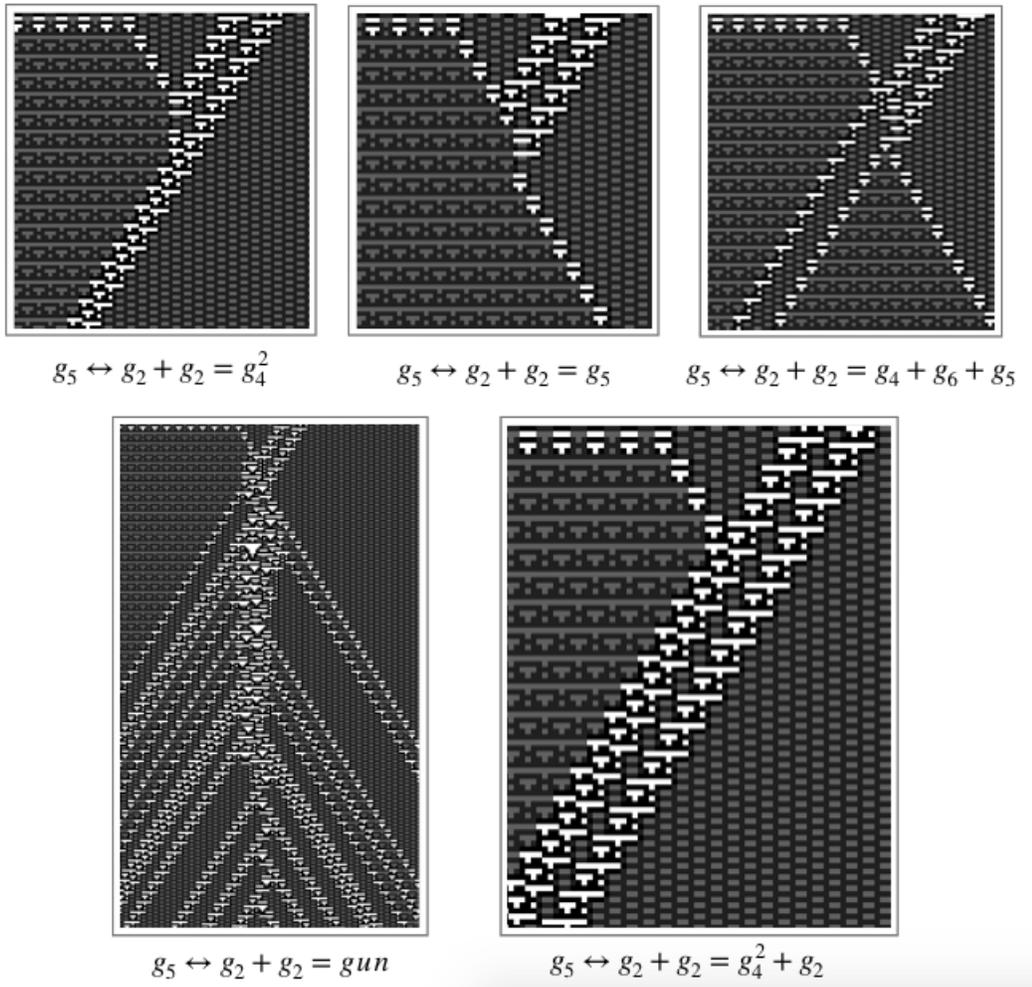


Figura 4.64: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_5$  y  $g_2 + g_2$  con su respectiva ecuación

En la figura 4.64 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:

1.  $g_5 \leftrightarrow g_2 + g_2 = g_4^2$
2.  $g_5 \leftrightarrow g_2 + g_2 = g_5$

3.  $g_5 \leftrightarrow g_2 + g_2 = g_4 + g_6 + g_5$

4.  $g_5 \leftrightarrow g_2 + g_2 = gun$

5.  $g_5 \leftrightarrow g_2 + g_2 = g_4^2 + g_2$

**Gliders:  $g_5$  y  $g_2^2$**

En la figura 4.65 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_5$  y  $g_2^2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

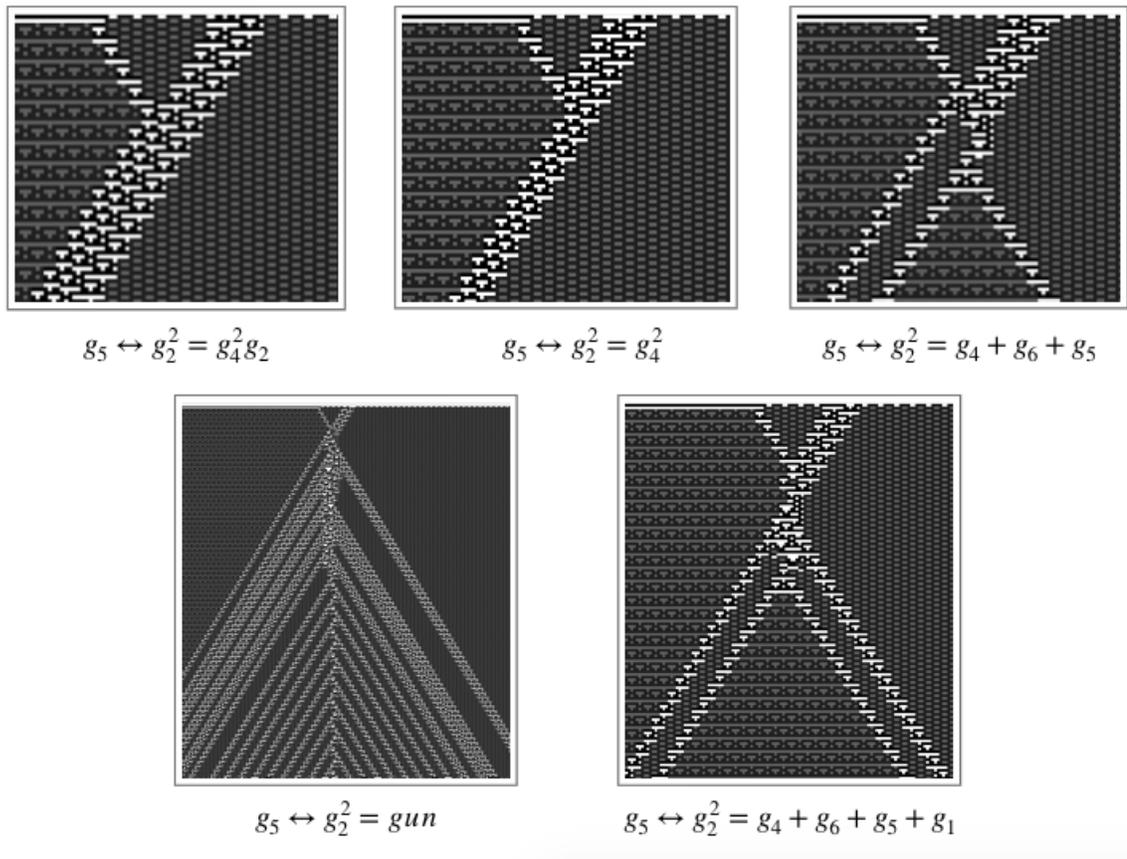


Figura 4.65: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_5$  y  $g_2^2$  con su respectiva ecuación

En la figura 4.65 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:

1.  $g_5 \leftrightarrow g_2^2 = g_4^2 g_2$

2.  $g_5 \leftrightarrow g_2^2 = g_4^2$
3.  $g_5 \leftrightarrow g_2^2 = g_4 + g_6 + g_5$
4.  $g_5 \leftrightarrow g_2^2 = gun$
5.  $g_5 \leftrightarrow g_2^2 = g_4 + g_6 + g_5 + g_1$

**Gliders:**  $g_5$  y  $g_6 + g_4$ 

En la figura 4.66 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_5$  y  $g_6 + g_4$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

En la figura 4.66 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:

1.  $g_5 \leftrightarrow g_6 + g_4 = g_5$
2.  $g_5 \leftrightarrow g_6 + g_4 = g_5$
3.  $g_5 \leftrightarrow g_6 + g_4 = g_4g_6 + g_4$
4.  $g_5 \leftrightarrow g_6 + g_4 = chaos$
5.  $g_5 \leftrightarrow g_6 + g_4 = gun$

**Gliders:**  $g_5$  y  $g_6^2$ 

En la figura 4.67 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_5$  y  $g_6^2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

En la figura 4.67 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:

1.  $g_5 \leftrightarrow g_6^2 = g_4g_6 + s_2$
2.  $g_5 \leftrightarrow g_6^2 = g_4 + g_6 + 2s_2 + g_5 + g_1g_3$
3.  $g_5 \leftrightarrow g_6^2 = g_4g_6^2$
4.  $g_5 \leftrightarrow g_6^2 = g_4 + g_6 + 2s_2 + g_5 + g_3$
5.  $g_5 \leftrightarrow g_6^2 = g_4 + g_2 + g_6 + 2s_2 + g_5 + g_1 + g_3$

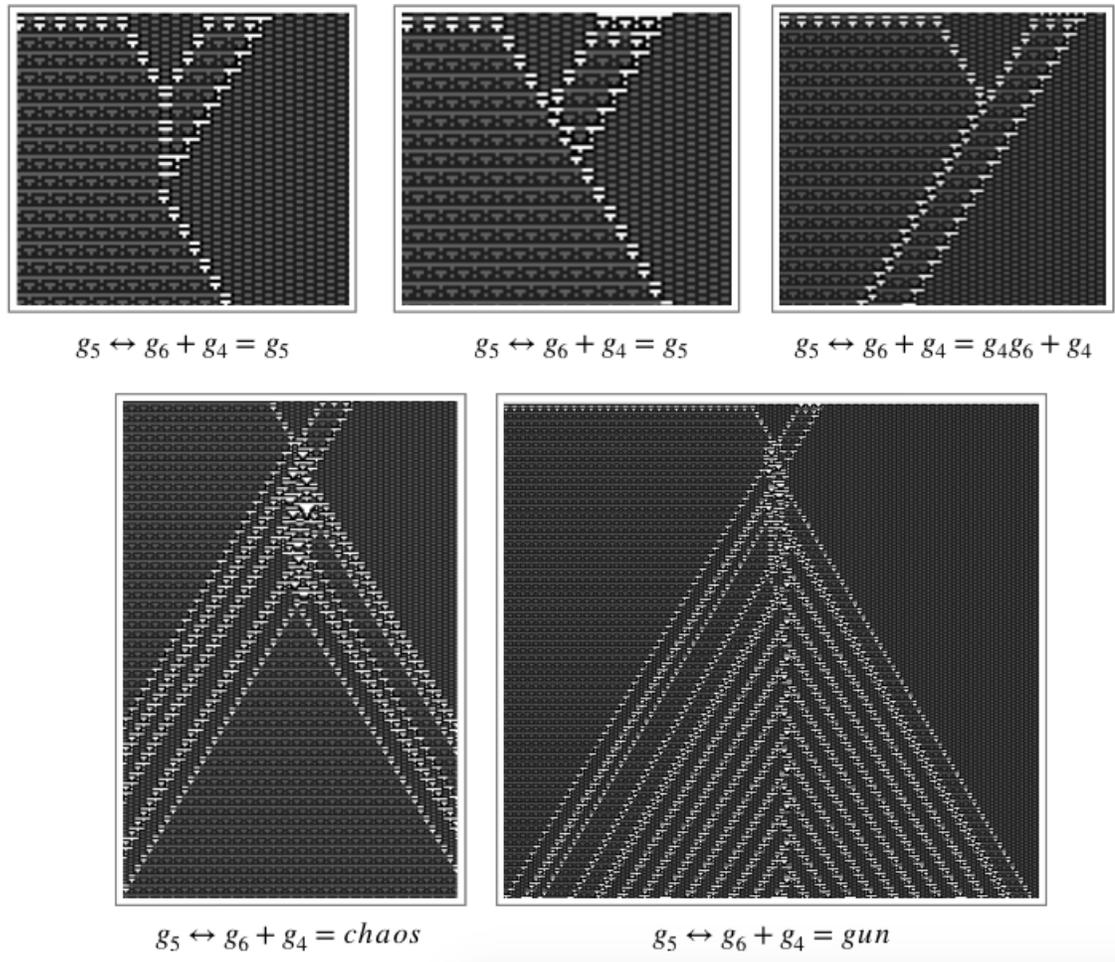


Figura 4.66: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_5$  y  $g_6 + g_4$  con su respectiva ecuación

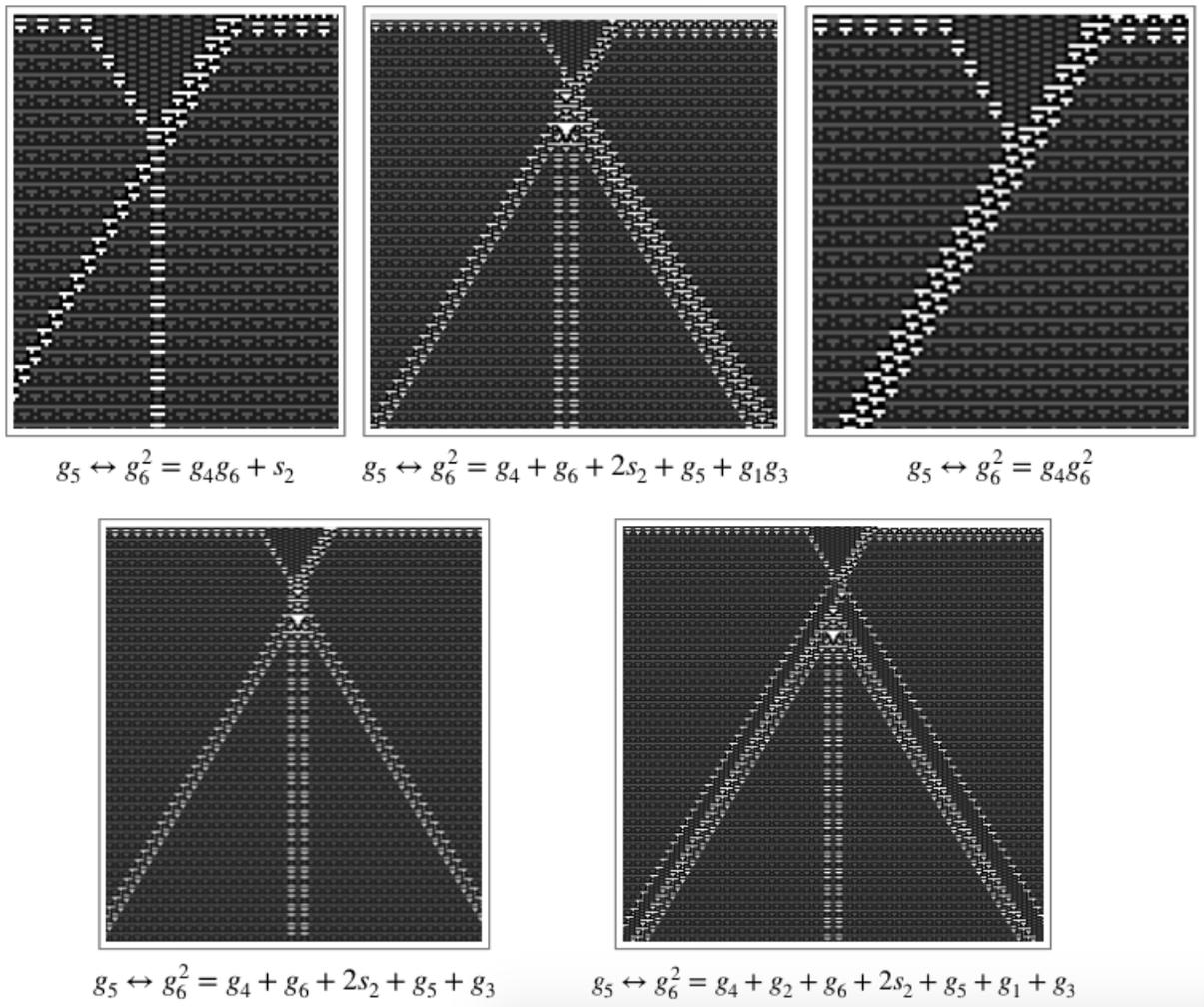


Figura 4.67: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_5$  y  $g_6^2$  con su respectiva ecuación

**Gliders:**  $g_5$  y  $g_6g_4$ 

En la figura 4.68 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_5$  y  $g_6g_4$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

En la figura 4.68 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:

1.  $g_5 \leftrightarrow g_6g_4 = gun$
2.  $g_5 \leftrightarrow g_6g_4 = gun$
3.  $g_5 \leftrightarrow g_6g_4 = g_4^3$
4.  $g_5 \leftrightarrow g_6g_4 = g_6g_4$
5.  $g_5 \leftrightarrow g_6g_4 = g_4g_6 + g_5$
6.  $g_5 \leftrightarrow g_6g_4 = g_5$
7.  $g_5 \leftrightarrow g_6g_4 = g_5$
8.  $g_5 \leftrightarrow g_6g_4 = gun$
9.  $g_5 \leftrightarrow g_6g_4 = gun$
10.  $g_5 \leftrightarrow g_6g_4 = gun$

**Gliders:**  $g_5$ ,  $s_1$  y  $g_2$ 

En la figura 4.69 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_5$ ,  $s_1$  y  $g_2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

En la figura 4.69 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:

1.  $g_5 \leftrightarrow s_1 \leftrightarrow g_2 = g_4$
2.  $g_5 \leftrightarrow s_1 \leftrightarrow g_2 = g_4g_2$

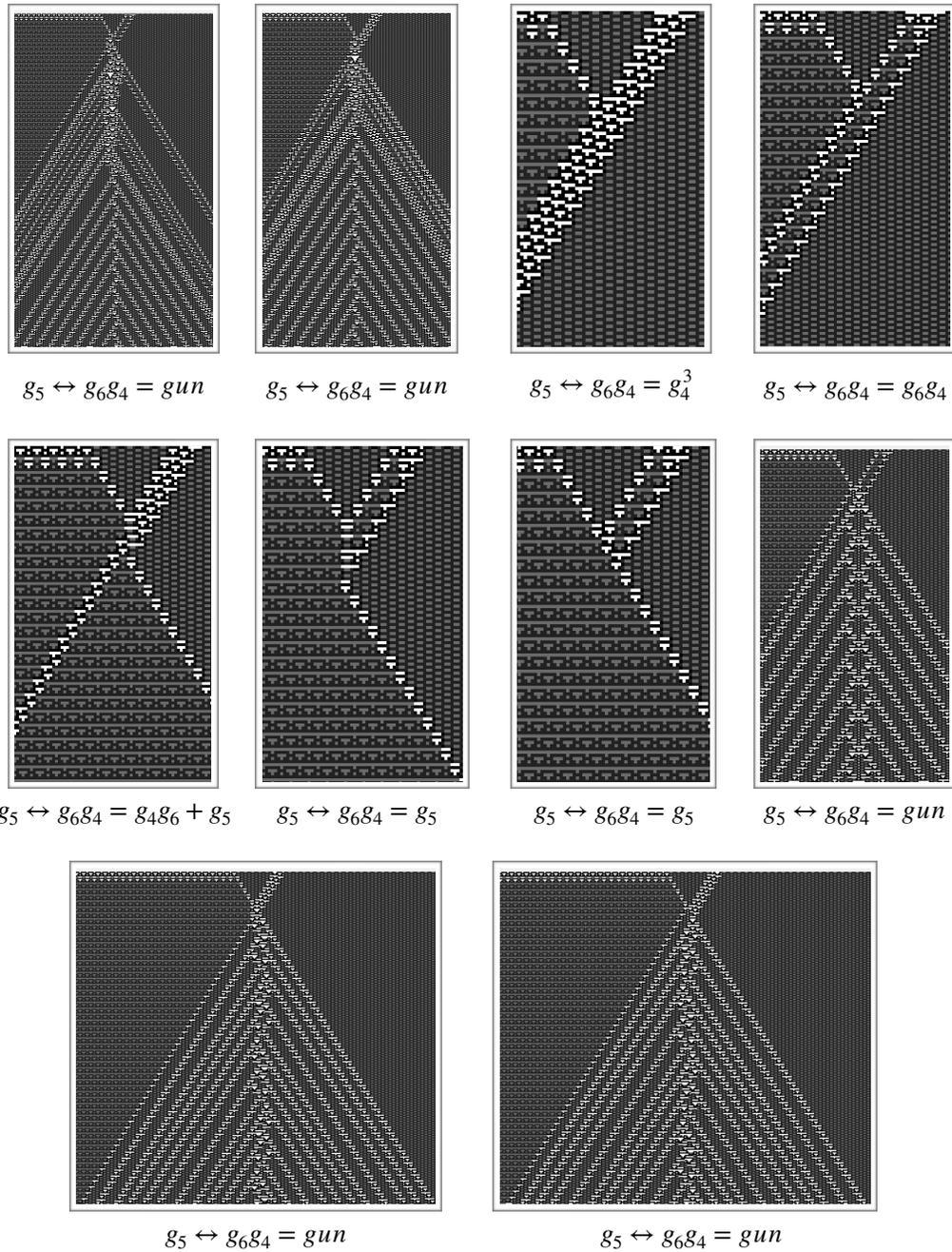


Figura 4.68: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_5$  y  $g_6g_4$  con su respectiva ecuación

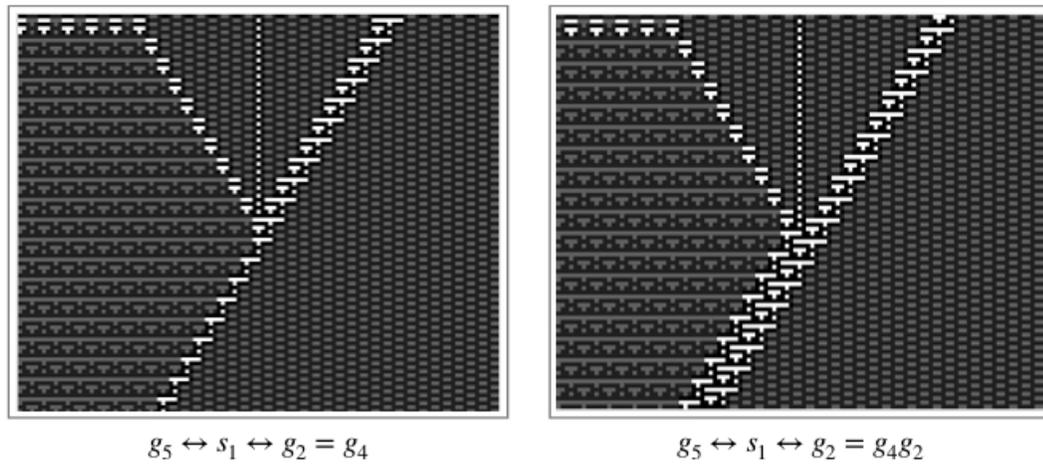


Figura 4.69: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_5$ ,  $s_1$  y  $g_2$  con su respectiva ecuación

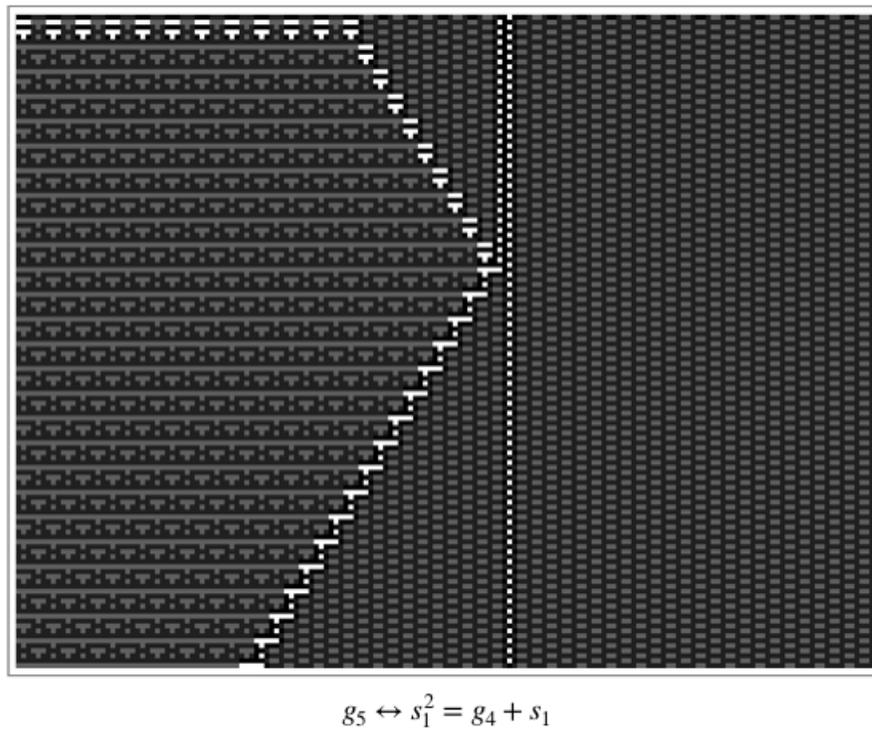


Figura 4.70: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_5$  y  $s_1^2$  con su respectiva ecuación

**Gliders:  $g_5$  y  $s_1^2$** 

En la figura 4.70 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_5$  y  $s_1^2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

En la figura 4.70 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:

1.  $g_5 \leftrightarrow s_1^2 = g_4 + s_1$

**Gliders:  $g_5^2$  y  $g_2$** 

En la figura 4.71 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_5^2$  y  $g_2$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

En la figura 4.71 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:

1.  $g_5^2 \leftrightarrow g_2 = s_2 + g_5$
2.  $g_5^2 \leftrightarrow g_2 = g_5^2$
3.  $g_5^2 \leftrightarrow g_2 = g_4g_6 + s_2 + g_5$
4.  $g_5^2 \leftrightarrow g_2 = g_4 + g_6 + s_2 + g_5$
5.  $g_5^2 \leftrightarrow g_2 = gun$

**Gliders:  $g_5^2$  y  $g_6$** 

En la figura 4.72 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_5^2$  y  $g_6$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

En la figura 4.72 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:

1.  $g_5^2 \leftrightarrow g_6 = g_5g_3$
2.  $g_5^2 \leftrightarrow g_6 = g_5^2g_3$
3.  $g_5^2 \leftrightarrow g_6 = g_4g_2 + g_6 + 2s_2 + g_5 + g_3$
4.  $g_5^2 \leftrightarrow g_6 = g_4 + g_2 + g_6 + 2s_2 + g_5 + g_1 + g_3$
5.  $g_5^2 \leftrightarrow g_6 = g_4 + g_6 + 2s_2 + g_5 + g_3$

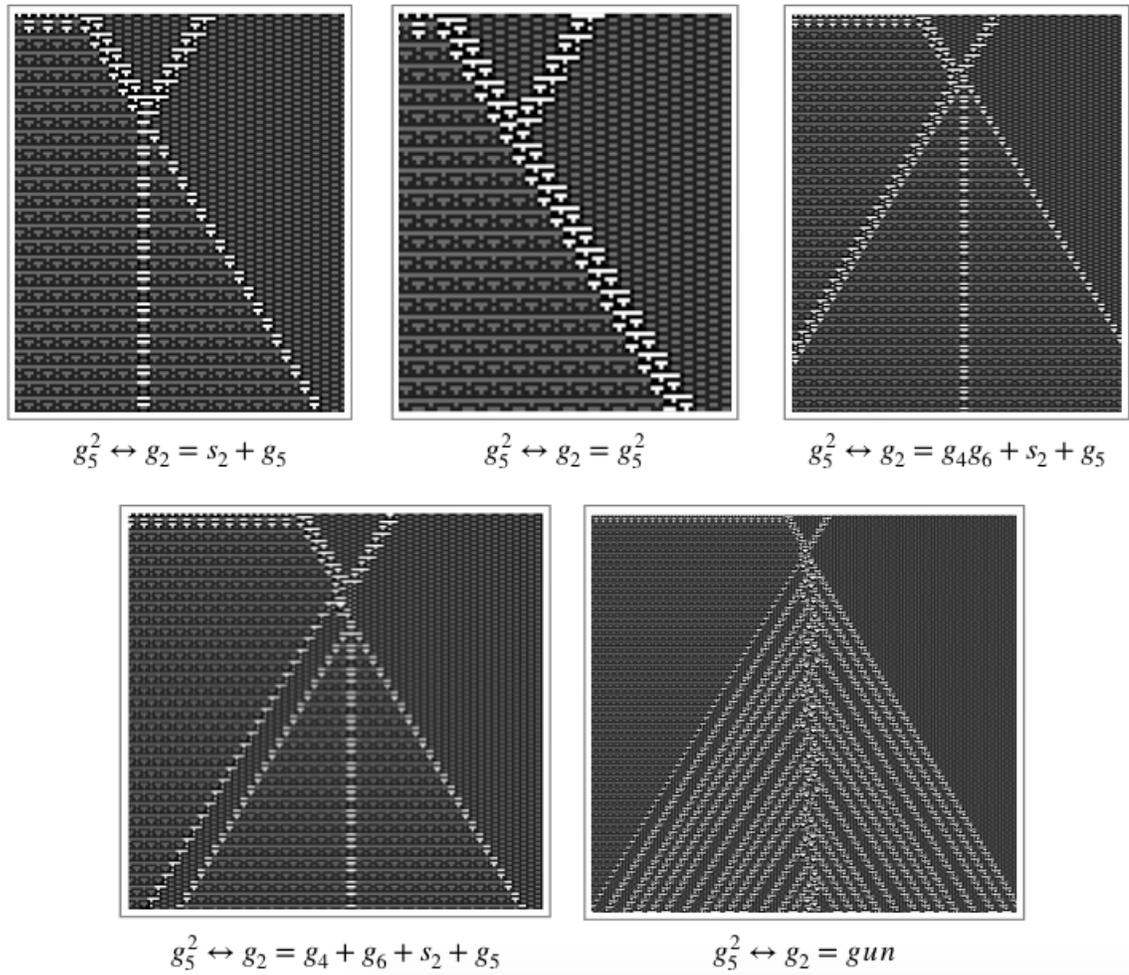


Figura 4.71: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_5^2$  y  $g_2$  con su respectiva ecuación

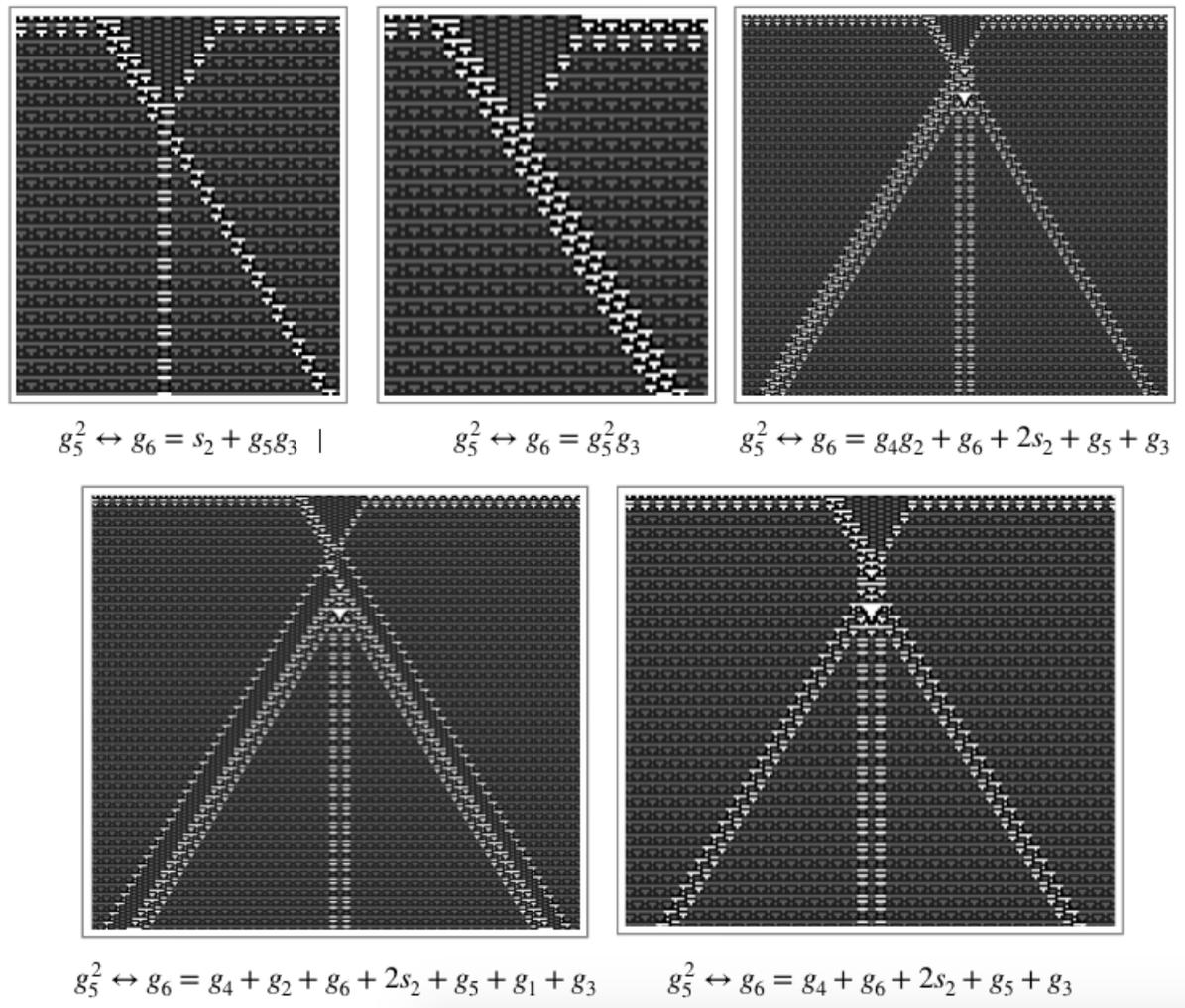


Figura 4.72: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_5^2$  y  $g_6$  con su respectiva ecuación

**Gliders:  $g_5^2$  y  $s_1$** 

En la figura 4.73 podemos observar las colisiones obtenidas usando  $g_5^2$  y  $s_1$  respectivamente, debajo de cada imagen está la ecuación que los describe.

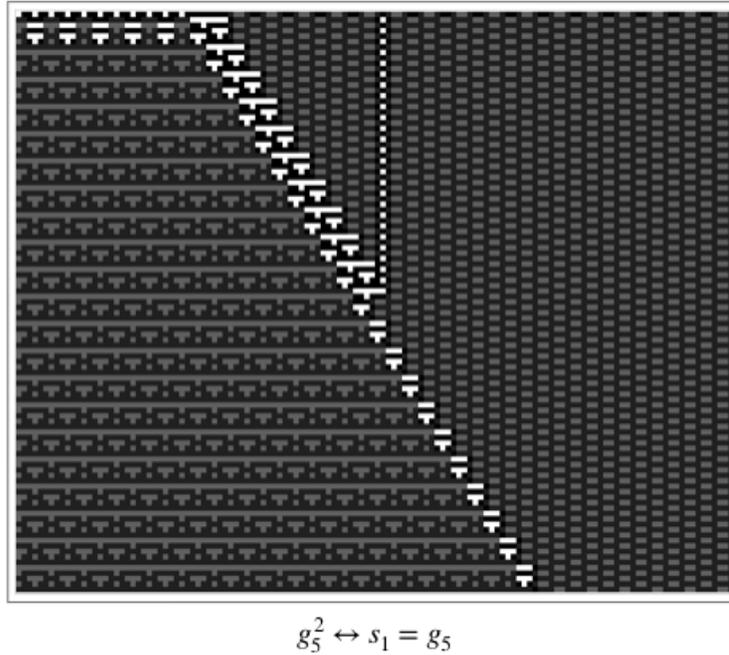


Figura 4.73: Los distintos resultados obtenidos de colisionar  $g_5^2$  y  $s_1$  con su respectiva ecuación

En la figura 4.73 podemos observar una ecuación distinta, la cual es:

1.  $g_5^2 \leftrightarrow s_1 = g_5$

**Resumen de colisiones ternarias**

En la tabla 4.12 se resumen todas las ecuaciones de las colisiones que ejemplificamos. En total son 915 colisiones ternarias realizadas, esto se calculó empleando lo obtenido en las colisiones binarias y se redujo a un caso de estudio (más detalles en el apéndice B).

Ecuación	Resultado
$2g_1 \leftrightarrow g_2$	$2g_1$
$2g_1 \leftrightarrow g_2$	$g_3 + g_5$
$2g_1 \leftrightarrow g_2$	$g_6 + g_4$
$2g_1 \leftrightarrow g_2$	$g_6 + g_4$
$2g_1 \leftrightarrow g_2$	$g_1$
$2g_1 \leftrightarrow g_6$	$g_1 + g_3^2$
$2g_1 \leftrightarrow g_6$	$gun$
$2g_1 \leftrightarrow g_6$	$g_6 + g_5 + g_3$
$2g_1 \leftrightarrow g_6$	$g_6 + g_5 + g_3$
$2g_1 \leftrightarrow g_6$	$g_6$
$2g_1 \leftrightarrow s_1$	$s_1$
$g_1 + g_1 \leftrightarrow g_2$	$\emptyset$
$g_1 + g_1 \leftrightarrow g_2$	$g_1$
$g_1 + g_1 \leftrightarrow g_2$	$g_1 + g_1$
$g_1 + g_1 \leftrightarrow g_2$	$g_3 + g_5$
$g_1 + g_1 \leftrightarrow g_2$	$g_2$
$g_1 + g_1 \leftrightarrow g_6$	$g_6$
$g_1 + g_1 \leftrightarrow g_6$	$g_3^2$
$g_1 + g_1 \leftrightarrow g_6$	$g_1 + g_3^2$
$g_1 + g_1 \leftrightarrow g_6$	$gun$
$g_1 + g_1 \leftrightarrow g_6$	$g_6 + g_5 + g_3$
$g_1 + g_1 \leftrightarrow s_1$	$s_1$
$g_1 \leftrightarrow 2g_2$	$g_2$
$g_1 \leftrightarrow 2g_2$	$g_3 + g_5$
$g_1 \leftrightarrow 2g_2$	$g_3 + g_5$
$g_1 \leftrightarrow 2g_2$	$g_6 + g_4$
$g_1 \leftrightarrow 2g_2$	$2g_2$
$g_1 \leftrightarrow 2s_1$	$s_1 + s_1$
$g_1 \leftrightarrow g_2 + g_2$	$g_2$
$g_1 \leftrightarrow g_2 + g_2$	$\emptyset$

Continúa en la siguiente página

Cuadro 4.12 – Continuación de la página anterior

<b>Ecuación</b>	<b>Resultado</b>
$g_1 \leftrightarrow g_2 + g_2$	$g_1$
$g_1 \leftrightarrow g_2 + g_2$	$g_6 + g_4$
$g_1 \leftrightarrow g_2 + g_2$	$g_2 + g_2$
$g_1 \leftrightarrow g_2^2$	$g_2$
$g_1 \leftrightarrow g_2^2$	$g_2$
$g_1 \leftrightarrow g_2^2$	$g_1$
$g_1 \leftrightarrow g_2^2$	$g_6 + g_4$
$g_1 \leftrightarrow g_2^2$	$g_2^2$
$g_1 \leftrightarrow g_6 + g_4$	$g_6g_4$
$g_1 \leftrightarrow g_6 + g_4$	$g_1$
$g_1 \leftrightarrow g_6 + g_4$	$g_6 + g_4$
$g_1 \leftrightarrow g_6 + g_4$	$gun$
$g_1 \leftrightarrow g_6 + g_4$	$g_6 + g_4$
$g_1 \leftrightarrow g_6^2$	$g_6 + s_2$
$g_1 \leftrightarrow g_6^2$	$g_6 + s_2 + g_5 + g_3$
$g_1 \leftrightarrow g_6^2$	$g_6 + s_2 + g_5g_3$
$g_1 \leftrightarrow g_6^2$	$gun$
$g_1 \leftrightarrow g_6^2$	$g_6^2$
$g_1 \leftrightarrow g_6g_4$	$g_2$
$g_1 \leftrightarrow g_6g_4$	$g_6 + g_5$
$g_1 \leftrightarrow g_6g_4$	$g_6g_4$
$g_1 \leftrightarrow g_6g_4$	$g_1$
$g_1 \leftrightarrow g_6g_4$	$g_6g_4$
$g_1 \leftrightarrow g_6g_4$	$g_2 + g_6 + g_5 + g_1$
$g_1 \leftrightarrow g_6g_4$	$g_6 + g_5$
$g_1 \leftrightarrow g_6g_4$	$g_6 + g_4$
$g_1 \leftrightarrow g_6g_4$	$gun$
$g_1 \leftrightarrow g_6g_4$	$gun$
$g_1 \leftrightarrow s_1 \leftrightarrow g_2$	$s_1$

Continúa en la siguiente página

Cuadro 4.12 – Continuación de la página anterior

Ecuación	Resultado
$g_1 \leftrightarrow s_1 \leftrightarrow g_6$	$g_3$
$g_1 \leftrightarrow s_1 \leftrightarrow g_6$	$g_1 + g_3$
$g_1^2 \leftrightarrow g_2$	$g_2$
$g_1^2 \leftrightarrow g_2$	$g_1$
$g_1^2 \leftrightarrow g_2$	$g_1$
$g_1^2 \leftrightarrow g_2$	$g_1^2$
$g_1^2 \leftrightarrow g_2$	$g_3 + g_5$
$g_1^2 \leftrightarrow g_6$	$g_6 + g_5 + g_3$
$g_1^2 \leftrightarrow g_6$	$g_3^2$
$g_1^2 \leftrightarrow g_6$	$g_2 + g_6 + g_5 + g_3$
$g_1^2 \leftrightarrow g_6$	$g_1 g_3^2$
$g_1^2 \leftrightarrow g_6$	$gun$
$g_1^2 \leftrightarrow s_1$	$s_1$
$g_3 \leftrightarrow 2s_2$	$g_6 + s_2$
$g_3 \leftrightarrow g_4 + g_2$	$s_1$
$g_3 \leftrightarrow g_4 + g_6$	$g_3$
$g_3 \leftrightarrow g_4^2$	$g_2$
$g_3 \leftrightarrow g_4 g_2$	$s_1$
$g_3 \leftrightarrow s_2 + s_2$	$g_6 + s_2$
$g_3 \leftrightarrow s_2 \leftrightarrow g_4$	$g_6 + g_4$
$g_3 \leftrightarrow s_2 \leftrightarrow g_4$	$g_2$
$g_3 \leftrightarrow s_2 \leftrightarrow g_4$	$\emptyset$
$g_3 \leftrightarrow s_2 \leftrightarrow g_4$	$g_1$
$g_3 \leftrightarrow s_2 \leftrightarrow g_4$	$g_4 + g_5$
$g_3 \leftrightarrow s_2^2$	$g_6 + s_2$
$g_3^2 \leftrightarrow g_4$	$g_1$
$g_3^2 \leftrightarrow s_2$	$g_6 + g_5 g_3$
$g_5 \leftrightarrow 2g_2$	$g_5$
$g_5 \leftrightarrow 2g_2$	$g_4 + g_6 + g_5$

Continúa en la siguiente página

Cuadro 4.12 – Continuación de la página anterior

<b>Ecuación</b>	<b>Resultado</b>
$g_5 \leftrightarrow 2g_2$	$g_4 + g_6 + g_5$
$g_5 \leftrightarrow 2g_2$	$gun$
$g_5 \leftrightarrow 2g_2$	$g_4^2 + g_2$
$g_5 \leftrightarrow 2s_1$	$s_1$
$g_5 \leftrightarrow g_2 + g_2$	$g_4^2$
$g_5 \leftrightarrow g_2 + g_2$	$g_5$
$g_5 \leftrightarrow g_2 + g_2$	$g_4 + g_6 + g_5$
$g_5 \leftrightarrow g_2 + g_2$	$gun$
$g_5 \leftrightarrow g_2 + g_2$	$g_4^2 + g_2$
$g_5 \leftrightarrow g_2^2$	$g_4^2 g_2$
$g_5 \leftrightarrow g_2^2$	$g_4^2$
$g_5 \leftrightarrow g_2^2$	$g_4 + g_6 + g_5$
$g_5 \leftrightarrow g_2^2$	$gun$
$g_5 \leftrightarrow g_2^2$	$g_4 + g_6 + g_5 + g_1$
$g_5 \leftrightarrow g_6 + g_4$	$g_5$
$g_5 \leftrightarrow g_6 + g_4$	$g_5$
$g_5 \leftrightarrow g_6 + g_4$	$g_4 g_6 + g_4$
$g_5 \leftrightarrow g_6 + g_4$	$chaos$
$g_5 \leftrightarrow g_6 + g_4$	$gun$
$g_5 \leftrightarrow g_6^2$	$g_4 g_6 + s_2$
$g_5 \leftrightarrow g_6^2$	$g_4 + g_6 + 2s_2 + g_5 + g_1 g_3$
$g_5 \leftrightarrow g_6^2$	$g_4 g_6^2$
$g_5 \leftrightarrow g_6^2$	$g_4 + g_6 + 2s_2 + g_5 + g_3$
$g_5 \leftrightarrow g_6^2$	$g_4 + g_2 + g_6 + 2s_2 + g_5 + g_1 + g_3$
$g_5 \leftrightarrow g_6 g_4$	$gun$
$g_5 \leftrightarrow g_6 g_4$	$gun$
$g_5 \leftrightarrow g_6 g_4$	$g_4^3$
$g_5 \leftrightarrow g_6 g_4$	$g_6 g_4$
$g_5 \leftrightarrow g_6 g_4$	$g_4 g_6 + g_5$

Continúa en la siguiente página

Cuadro 4.12 – Continuación de la página anterior

Ecuación	Resultado
$g_5 \leftrightarrow g_6 g_4$	$g_5$
$g_5 \leftrightarrow g_6 g_4$	$g_5$
$g_5 \leftrightarrow g_6 g_4$	$gun$
$g_5 \leftrightarrow g_6 g_4$	$gun$
$g_5 \leftrightarrow g_6 g_4$	$gun$
$g_5 \leftrightarrow s_1 \leftrightarrow g_2$	$g_4$
$g_5 \leftrightarrow s_1 \leftrightarrow g_2$	$g_4 g_2$
$g_5 \leftrightarrow s_1^2$	$g_4 + s_1$
$g_5^2 \leftrightarrow g_2$	$s_2 + g_5$
$g_5^2 \leftrightarrow g_2$	$g_5^2$
$g_5^2 \leftrightarrow g_2$	$g_4 g_6 + s_2 + g_5$
$g_5^2 \leftrightarrow g_2$	$g_4 + g_6 + s_2 + g_5$
$g_5^2 \leftrightarrow g_2$	$gun$
$g_5^2 \leftrightarrow g_6$	$g_5 g_3$
$g_5^2 \leftrightarrow g_6$	$g_5^2 g_3$
$g_5^2 \leftrightarrow g_6$	$g_4 g_2 + g_6 + 2s_2 + g_5 + g_3$
$g_5^2 \leftrightarrow g_6$	$g_4 + g_2 + g_6 + 2s_2 + g_5 + g_1 + g_3$
$g_5^2 \leftrightarrow g_6$	$g_4 + g_6 + 2s_2 + g_5 + g_3$
$g_5^2 \leftrightarrow s_1$	$g_5$

Cuadro 4.12: Tabla resumida de colisiones ternarias

### 4.6.3. Colisiones de orden superior

En esta sección se ilustrarán algunas colisiones que se realizaron empleando 4 y 5 partículas dentro del espacio de evoluciones, consideradas como cuaternarias y quiniarias respectivamente. Estas colisiones se realizaron para ilustrar algunas colisiones interesantes, así como mostrar que a más partículas, mayor cantidad de colisiones que se requieren realizar, por lo que nos enfrentamos a un problema de infinitud y no decidible.

### Colisiones cuaternarias

En la figura 4.74 podemos observar algunas colisiones cuaternarias interesantes, las cuales en su mayoría generan glider-gun.

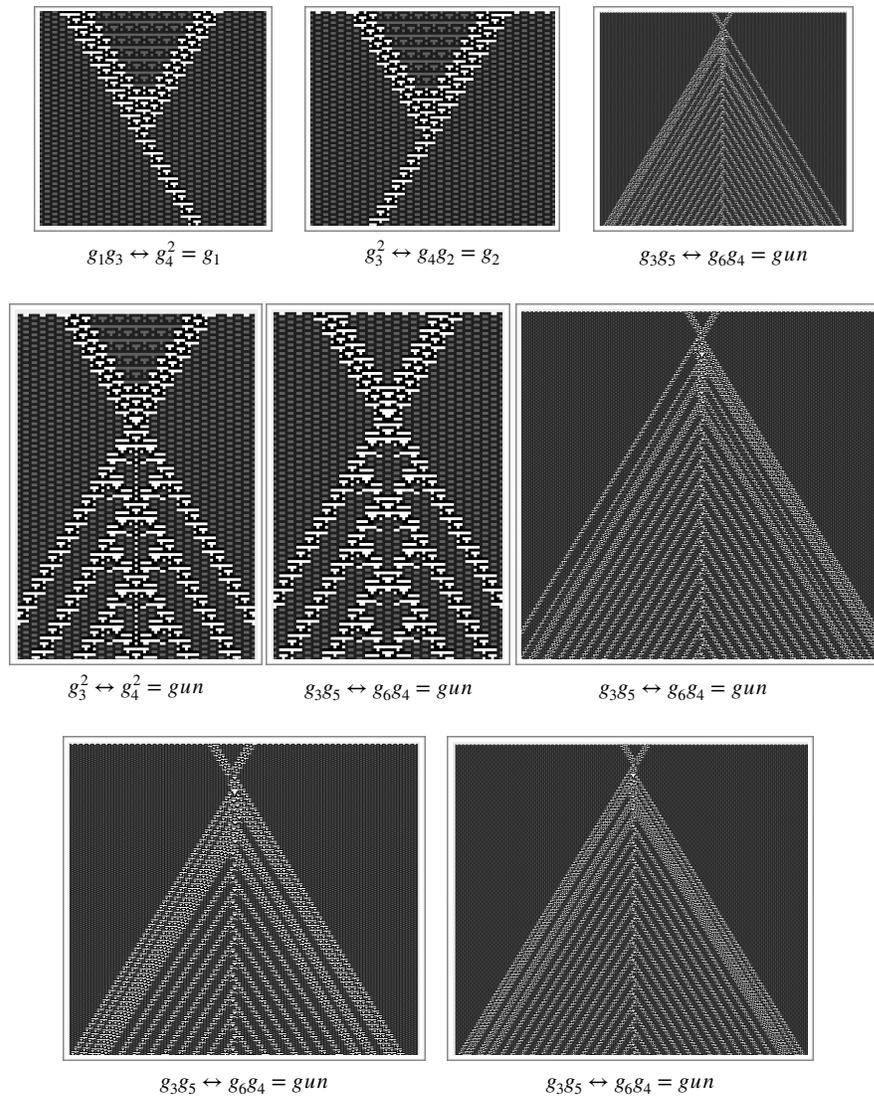


Figura 4.74: Algunos resultados de colisionar 4 partículas dentro del espacio de evoluciones

---

# Capítulo 5

## Computación basada en colisiones

### 5.1. Antecedentes

Para realizar alguna operación con la computadora los programadores, desarrolladores, investigadores, etc, emplean las unidades básicas conocidas como bits(0 y 1), los cuales al ser evaluados dentro de compuertas lógicas como la AND, OR, XOR, etc, y uniendo muchas de éstas, podemos computar desde una suma hasta un programa que nos permita analizar una cadena de ADN.

Ahora intentaremos hacer computación en un medio no estructura poblado de objetos móviles, sin cables, sin válvulas, nada hay allá: solo patrones compactos deambulando en el espacio, chocando uno contra otro y calculando.

Un dispositivo informático debería ser de propósito general, universal, o especializado. Un procesador universal puede ser casi todo; especializado - casi nada. Las computadoras personales son universales, los controladores de un microondas son especializados. Uno podría estudiar dos tipos de universalidad - lógica, o computacional, y simulacional. Una máquina abstracta tanto como un sistema físico, químico o biológico real, es llamada computacionalmente universal si implementa un funcionalmente completo, o universal, conjunto de funciones booleanas en su dinámica espacio-temporal. Las construcciones mayormente estudiadas dentro del cómputo basado en colisiones son computacionalmente universales, porque llevan a cabo sistemas universales de compuertas lógicas en colisiones jerárquicas de objetos móviles. Si un sistema simula el comportamiento de una máquina universal, la cual su universalidad

ha sido probada, es llamada simulacionalmente universal.

Un dispositivo de procesamiento universal puede ser ya sea estructurado, heterogéneo, compartimentado y estacionario o sin estructura, homogéneo, sin arquitectura y dinámico. Los dispositivos estructurados tienen alambres para transmitir información, y válvulas para transmitirla: los dispositivos sin estructura no poseen nada de eso. Los cuantos de información son representados por objetos móviles (ya sea por su presencia/ausencia o tipos particulares, colores) que viajan en el espacio. Las trayectorias de los objetos pueden ser vistas como los alambres. Los objetos cambian sus trayectorias o estados cuando colisionan con otros objetos. Así, la información se transforma y la computación puede ser implementada.

Hay bastantes fuentes para el cómputo basado en colisiones. Los estudios que tratan colisiones de señales, viajes a lo largo de cadenas discretas, autómatas celulares de una dimensión, mienten en el principio del campo. Las ideas de colisionar señales, las cuales existen desde el siglo 19 en física y fisiología, han sido puestas en el marco de los autómatas recientemente, cerca de 1965, cuando los artículos de A. J. Atrubin, P. Fisher y A. Waksman fueron publicados. Se sabe que Atrubin estudió la multiplicación en los autómatas celulares de una dimensión; Waksman dio una solución de 8 estados para el problema de sincronización de un pelotón de fusilamiento; and Fisher mostró cómo generar números primos en autómatas celulares. El enfoque de Atrubin-Fisher-Waksman permitió el desarrollo de inimaginables construcciones dirigidas a aumentar el potencial de la computación de redes de autómatas homogéneas.

En 1971 E. R. Banks mostró como construir alambres y compuertas simples en configuraciones de un autómata celulares de estado binario de dos dimensiones. Esta fue la construcción basada en arquitectura. Así, un alambre fue representado por una configuración estacionaria particular de estados de células; esto fue más bien una simulación de un circuito eléctrico, o lógico, convencional. El diseño de Banks fue quitado de su heterogeneidad diez años después, cuando el Juego de la Vida hizo nuestro mundo “sin alambres”.

En 1982 Elwyn Berlekamp, John Conway y Richard Gay probaron que el Juego de la Vida puede imitar a las computadoras. Ellos imitaron los cables eléctricos con líneas sobre las cuales los gliders viajan, y demostraron cómo diseñar una compuerta lógica colisionando gliders uno a otro. Sus “camino para ganar” nos trajeron diseños

de computación admirables que no solamente lucen frescos veinte años después, sino que siguen siendo redescubiertos de nuevo y de nuevo por los entusiastas del Juego de la Vida alrededor de la red. Berlekamp, Conway y Gay emplearon una reacción de desvanecimiento de gliders - dos gliders colisionando y aniquilándose - para construir una compuerta NOT. Ellos adoptaron el “comedor” de Gosper para recolectar basura y para destruir las corrientes de gliders. Usaron combinaciones de glider-guns y comedores para implementar compuertas AND y OR, y cambiaron de un patrón estacionario(bloque) a un patrón móvil(glider) cuando diseñaron el almacenamiento auxiliar de información.

“Incluso existe la posibilidad que el espacio-tiempo sea granular, compuesto de unidades discretas, y que el universo, como Edward Fredkin del MIT y otros han sugerido, es un autómata celular corrido por una computadora enorme. Si sí, a lo que nosotros llamamos *moción* podría ser solamente *moción simulada*. Una partícula en movimiento en el último micronivel puede ser esencialmente la misma que una de nuestros gliders, aparenentemente moviéndose en el macronivel, donde actualmente solo hay una alteración de estados de células básicas de espacio-tiempo en obediencia a las reglas de transición que tiene que ser descubiertas todavía.” - termina el libro de Berlekamp-Conway-Gay. Sus últimas palabras fueron acerca de Fredkin.

Mientras tanto, en 1978 Edward Fredkin y Tommaso Toffoli subieron una propuesta de un proyecto de un año a DARPA, el cual fue financiado, y así empezado desplegando una cadena de eventos remarcables. Originalmente, Fredkin y Toffoli dirigieron a “drásticamente reducir la fracción de energía que es disipada en cada paso computacional”. Para diseñar una computadora sin disipación construyeron un nuevo tipo de lógica digital - lógica conservativa - que conserva ambos “las cantidades físicas en las cuales las señales digitales son codificadas” y “la información presente en cualquier momento en un sistema digital”. Ellos más lejos desarrollaron esas ideas en el artículo seminal “Lógica conservativa” publicado en 1982. Así, el concepto de computadoras balísticas emergió. El modelo de Fredkin-Toffoli de computación conservativa - el modelo de bolas de billar - explora las colisiones elásticas que involucran bolas y reflectores arreglados”. Generalmente, ellos probaron que dado un contenedor con bolas podemos hacer cualquier tipo de computación.

El modelo de bolas de billar fue tomado más lejos cuando Norman Margolus

inventó una implementación de un autómata celular del modelo. Él publicó su resultado en 1984. “La vengidad de Margolus” y “los autómatas celulares del modelo de bolas de billar” son aprovechados ampliamente actualmente.

La historia que les conté es solamente una de muchas explicaciones posibles sobre como el campo del cómputo basado en colisiones surgió.

## 5.2. Definición

Después de relatar los antecedentes que dieron origen al cómputo basado en colisiones, podríamos inferir una definición inicial del qué es y cómo funciona este nuevo modelo de computación, redactando que “el cómputo basado en colisiones es un modelo que nos permite realizar operaciones similares a las de una computadora empleando elementos que al interactuar entre ellos generan las bases para computar algo”, se parece a nuestra definición de computación, con la gran diferencia de que ahora nuestra unidad básica de información no serán los 0 y los 1, sino que serán elementos que se moverán a través del espacio.

Estos elementos bien pueden ser partículas, bolas de billar, canicas, ondas electromagnéticas, etc, y nuestra intuición de “0 y 1” podríamos manejar como ausencia/presencia, estado  $e_1$  y  $e_2$ , etc. Esto depende del modelo y de cómo lo hayamos definido, lo cierto es que no hay una manera correcta de hacer cómputo basado en colisiones, pero si hay maneras que explotan más las capacidades computacionales de un sistema que otro.

Así, podemos definir el cómputo basado en colisiones de la siguiente manera:

“Es un modelo que nos permite emplear escribir algoritmos que trabajarán con unidades básicas llamadas elementos móviles, los cuales dependiendo de su estado, o de su ausencia o presencia, determinarán sus valores equivalentes al sistema binario.”

### 5.2.1. Características principales

Dentro de las características principales del cómputo basado en colisiones, mencionaremos las más comunes dentro de los modelos que se encuentran en la literatura:

1. **Posee un espacio de colisiones:** Si bien tenemos elementos que existen dentro de nuestro modelo y que interactúan con otros, necesitamos definir

el espacio físico donde sucederán dichas interacciones, podría ser una mesa de billar o el espacio computacional de un ACE.

2. **Posee elementos móviles:** Estos elementos móviles tienen sus propias características, y también sus propiedades emergen al colisionarse con otros, la propiedad que compartirán con los demás es que estos se deben mover.
3. **Es posible interaccionar estos elementos:** Parecerá redundante, pero podríamos encontrarnos con elementos que estén aislados y que no podremos hacer interaccionar, por ello esta condición es importante.
4. **El resultado de las interacciones existe:** Podríamos encontrarnos con el caso de que interaccionarlos provoca que se destruyan, por ello si la colisión entre varios elementos nos genera nuevos, algunos se destruyen o bien simplemente rebotan, esto nos permitirá modelar.

### 5.2.2. Objetivos

El cómputo basado en colisiones puede tener distintos objetivos dependiendo de a dónde se enfoque y lo que se busque resolver, pero podemos destacar el objetivo por el cual surgió esta nueva forma de computación como:

“Diseñar una forma más eficiente, sencilla y creativa de realizar computación mediante interacciones entre elementos dentro de un espacio que existe en un sistema complejo.”

De aquí podemos derivar otros objetivos particulares:

1. Optimizar la cantidad de operaciones al implementar el cómputo conservativo.
2. Permitir la existencia del cómputo reversible para mostrar todos los pasos que se siguieron para llegar al resultado.
3. Optimizar la forma en la que se realizan las operaciones al codificarlas de forma distinta.
4. Mapear el modelo a un modelo físico que nos permita diseñar computadoras óptimas y que aprovechen mejor sus recursos.

## 5.3. Determinación del poder de cómputo de un sistema

Para determinar el poder de cómputo de un sistema es necesario modelar alguna computación empleando las interacciones entre los elementos que emergen de un sistema complejo, esto puede hacerse mediante ecuaciones de colisiones o bien equivalencias entre ellas. Una vez que poseemos el modelo, dependiendo de la cantidad y el tipo de operaciones que podamos realizar con él, es el poder de cómputo asociado. Si podemos realizar muchas compuertas lógicas tipo AND y NOT, pero con otro modelo podemos realizar únicamente las NAND y NOR, el segundo modelo pasaría a ser más poderoso debido a que las compuertas NAND y NOR son universales.

Trataremos a fondo cómo se determina el poder de cómputo de un sistema empleando dos parámetros principales: la Jerarquía de Chomsky y las Compuertas Lógicas.

### 5.3.1. Jerarquía de Chomsky

La jerarquía de Chomsky es una clasificación de las gramáticas formales que generan lenguajes regulares y permite identificar qué lenguaje y con qué máquina podemos reconocerlo. Esta consta de 4 tipos numerados del 0 a 3, donde el 0 es el más grande abarcando todas las gramáticas, y contiene al 1, 2 y 3. Veamos la jerarquía de manera gráfica y después la explicaremos uno a uno los tipos que posee y su relación con la determinación del poder de cómputo de un sistema. En la figura 5.1 podemos observar un imagen con los 4 tipos de lenguajes y la máquina que los reconoce.

Podemos observar que el tipo 0 contiene al resto de los lenguajes, el tipo 1 contiene al 2 y 3, el 2 solamente al 3, y el 3 es el más básico. Vamos a describir a detalle cada uno de estos tipos:

1. **Tipo 3:** Conocidos como lenguajes regulares, son aquellos lenguajes que pueden ser expresados mediante una expresión regular y pueden ser lineales por la derecha o por la izquierda. Este lenguaje reconoce secuencias de símbolos.

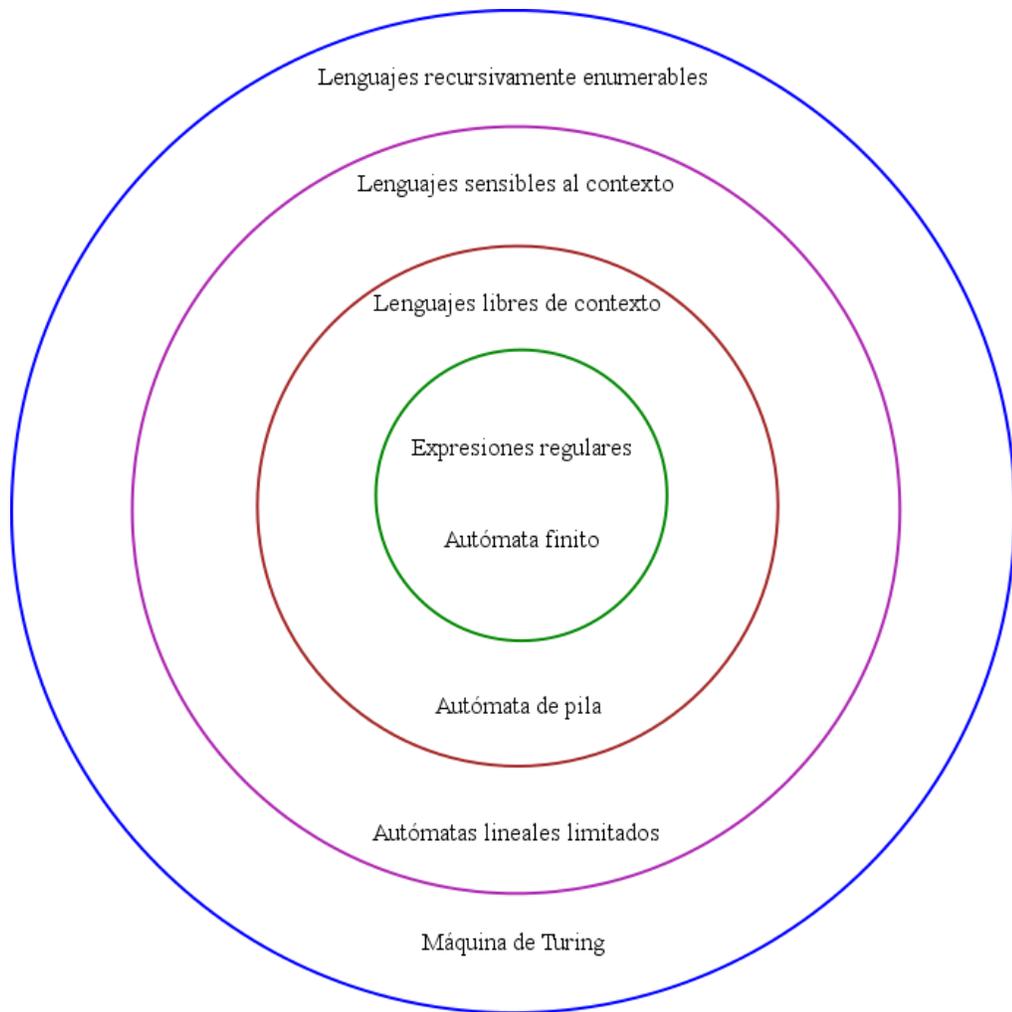


Figura 5.1: La jerarquía de Chomsky

Se reconocen empleando autómatas finitos, ya sean deterministas o no deterministas.

2. **Tipo 2:** Conocidos como lenguajes independientes de contexto, son conjuntos de secuencias de símbolos o frases. Estos lenguajes se reconocen empleando autómatas de pila.
3. **Tipo 1:** Conocidos como lenguajes dependientes de contexto, son conjuntos de conjuntos de secuencias de símbolos. Se reconocen empleando autómatas linealmente acoplados.
4. **Tipo 0:** Conocidos como lenguajes recursivos, es la jerarquía más grande de acuerdo a Chomsky e incluye un conjunto de objetos formales de cualquier complejidad computacional. Son reconocidos empleando máquinas de Turing.

Sabiendo esto, imaginemos que tenemos un sistema que permite colisiones, y éstas pueden ser modeladas con ecuaciones, equivalencias entre estados y entre caracteres de un alfabeto, etc. Para medir el poder de cómputo de un sistema así, un buen camino es comenzar por la jerarquía de Chomsky en el tipo 3 y observar si podemos simular un lenguaje regular usando las colisiones, si lo logramos podemos pasar al tipo 2 y simular una gramática libre de contexto, de ser así podemos pasar la tipo 1 y así hasta llegar al tipo 0 (quizás el más complejo), e intentar simular una máquina de Turing, dependiendo de hasta donde podamos simular, es el poder de cómputo que hemos encontrado de nuestro sistema.

### 5.3.2. Compuertas lógicas

Las compuertas lógicas son circuitos electrónicos conformados internamente por transistores que se encuentran en arreglos especiales con los cuales otorgan señales de voltaje como resultado o una salida de forma booleana, esta salida puede ser un voltaje en alto (ej. 5V = 1 en binario), o un voltaje en bajo (ej. 0V = 0 en binario). Con estas compuertas lógicas podemos computar todo lo que conocemos, de hecho nuestro procesador se basa en un arreglo de transistores el cual posee muchísimas compuertas y al recibir una instrucción la transforma en voltaje, la pasa a través de los transistores y nos devuelve el resultado.

Para las compuertas lógicas podemos manejar dos tipos de lógica:

1. **Lógica positiva:** Esto significa que cuando reciba una señal en alto se acciona, representando un 1 en binario, y con un bajo se desactiva, representando un 0 en binario.
2. **Lógica negativa:** Esto es lo contrario a la positiva, cuando recibe un bajo la señal se activa, representada con un 0 binario y con un alto se desactiva, representada con un 1 en binario.

Esta lógica también se puede expresar mediante el álgebra de boole, el cual nos establece las reglas de multiplicación y suma de entradas de acuerdo a la compuerta que se esté aplicando. Existen muchas compuertas lógicas, pero las básicas (o elementales) son las siguientes:

### Compuerta AND

Esta compuerta lógica evalúa dos señales de entrada y como resultado arroja un 1 si ambas señales están en alto, en otro caso arroja un 0. Dicho de manera sencilla, tomando las señales  $a$  y  $b$ , podemos decir que vamos a hacer la comparación “ $a$  Y  $b$ ”, o bien una multiplicación dentro del álgebra de boole. La tabla de verdad de esta compuerta se encuentra en la tabla 5.1.

a	b	a AND b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Cuadro 5.1: Tabla de verdad de la compuerta AND

### Compuerta OR

Esta compuerta lógica evalúa dos señales de entrada y como resultado arroja un 1 si alguna de las señales está en alto, en otro caso arroja un 0. Dicho de manera

sencilla, tomando las señales  $a$  y  $b$ , podemos decir que vamos a hacer la comparación “ $a$  O  $b$ ”, o bien una suma dentro del álgebra de boole. La tabla de verdad de esta compuerta se encuentra en la tabla 5.2.

a	b	a OR b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Cuadro 5.2: Tabla de verdad de la compuerta OR

### Compuerta NOT

Esta compuerta lógica evalúa una señal de entrada y como resultado arroja el complemento a 1 de la señal. Dicho de manera sencilla, tomando la señal  $a$ , podemos decir que vamos a hacer la negación “NO  $a$ ”, dentro del álgebra de boolea se le coloca una línea arriba de la señal. La tabla de verdad de esta compuerta se encuentra en la tabla 5.3.

a	NOT a
0	1
1	0

Cuadro 5.3: Tabla de verdad de la compuerta NOT

### Compuerta NAND

Esta compuerta lógica es similar a la AND pero negada, evalúa dos señales de entrada y como resultado arroja un 1 si las señales son distintas a estar en alto, en otro caso arroja un 0. Dicho de manera sencilla, tomando las señales  $a$  y  $b$ , podemos decir que vamos a hacer la comparación “NO  $a$  Y  $b$ ”, o bien una suma dentro del álgebra de boole y después al resultado aplicarle una NOT. La tabla de verdad de esta compuerta se encuentra en la tabla 5.4.

a	b	a OR b
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Cuadro 5.4: Tabla de verdad de la compuerta NAND

### Compuerta NOR

Esta compuerta lógica es similar a la OR pero negada, evalúa dos señales de entrada y como resultado arroja un 1 si ambas señales están en bajo, en otro caso arroja un 0. Dicho de manera sencilla, tomando las señales  $a$  y  $b$ , podemos decir que vamos a hacer la comparación “NO  $a$  O  $b$ ”, o bien una multiplicación dentro del álgebra de boole y después al resultado aplicarle una NOT. La tabla de verdad de esta compuerta se encuentra en la tabla 5.5.

a	b	a NOR b
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Cuadro 5.5: Tabla de verdad de la compuerta NOR

### Compuerta XOR

Esta compuerta lógica es similar a la OR pero se le conoce como OR exclusiva, evalúa dos señales de entrada y arroja un 1 si ambas señales son distintas, en otro caso arroja un 0. Dicho de manera sencilla, tomando las señales  $a$  y  $b$ , podemos decir que vamos a hacer la comparación “ $(a$  O NO  $b)$  Y (NO  $a$  O  $b)$ ”, o bien la suma de las multiplicaciones de  $a$  con  $b$  negada y viceversa. La tabla de verdad de esta compuerta se encuentra en la tabla 5.6.

a	b	a XOR b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Cuadro 5.6: Tabla de verdad de la compuerta XOR

### Compuerta XNOR

Esta compuerta lógica es similar a la OR pero se le conoce como OR exclusiva negada, evalúa dos señales de entrada y arroja un 1 si ambas señales son iguales, en otro caso arroja un 0. Dicho de manera sencilla, tomando las señales  $a$  y  $b$ , podemos decir que vamos a hacer la comparación “NO  $a$  XOR  $b$ ”, o bien la suma de las multiplicaciones de  $a$  con  $b$  y la negación de la otra multiplicación. La tabla de verdad de esta compuerta se encuentra en la tabla 5.7.

a	b	a XNOR b
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Cuadro 5.7: Tabla de verdad de la compuerta XNOR

### Compuerta IF

Esta compuerta lógica pareciera no hacer ninguna afectación si solo vemos la parte lógica. Si recibe un 1 arroja un 1, y si recibe un 0 arroja un 0, pero en realidad es un amplificador de corriente, amplifica la impedancia de nuestra señal. La tabla de verdad de esta compuerta se encuentra en la tabla 5.8.

Finalmente, podemos ver todas las compuertas lógicas de manera gráfica junto con su ecuación de acuerdo al álgebra de boole en la figura 5.2

a	IF a
0	0
1	1

Cuadro 5.8: Tabla de verdad de la compuerta IF

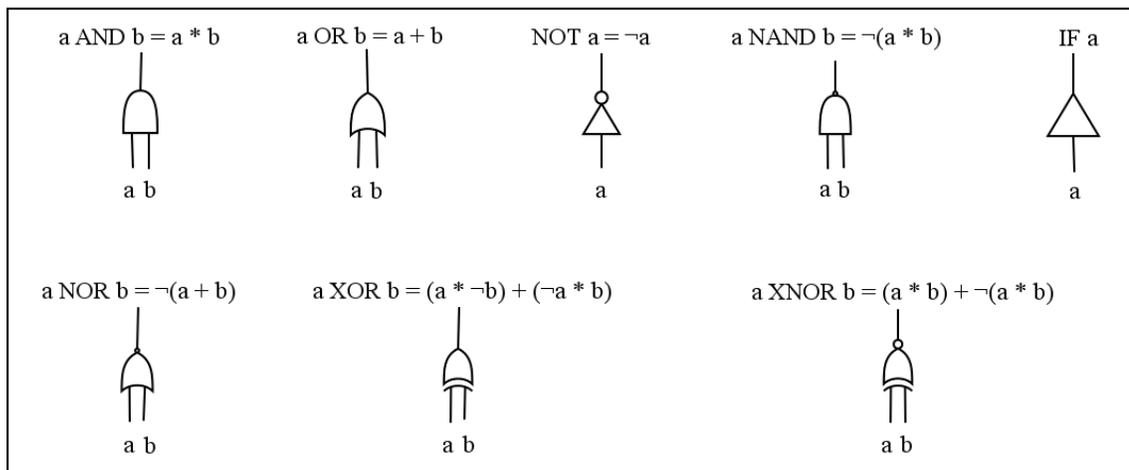


Figura 5.2: Las compuertas lógicas básicas

### **La Universalidad de las compuertas lógicas**

Hemos visto las compuertas lógicas básicas, pero ¿por qué se les conoce como básicas? Existen muchísimos arreglos de circuitos que nos permiten hacer cosas más complejas y más interesantes como los flip-flop, registros, barrel shifters, etc, pero todos estos circuitos por más interesantes que parezcan internamente poseen 3 de las compuertas lógicas descritas anteriormente: AND, OR y NOT, y es que con ellas podemos armar toda la lógica que requerimos para computar lo que sea, inclusive si tomamos solamente la NAND y NOR, obtenemos el mismo resultado ya que estas dos compuertas contienen a la NOT. A estas compuertas se les conoce como “universales”, y si un sistema las posee puede realizar cómputo universal, o bien tiene una máquina de Turing asociada.

---

## Capítulo 6

# Construcciones basadas en colisiones

### 6.1. Objetos de la regla 126 con memoria

Hasta ahora hemos visto colisiones que implican dos o tres partículas dentro del espacio de evoluciones, estas colisiones nos permitieron explorar un poco el comportamiento de la regla. Sin embargo, como sucede en nuestro universo, a pesar de que se requiere conocer la interacción entre dos elementos, nuestro mundo trabaja con miles de partículas, las cuales juntas generan resultados más complejos y son los que percibimos. En esta sección describiremos algunos resultados que genera la regla 126 con memoria cuando añadimos muchas partículas dentro del espacio de evoluciones, los cuales los etiquetaremos de acuerdo a su comportamiento colectivo.

#### 6.1.1. Eaters

Por su traducción al español “comedores”, son estructuras que hacen eso: comen gliders. Los eaters suelen ser también gliders que se alimentan de otros, conservan su forma pero se desplazan algunas células ya sea a la izquierda o a la derecha. En la figura 6.1 podemos observar algunos eaters que posee la regla 126 con memoria.

En la figura 6.1, podemos observar 4 ejemplos de eaters, los cuales describiremos a continuación:

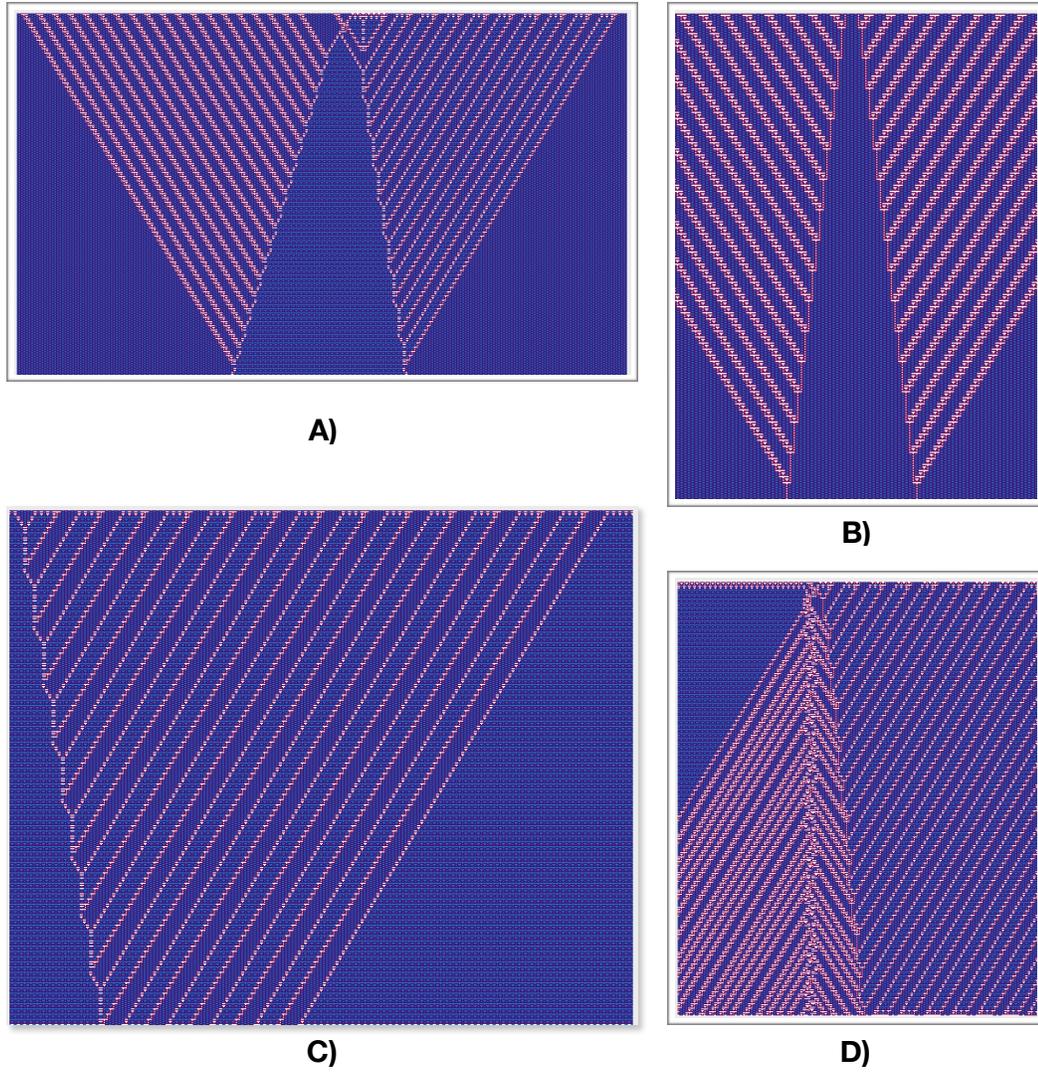


Figura 6.1: Algunos ejemplos de eaters

- a) Este es un eater que se dispersa tanto del lado izquierdo como del derecho, y viaja a dos velocidades distintas:
- La primera que viaja hacia la izquierda tiene una velocidad de  $V_{izq} = \frac{3}{19} = 0,158$
  - La segunda que viaja hacia la derecha tiene una velocidad de  $V_{der} = -\frac{3}{39} = -0,077$
- b) Este eater al contrario, maneja velocidades iguales tanto a la izquierda como a la derecha, la cual es  $V = \frac{2}{25} = \pm 0,08$
- c) El 3er eater combina los dos fondos periódicos a la par que se desplaza de izquierda a derecha, con una velocidad  $V = -\frac{6}{55} = -0,109$
- d) Finalmente, el 4to eater, el cual es un glider-gun que va comiendo gliders de su lado derecho a la vez que avanza, tiene una velocidad de  $V = -\frac{12}{100} = -0,12$

### 6.1.2. Black-holes

Un “hoyo negro”, al igual que los eaters, son estructuras que se comen gliders y mantienen su forma, la diferencia es que no se mueven mientras lo hacen, no se percibe ningún cambio de posición en ellos. En la figura 6.2 podemos observar un ejemplo de hoyo negro.

El hoyo negro de la figura 6.2 tiene un periodo bastante grande, aunque su velocidad es mínima. La parte interesante de este hoyo negro es que consume distintos gliders a la izquierda y a la derecha, siendo un ejemplo de complejidad dentro de la regla.

### 6.1.3. Solitons

Los solitones son estructuras que permiten que los atraviese otros gliders sin afectarse ellos ni afectar a los gliders, dentro del estudio de las señales, las ondas que se comportan como solitones juegan un papel muy importante en las comunicaciones. En la figura 6.3 podemos observar dos solitones de la regla 126, uno que trabaja en el fondo periódico 1 y el otro en el 2do fondo.

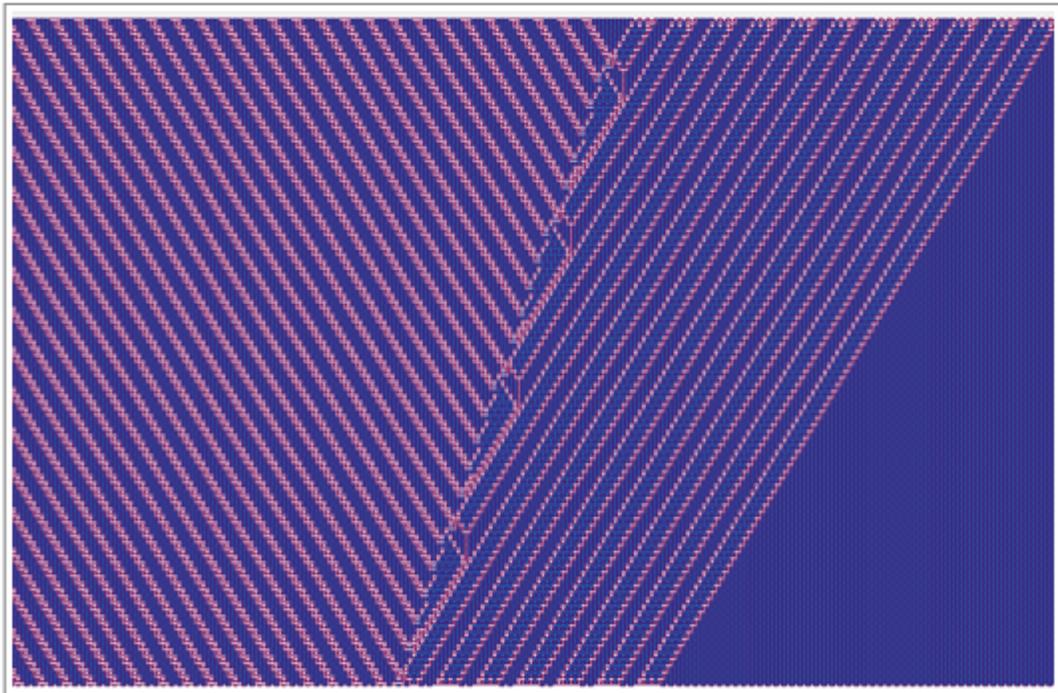


Figura 6.2: Algunos ejemplos de hoyos negros

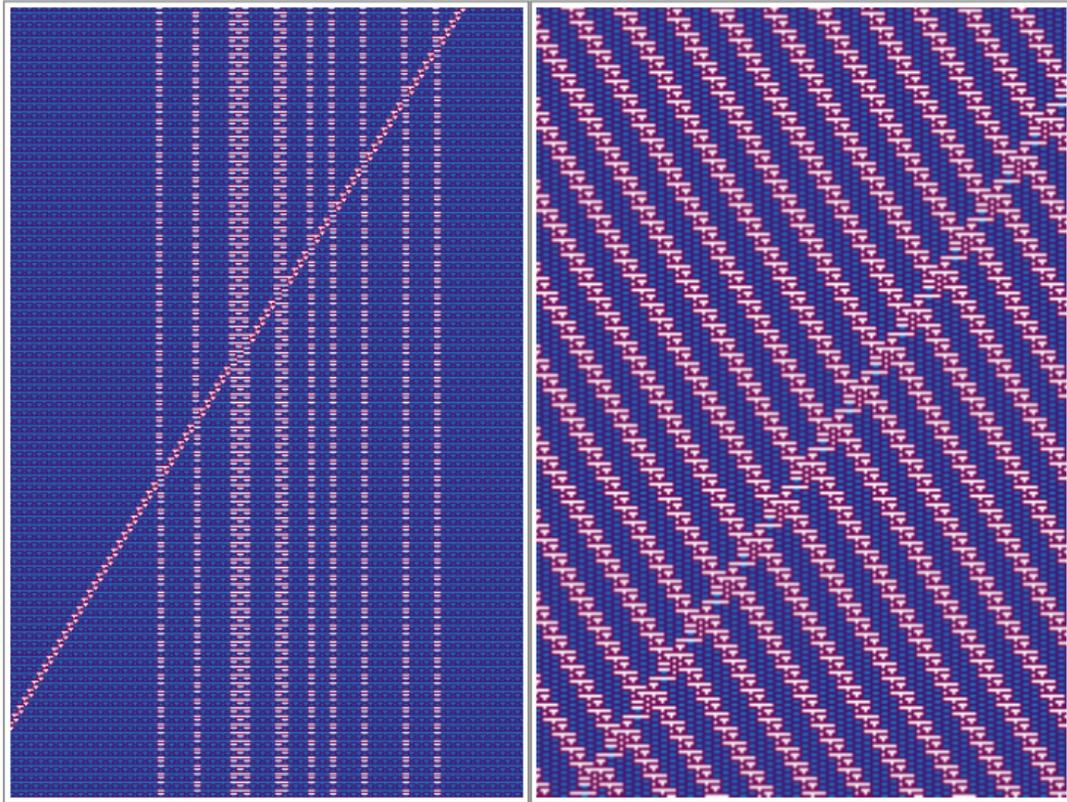


Figura 6.3: Algunos ejemplos de solitones

En la figura 6.3, podemos observar que ambos solitones se desplazan hacia la izquierda, sin embargo uno de ellos permite el paso de gliders y el otro de still-life, por lo que podemos diseñar registros empleándolos.

## 6.2. Computabilidad de la regla

Ahora que conocemos los conceptos básicos de la sección anterior, vamos a explorar el poder de cómputo de la regla 126 con memoria de 4 generaciones, tenemos todas las herramientas que requerimos: hemos colisionados combinaciones binarias y ternarias relevantes y tenemos las ecuaciones que nos permitirán el diseño de compuertas o bien desde la Jerarquía de Chomsky. En esta sección mostraremos los resultados y las conclusiones a las que llegamos de la exploración.

### 6.2.1. Lenguajes regulares

Un lenguaje regular ocupa el tipo 3 dentro de la jerarquía de Chomsky y es el más elemental a la hora de describir lenguajes y reconocer cadenas que pertenezcan a éste. Vamos a describir un lenguaje regular empleando colisiones de partículas.

#### Lenguaje $(01)^n$

Definimos lo siguiente:

1. Sea el alfabeto  $\Sigma = \{0, 1\}$
2. Sea la cadena vacía  $\epsilon = ""$
3. Definimos el siguiente lenguaje regular:
  - $L = \{(0, 1)^n | n \geq 0\}$
4. Algunas cadenas que pertenecen a este lenguaje son las siguientes:  $\{\epsilon, 01, 0101, 010101, 01010101, \dots\}$

De esta definición podemos obtener su expresión regular, citada en la ecuación 6.1

$$RE = (01)^* \tag{6.1}$$

Si graficamos el autómata finito no determinista de esta expresión regular obtenemos la figura 6.4

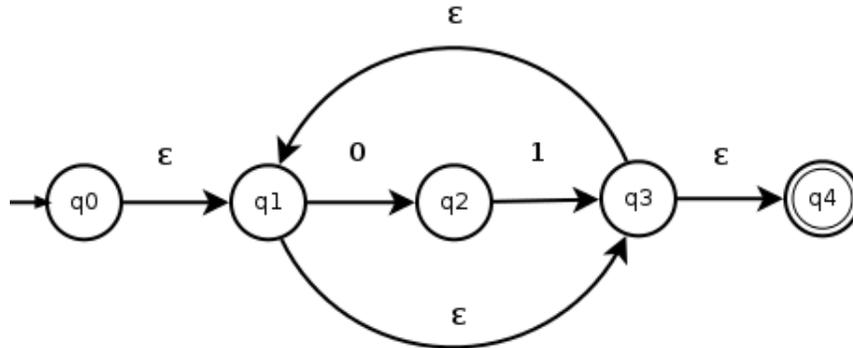


Figura 6.4: Autómata finito no determinista del lenguaje regular  $(01)^*$

Si utilizamos el algoritmo de Thompson[14] para pasar de un Autómata Finito No Determinista a uno Determinista obtenemos la figura 6.5

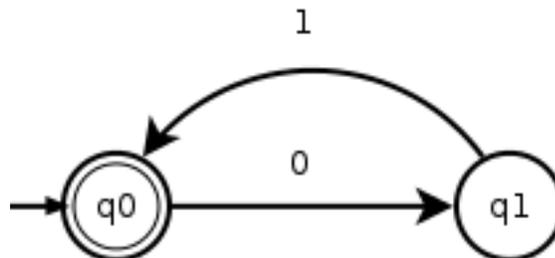


Figura 6.5: Autómata finito determinista del lenguaje regular  $(01)^*$

Teniendo nuestro Autómata Finito Determinista, podemos obtener la tabla de transiciones, la cual está en la tabla 6.1

Ahora vamos a hacer dos tipos de equivalencias: las equivalencias caracter-partícula y las equivalencias estado-partícula. Para las primeras tenemos que:

1. El glider  $g_4$  será igual a 0
2. El glider  $g_6$  será igual a 1

Estado	0	1
$\rightarrow *q_0$	$q_1$	$\emptyset$
$q_1$	$\emptyset$	$q_0$

Cuadro 6.1: Tabla de transiciones del AFD del lenguaje  $(01)^*$

Para las equivalencias estado-partícula, tenemos que:

1. El still-life  $s_2$  será igual al estado  $q_0$
2. El glider  $g_5$  será igual al estado  $q_1$

Utilizando estas equivalencias, podemos modificar la figura 6.5 con la nueva notación, la cual está en la figura 6.6, como podemos observar, ahora los estados están etiquetados por partículas y las transiciones por otras.

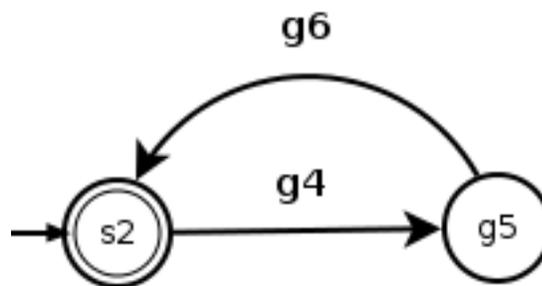


Figura 6.6: Autómata finito determinista del lenguaje regular  $(01)^*$  con las nuevas equivalencias

De igual manera podemos hacer el cambio en la tabla de transiciones, la cual quedaría como se muestra en la tabla 6.2.

Estado	$g_4$	$g_6$
$\rightarrow *s_2$	$g_5$	$\emptyset$
$g_5$	$\emptyset$	$s_2$

Cuadro 6.2: Tabla de transiciones del AFD del lenguaje  $(01)^*$  con partículas

Ahora observemos como trabaja este lenguaje regular con las colisiones entre las partículas cuando queremos reconocer determinadas cadenas:

**Para la cadena vacía:** Si tenemos de entrada la cadena vacía  $\epsilon$ , tenemos que no habrán transiciones dentro del autómata, sin embargo siempre arranca en el estado inicial  $s_2$  y como también es estado final, será una cadena aceptada por el lenguaje. En la figura 6.7 podemos observar el espacio de evoluciones y la nula alteración de éste.

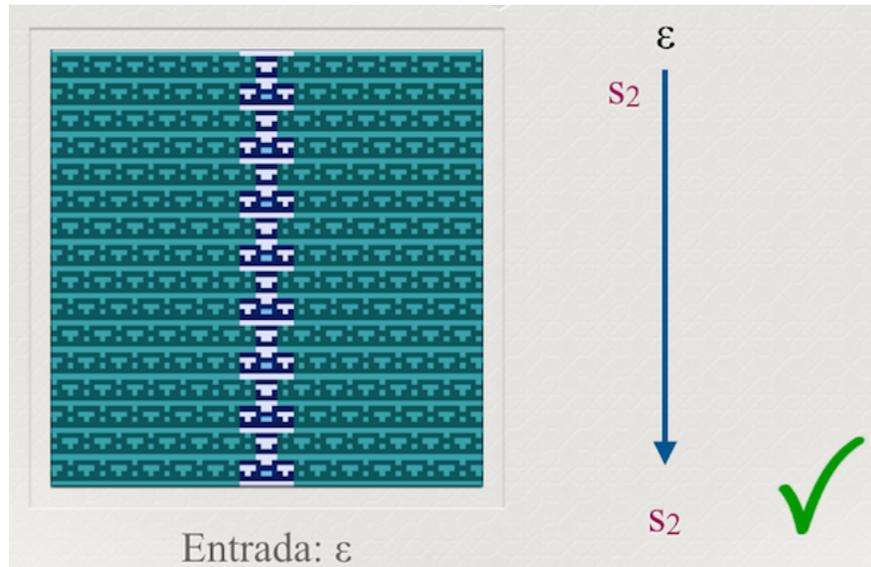


Figura 6.7: Evaluación de la cadena vacía  $\epsilon$

**Para un cero como entrada:** Si ahora introducimos un 0 y lo evaluamos con el autómata, arrancaríamos en el estado  $s_2$  y de acuerdo a nuestra nueva tabla de transiciones, nos moveríamos a  $g_5$  cuando recibimos a  $g_4$  (la equivalencia del 0) como entrada, sin embargo  $g_5$  no es un estado final, por lo cual la cadena 0 no sería aceptada por el lenguaje. En la figura 6.8 podemos observar este comportamiento en el espacio de evoluciones.

**Para un cero y uno como entrada:** Si tenemos de entrada la cadena 01 y la evaluamos con el autómata, arrancaríamos en el estado  $s_2$  y nos moveríamos a  $g_5$  al leer  $g_4(0)$ , y después como estamos en  $g_5$  y recibimos un  $g_6$  (equivalencia del 1), regresamos a  $s_2$ , y como  $s_2$  es nuestro estado final, la cadena sería aceptada por el lenguaje. En la figura 6.9 podemos observar este comportamiento en el espacio de evoluciones.

**Una cadena más grande(010101010):** Ahora usaremos una cadena un tanto

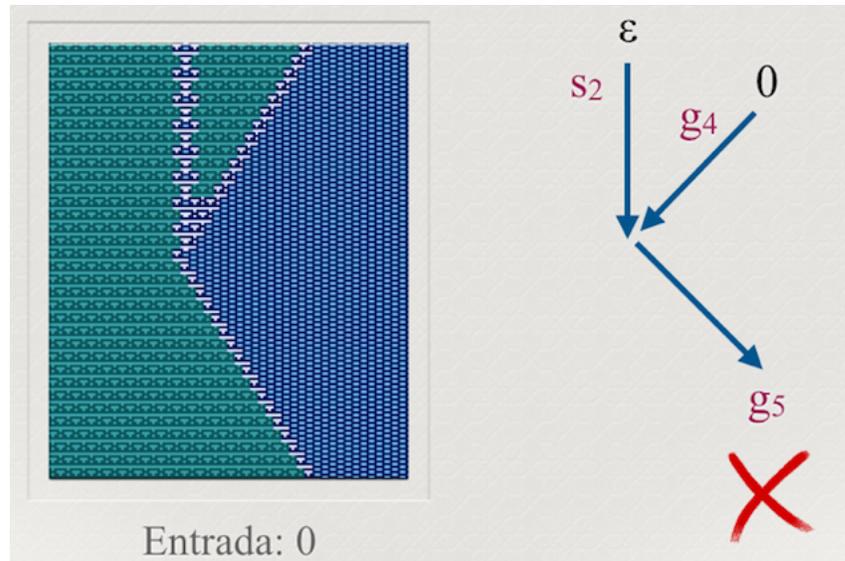


Figura 6.8: Evaluación de la cadena 0

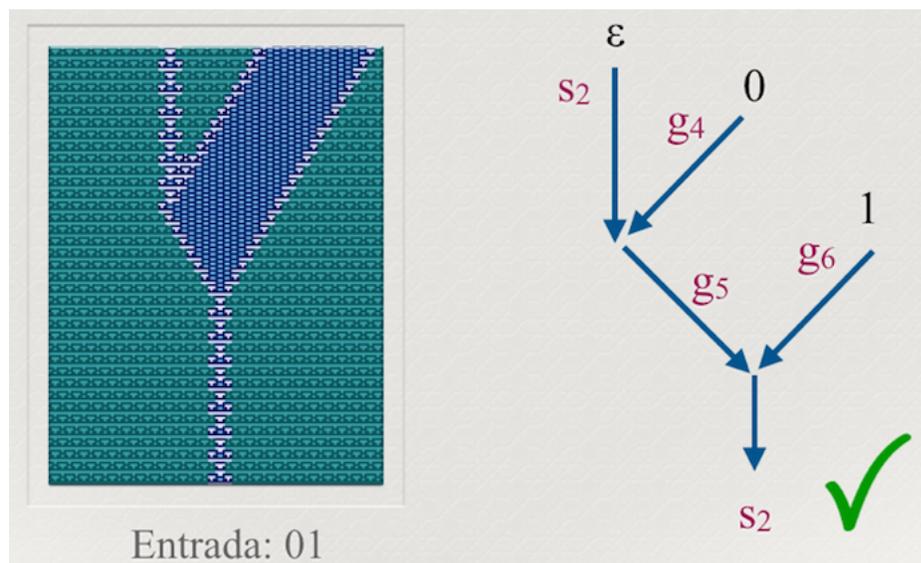


Figura 6.9: Evaluación de la cadena 01

grande, la cadena 010101010, aunque pareciera que va a ser aceptada por el lenguaje, debido a que termina con un 0 nuestro autómata la rechazará. En la figura 6.10 podemos observar cómo evoluciona con lo anteriormente explicado y el resultado que es un falso.

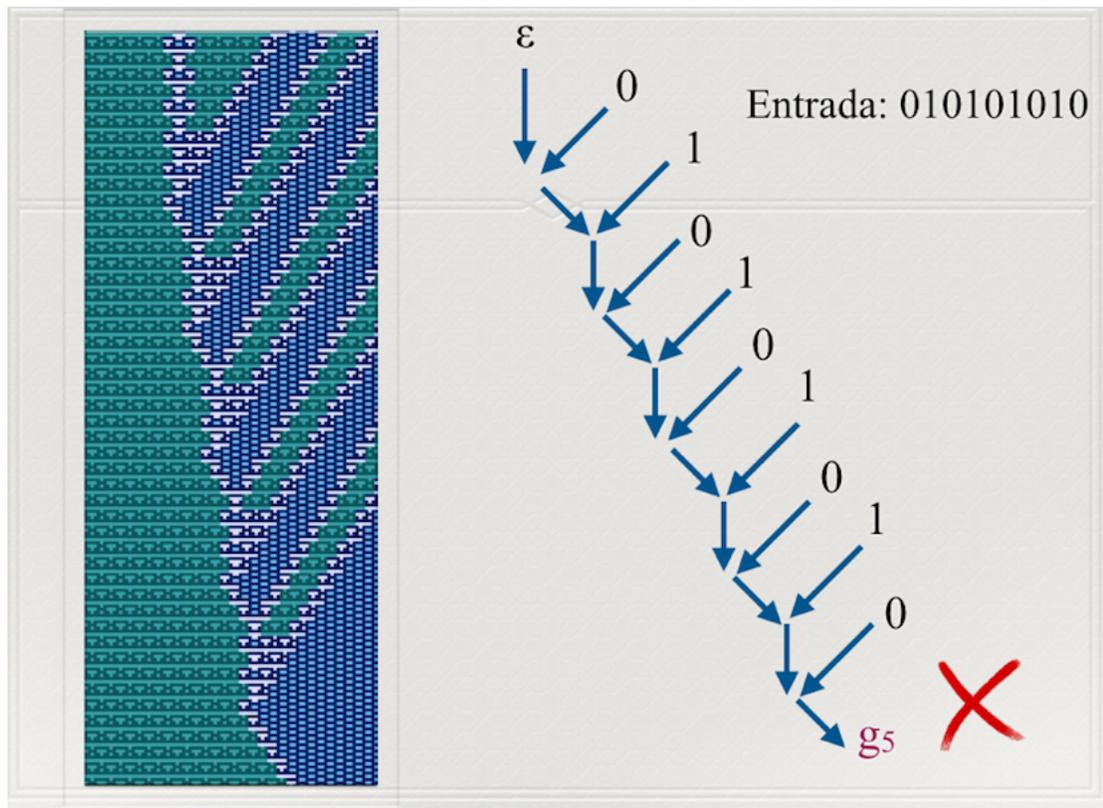


Figura 6.10: Evaluación de la cadena 010101010

**Una cadena más grande(01010101):** Haremos una evaluación similar a la anterior, solamente que ahora quitaremos el 0 del final de la cadena, así sería una cadena que pertenece al lenguaje que definimos. En la figura 6.11 podemos observar la evolución.

Este es un ejemplo de diseño de lenguaje regular, podríamos cambiar las equivalencias de los caracteres y ahora usar letras como  $a$  y  $b$ .

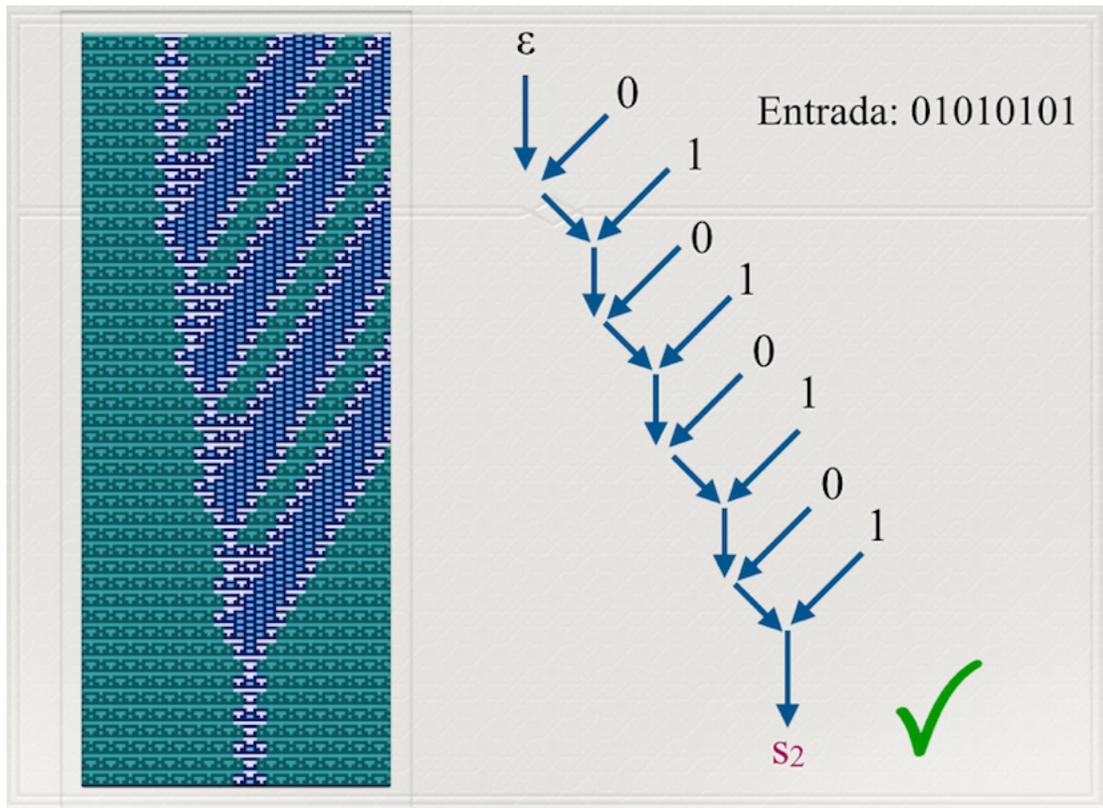


Figura 6.11: Evaluación de la cadena 01010101

### 6.2.2. Gramáticas Libres de Contexto

Las gramáticas libres de contexto pertenecen al tipo 2 dentro de la jerarquía de Chomsky y definen reglas de producción para generar cadenas que pertenezcan al lenguaje, de igual forma permiten reconocer cadenas como las tipo 3. En esta sección se ejemplificará una gramática libre de contexto.

#### Lenguaje $(01)^n$

Tomaremos el lenguaje definido en la sección 6.2.1 y definiremos su gramática libre de contexto de la siguiente manera:

1.  $G = (\{A\}, \{0, 1, \lambda\}, P, S)$ , dónde  $P$  contiene las siguientes producciones:
  - $S \rightarrow A$
  - $A \rightarrow 01A$
  - $A \rightarrow \lambda$

Ahora, volveremos a hacer equivalencias de la definición de nuestra gramática con las partículas de la siguiente manera:

1.  $G = (\{g_5\}, \{g_4, g_6, s_2\}, P, S)$ , dónde  $P$  contiene las siguientes producciones:
  - $S \rightarrow g_5$
  - $g_5 \rightarrow g_4g_6g_5$ , la cual se obtiene al realizar la colisión:  $g_5 \leftrightarrow g_2 + g_2$
  - $g_5 \rightarrow s_2$ , la cual se obtiene al realiza la colisión:  $g_5 \leftrightarrow g_6$

Vamos a realizar un ejemplo empleando esta gramática, lo que queremos es generar la cadena 010101 empleando nuestras reglas de producción y empezando por S. Primeramente cambiarías a S por  $g_5$ , y después requerimos aplicar 3 veces la producción  $g_5 \rightarrow g_4g_6g_5$  ya que  $g_4 = 0$  y  $g_6 = 1$ , y a su vez nos devuelve  $g_5$  que es nuestro no terminal, esta producción la obtenemos si colisionamos  $g_5$  contra  $g_2 + g_2$ , después para general la cadena vacía  $s_2 = \lambda$ , colisionamos  $g_5$  con  $g_6$  y obtenemos nuestra cadena. En la figura 6.12 podemos observar este comportamiento en el espacio de evoluciones y las equivalencias con la gramática.

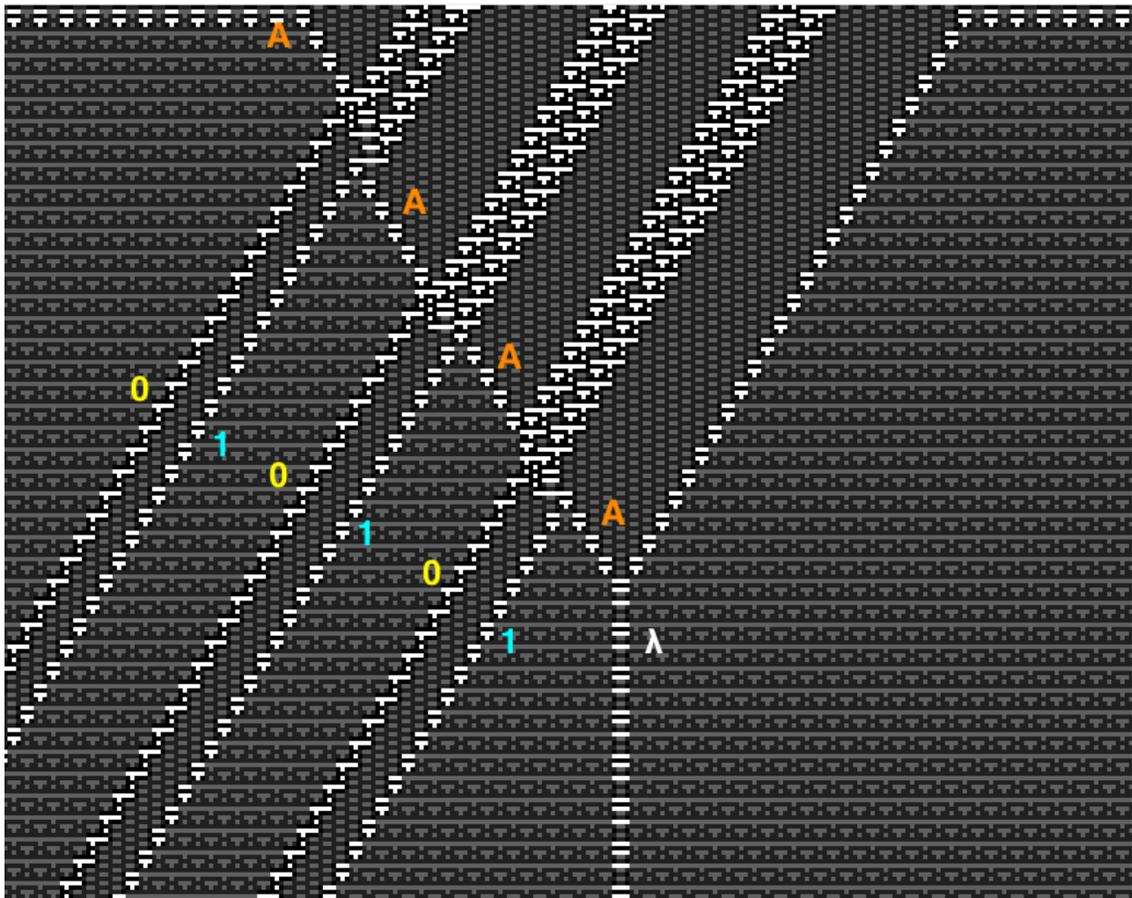


Figura 6.12: Generación del árbol de derivación para la cadena 010101

De esta manera, nosotros podemos definir gramáticas libres de contexto que nos permitan generar cadenas a través de las reglas de derivación, las cuales se controlarán con las colisiones de las partículas.

### 6.2.3. Compuertas Lógicas

Las compuertas lógicas, como se describieron en el capítulo 5, permiten realizar operaciones lógicas entre uno o más bits, dando como resultado un bit que va a depender su valor de una tabla de verdad. Tomaremos las compuertas lógicas descritas en dicho capítulo e intentaremos simular su comportamiento con las colisiones de partículas.

#### Compuerta XOR

La compuerta XOR está definida en la sección 5.3.2 y podemos decir de manera general que si recibe entradas iguales, entonces el resultado será 0, en otro caso será un 1. Vamos a modelar esta compuerta empleando las partículas  $g_1$ ,  $g_1^2$  y  $g_2$  de la siguiente manera:

1.  $g_1$  será nuestra entrada “a” de la compuerta XOR, y cuando esta entrada sea igual a 0, significa que la partícula no está presente en el espacio de evoluciones, cuando sea igual a 1, implica que se encuentra en el espacio.
2.  $g_1^2$  será nuestra entrada “b” de la compuerta XOR, y cuando esta entrada sea igual a 0, significa que la partícula no está presente en el espacio de evoluciones, cuando sea igual a 1, implica que se encuentra en el espacio.
3.  $g_2$  actuará como nuestro operador XOR, cuando lo apliquemos a las entradas hará la operación y nos devolverá el resultado de acuerdo a lo que recibió de entrada.

En la tabla 6.3, podemos ver la tabla de verdad de la compuerta XOR con las nuevas equivalencias, así como la ecuación que la describe y el resultado que obtenemos.

En la figura 6.13 podemos observar cómo se comportan las partículas cuando evaluamos las 4 diversas posibilidades, tomando al glider  $g_2$  como nuestra operador

$g_1$	$g_1^2$	$g_1 \text{ XOR } g_1^2$	Ecuación	Resultado
0	0	0	$g_2$	$g_2$
0	1	1	$g_1^2 + g_2$	$g_1^2$
1	0	1	$g_1 + g_2$	$g_1$
1	1	0	$g_1 + g_1^2 + g_2$	$\emptyset$

Cuadro 6.3: Tabla de verdad de la compuerta XOR con partículas

XOR, y podemos observar que corresponden con las definidas dentro de la tabla de verdad.

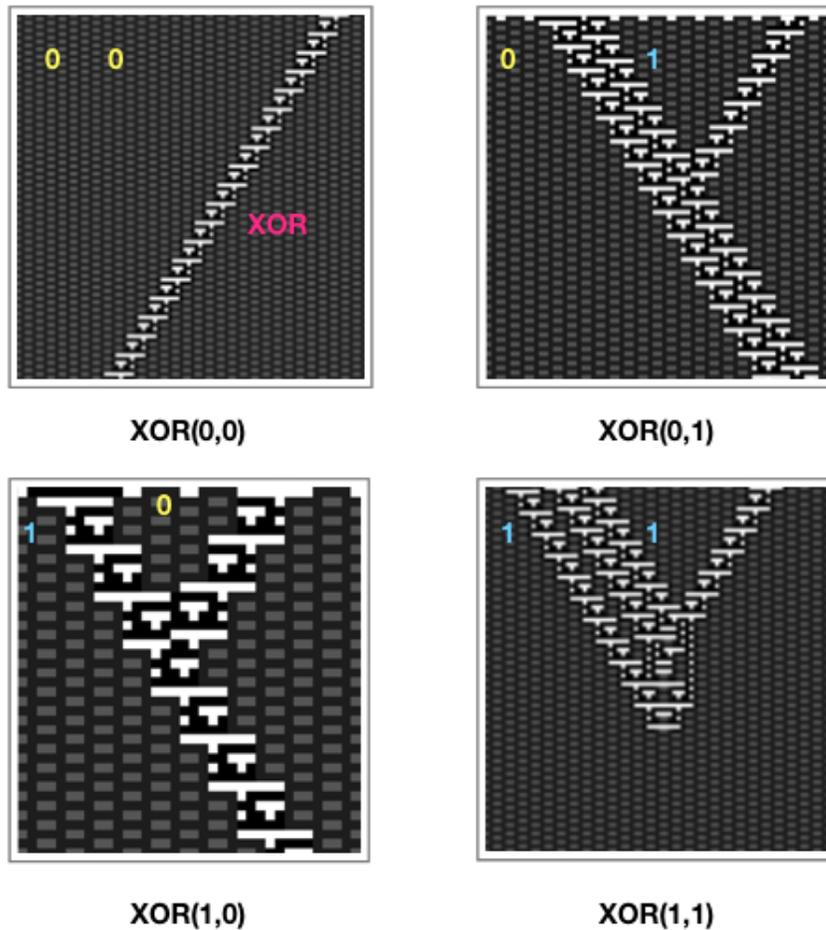


Figura 6.13: Las 4 combinaciones de la tabla de verdad para la compuerta XOR

### Condicional IF-THEN

El condicional IF-THEN es una compuerta que evalúa la sentencia: si A entonces B, y su tabla de verdad nos indica que solamente si recibe un 0 en la primer entrada y un 1 en la segunda, la salida será 0, en otro caso sera un 1. Podemos modelar esta compuerta empleando el mismo esquema que la NAND pero cambiando el operador

1.  $g_1$  será nuestro equivalente al valor 1 en binario.
2.  $g_1^2$  será nuestro equivalente al valor 0 en binario.
3.  $g_2 + g_2$  actuará como nuestro operador IF-THEN, cuando lo apliquemos a las entradas hará la operación y nos devolverá el resultado de acuerdo a lo que recibió de entrada.

Así, en la tabla 6.4, podemos observar la tabla de verdad de la compuerta IF-THEN y su equivalente a las ecuaciones de partículas. Podemos observar que las ecuaciones son muy similares a la NAND, solamente que nuestro operador IF-THEN es  $g_2 + g_2$ .

a	b	IF a THEN b	Ecuación	Resultado
0	0	1	$g_1^2 + g_1^2 + g_2 + g_2$	$g_1$
0	1	0	$g_1^2 + g_1 + g_2 + g_2$	$g_1^2$
1	0	1	$g_1 + g_1^2 + g_2 + g_2$	$g_1$
1	1	1	$g_1 + g_1 + g_2 + g_2$	$g_1$

Cuadro 6.4: Tabla de verdad de la compuerta IF-THEN con partículas

En la figura 6.14 podemos observar las 4 combinaciones dentro del espacio de evoluciones, las cuales nos indican que efectivamente podemos simular el comportamiento de la compuerta con las colisiones, esta compuerta junto con la NAND trabajan con el mismo esquema de equivalencias entre partículas, por lo que podemos utilizarlas juntas para generar circuitos más grandes.

### Compuerta NAND

La compuerta NAND está definida en la sección 5.3.2 y podemos decir de manera general que si recibe ambas entradas como un 1 entonces devolverá un 0, en otro

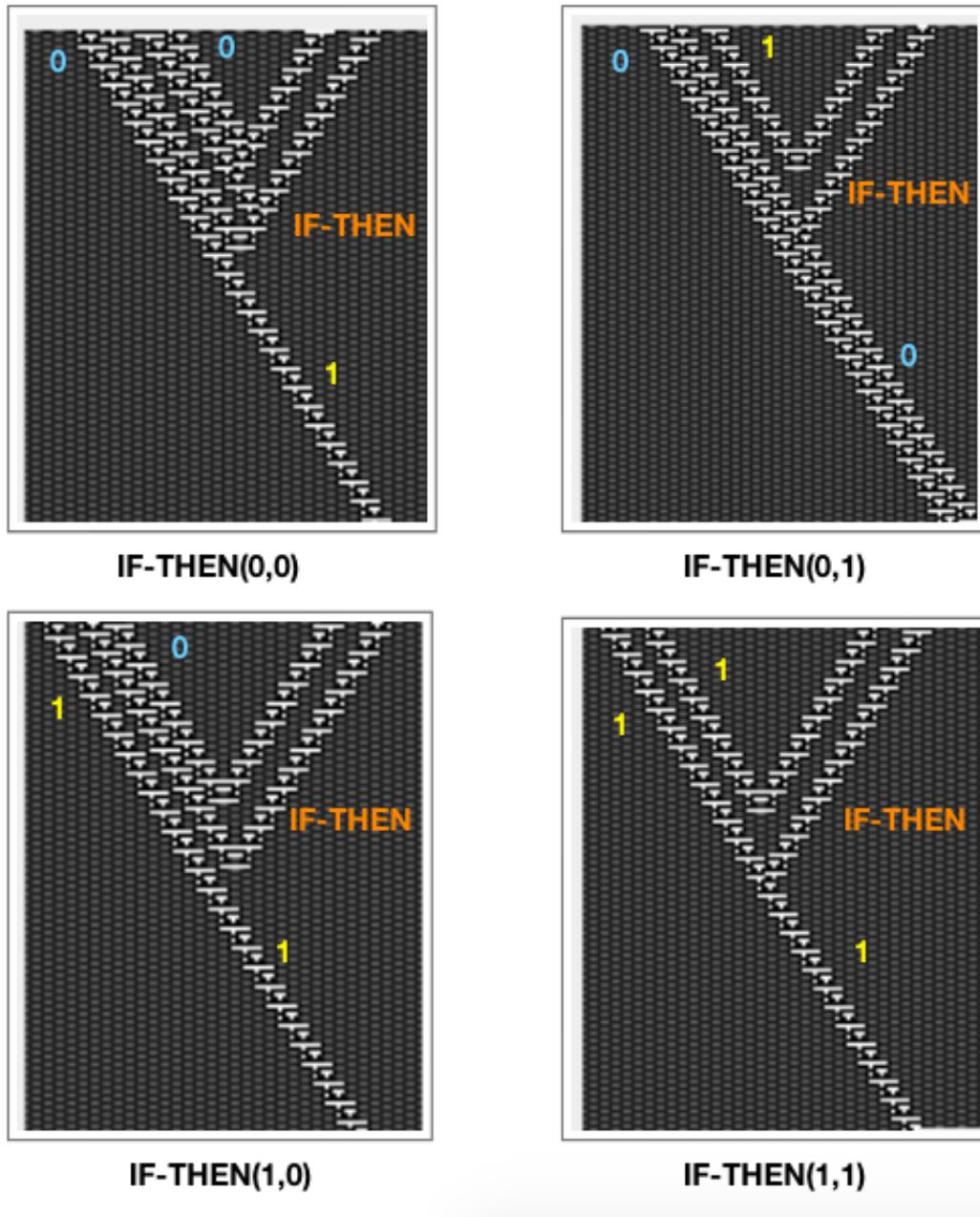


Figura 6.14: Las 4 combinaciones de la tabla de verdad para la compuerta IF-THEN

caso devolverá un 1. Vamos a modelar esta compuerta empleando las partículas  $g_1$ ,  $g_1^2$  y  $g_2^2$  de la siguiente manera:

1.  $g_1$  será nuestro equivalente al valor 1 en binario.
2.  $g_1^2$  será nuestro equivalente al valor 0 en binario.
3.  $g_2^2$  actuará como nuestro operador NAND, cuando lo apliquemos a las entradas hará la operación y nos devolverá el resultado de acuerdo a lo que recibió de entrada.

En la tabla 6.5, podemos ver la tabla de verdad de la compuerta NAND con las nuevas equivalencias, así como la ecuación que la describe y el resultado que obtenemos.

a	b	a NAND b	Ecuación	Resultado
0	0	1	$g_1^2 + g_1^2 + g_2^2$	$g_1$
0	1	1	$g_1^2 + g_1 + g_2^2$	$g_1$
1	0	1	$g_1 + g_1^2 + g_2^2$	$g_1$
1	1	0	$g_1 + g_1 + g_2^2$	$g_1^2$

Cuadro 6.5: Tabla de verdad de la compuerta NAND con partículas

En la figura 6.15 podemos observar cómo se comportan las 4 combinaciones posibles de la tabla de verdad de la compuerta NAND, y podemos observar que hay consistencia tanto en las partículas de entrada, como en el operador, y nos devuelve el resultado correspondiente. Una de las implicaciones del hecho de que la regla 126 con memoria de 4 generaciones empleando una función de mayoría nos permita modelar una compuerta NAND, es que debido a que esta compuerta es universal, podemos decir que la regla es **lógicamente universal**.

### Compuerta AND

La compuerta AND está definida en la sección 5.3.2 y podemos decir de manera general que si recibe ambas entradas como un 1 entonces devolverá un 1, en otro caso devolverá un 0. Vamos a modelar esta compuerta empleando la compuerta NAND que definimos anteriormente, para esto vamos a usar las NAND de la figura 6.16

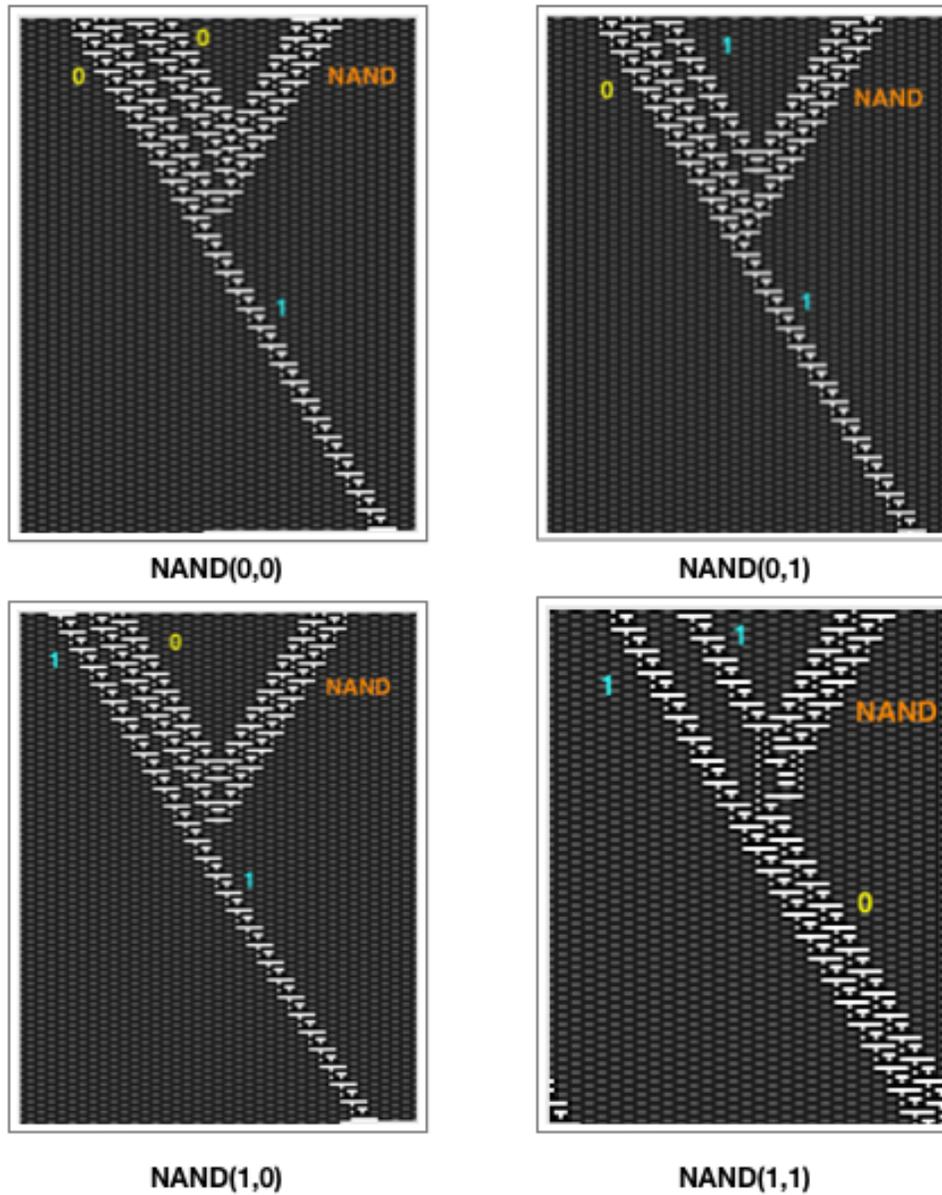


Figura 6.15: Las 4 combinaciones de la tabla de verdad para la compuerta NAND

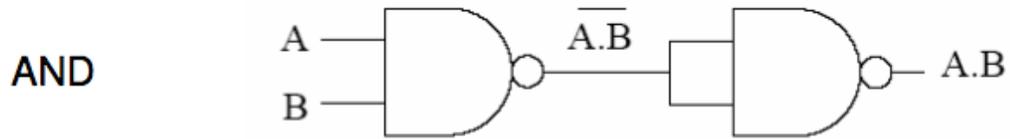


Figura 6.16: La compuerta AND construida con base en NAND

En la tabla 6.6, podemos ver la tabla de verdad de la compuerta AND utilizando puras NAND, así como el resultado obtenido

a	b	a AND b	Ecuación	Resultado
0	0	0	$(g_1^2 \text{ NAND } g1^2) \text{ NAND } (g1^2 \text{ NAND } g1^2)$	$g_1^2$
0	1	0	$(g_1^2 \text{ NAND } g1) \text{ NAND } (g1^2 \text{ NAND } g1)$	$g_1^2$
1	0	0	$(g1 \text{ NAND } g1^2) \text{ NAND } (g1 \text{ NAND } g1^2)$	$g_1^2$
1	1	1	$(g1 \text{ NAND } g1) \text{ NAND } (g1 \text{ NAND } g1)$	$g1$

Cuadro 6.6: Tabla de verdad de la compuerta AND con NAND

En la figura 6.17 podemos observar cómo se comportan las 4 combinaciones posibles de la tabla de verdad de la compuerta NAND, y podemos observar que hay consistencia tanto en las partículas de entrada, como en el operador, y nos devuelve el resultado correspondiente.

### Compuerta OR

La compuerta OR está definida en la sección 5.3.2 y podemos decir de manera general que si recibe alguna entrada que esté en 1 entonces devolverá un 1, en otro caso devolverá un 0. Vamos a modelar esta compuerta empleando la compuerta NAND que definimos anteriormente, para esto vamos a usar las NAND de la figura 6.18

En la tabla 6.7, podemos ver la tabla de verdad de la compuerta OR utilizando puras NAND, así como el resultado obtenido

En la figura 6.19 podemos observar cómo se comportan las 4 combinaciones posibles de la tabla de verdad de la compuerta NAND, y podemos observar que hay

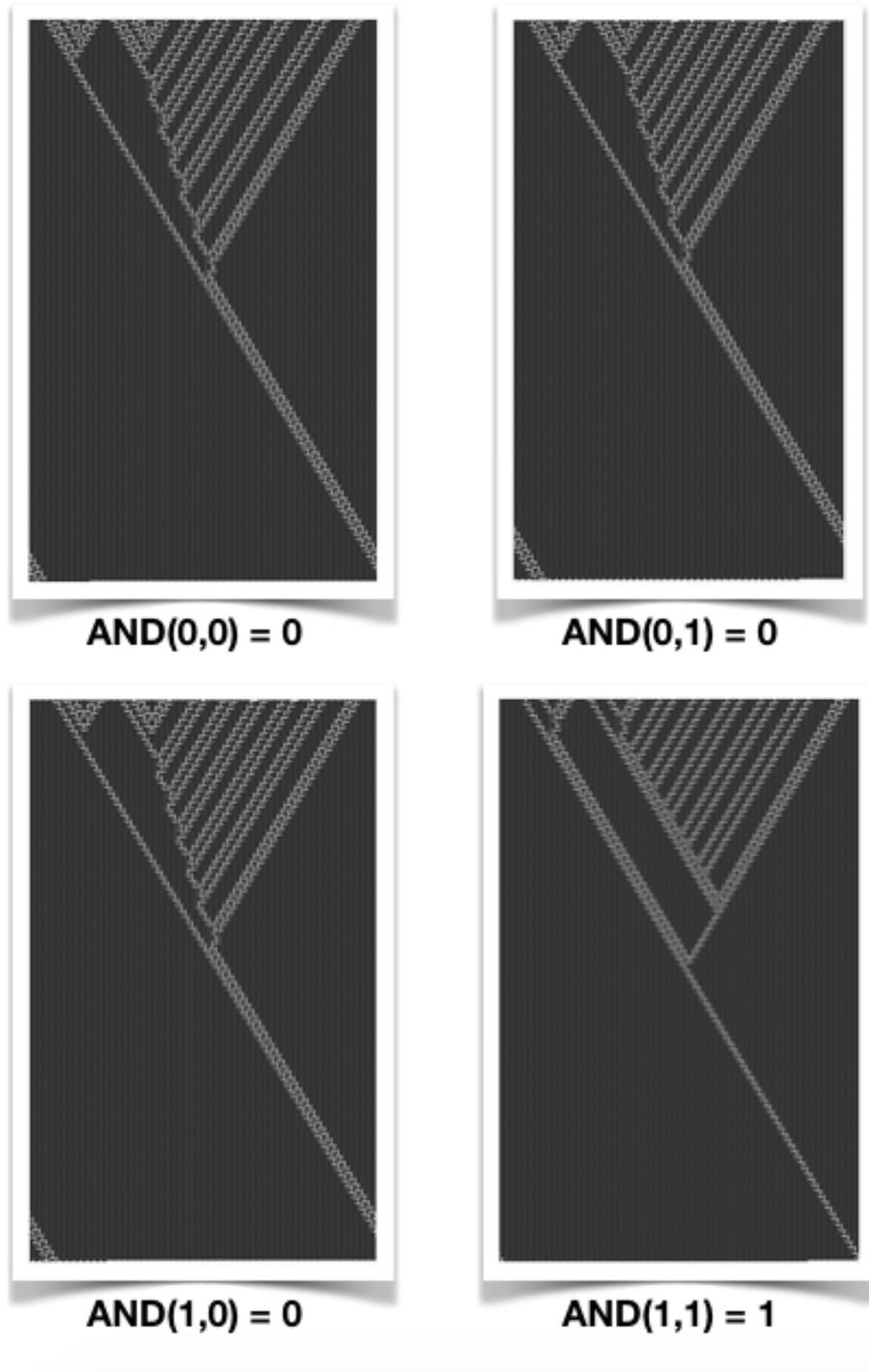


Figura 6.17: Las 4 combinaciones de la tabla de verdad para la compuerta AND

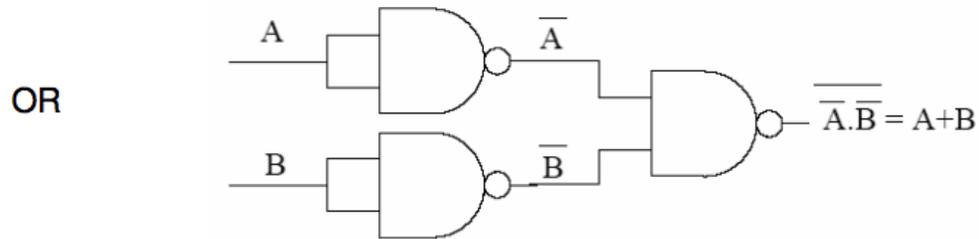


Figura 6.18: La compuerta OR construida con base en NAND

a	b	a OR b	Ecuación	Resultado
0	0	0	$(g_1^2 \text{ NAND } g1^2) \text{ NAND } (g1^2 \text{ NAND } g1^2)$	$g_1^2$
0	1	1	$(g_1^2 \text{ NAND } g1^2) \text{ NAND } (g1 \text{ NAND } g1)$	$g_1$
1	0	1	$(g_1 \text{ NAND } g1) \text{ NAND } (g1^2 \text{ NAND } g1^2)$	$g_1$
1	1	1	$(g_1 \text{ NAND } g1) \text{ NAND } (g1 \text{ NAND } g1)$	$g_1$

Cuadro 6.7: Tabla de verdad de la compuerta OR con NAND

consistencia tanto en las partículas de entrada, como en el operador, y nos devuelve el resultado correspondiente.

### Compuerta NOT

La compuerta NOT está definida en la sección 5.3.2 y simplemente es invertir la salida que recibimos, así que si recibimos un 1 entonces saldrá un 0. Vamos a modelar esta compuerta empleando la compuerta NAND que definimos anteriormente, para esto vamos a usar las NAND de la figura 6.20

En la tabla 6.8, podemos ver la tabla de verdad de la compuerta NOT utilizando puras NAND, así como el resultado obtenido

a	NOT a	Ecuación	Resultado
0	1	$g_1^2 \text{ NAND } g1^2$	$g_1$
1	0	$g1 \text{ NAND } g1$	$g_1^2$

Cuadro 6.8: Tabla de verdad de la compuerta NOT con NAND

En la figura 6.21 podemos observar cómo se comportan las 2 combinaciones po-

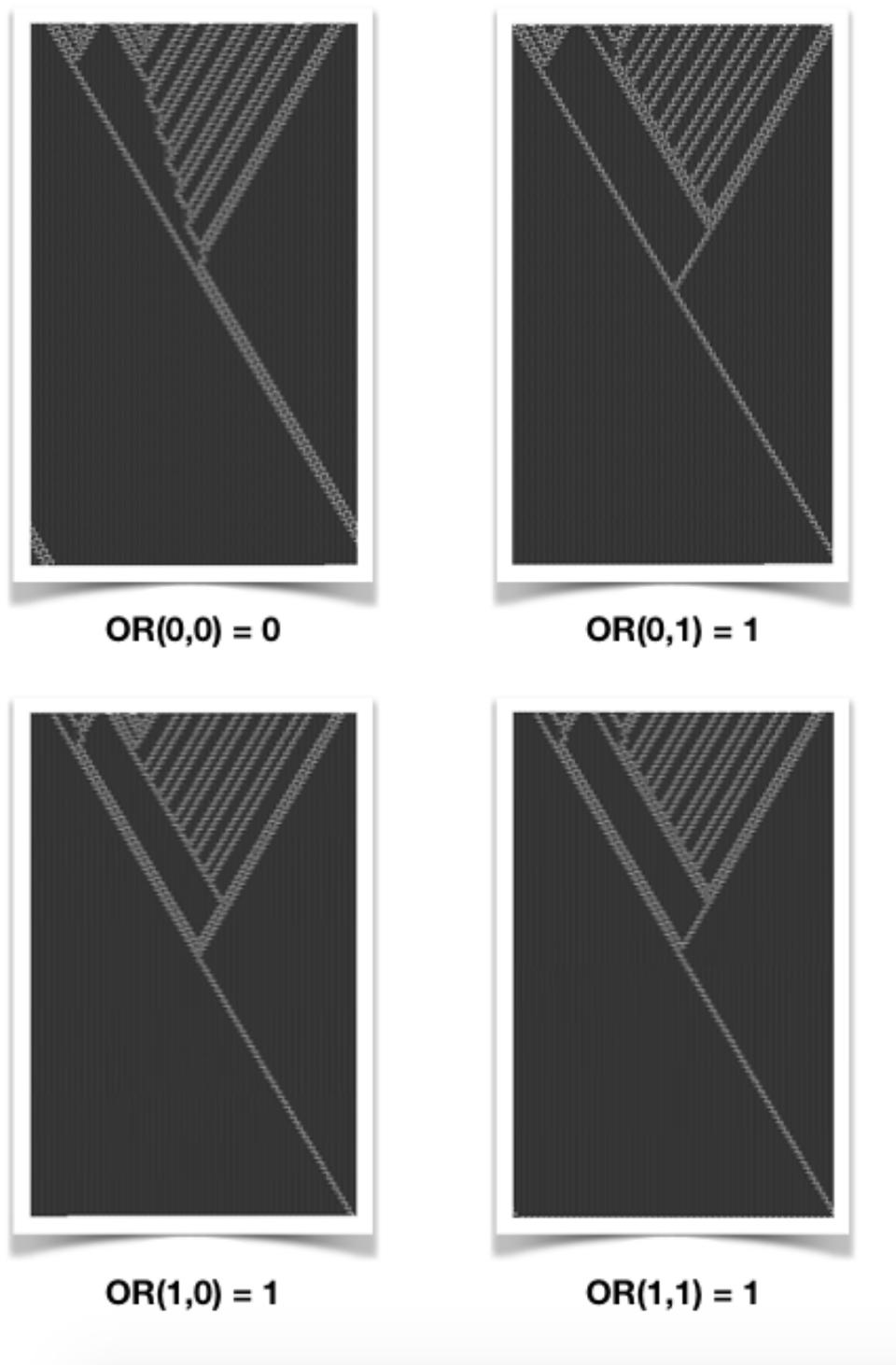


Figura 6.19: Las 4 combinaciones de la tabla de verdad para la compuerta OR

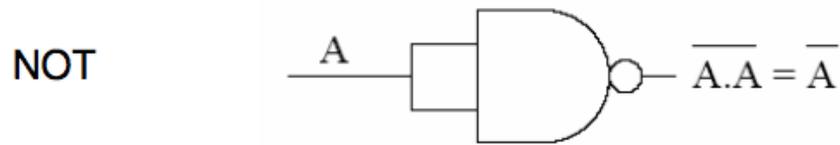


Figura 6.20: La compuerta NOT construida con base en NAND

sibles de la tabla de verdad de la compuerta NOT, y podemos observar que hay consistencia tanto en las partículas de entrada, como en el operador, y nos devuelve el resultado correspondiente.

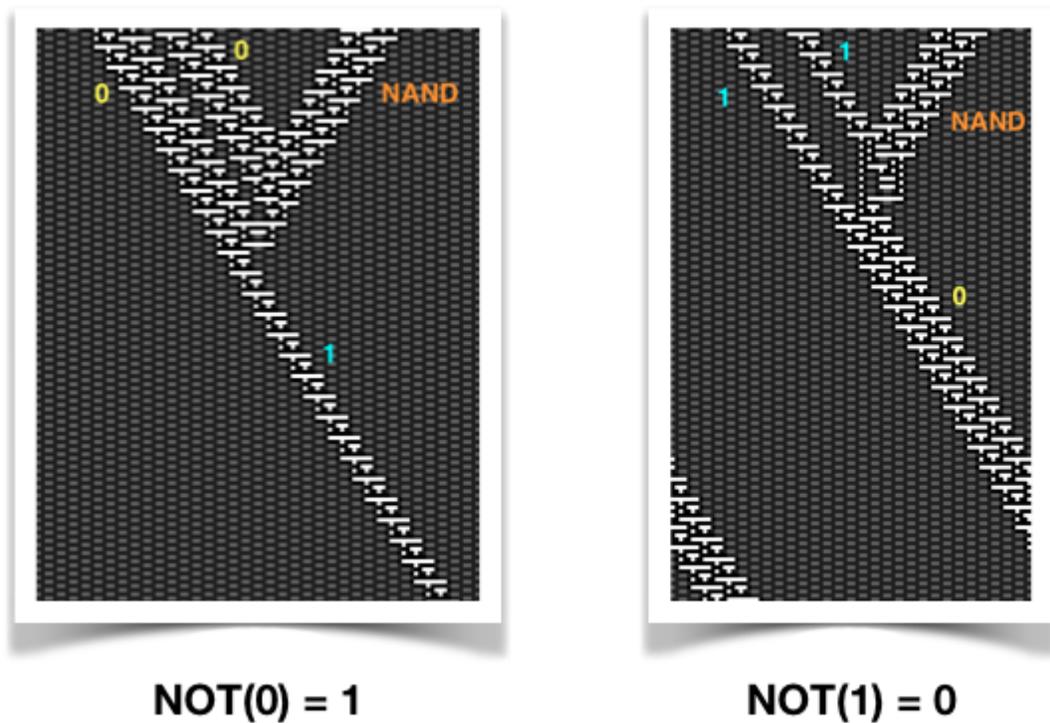


Figura 6.21: Las 2 combinaciones de la tabla de verdad para la compuerta NOT

#### 6.2.4. Poder de computación de la regla

Una vez que hemos terminado el análisis de los posibles sistemas que se pueden modelar empleando las colisiones de las partículas, podemos hacer un dictamen de lo encontrado y lo que posiblemente podría estar en la regla:

1. **La regla es lógicamente universal:** Este hecho se fundamenta en la simulación de la compuerta NAND usando las partículas, debido a que esta compuerta es una de las dos compuertas universales (NAND y NOR), y que con ellas se pueden construir todas las demás compuertas y ecuaciones de acuerdo al álgebra de boole, si contenemos a esta compuerta entonces nos permite decir que la regla es lógicamente universal.
2. **La regla podría tener una máquina de Turing asociada:** Uno de los puntos más relevantes dentro del análisis de un autómata celular, es saber si la regla es capaz de realizar computación universal, o bien que tiene una máquina de Turing asociada. La regla 126 con memoria, debido a que es lógicamente universal y pudo simular los lenguajes tipo 3 y 2 de la jerarquía de Chomsky, nos indica que la probabilidad de que la regla tenga una máquina de Turing asociada es alta, por lo que valdría la pena intentar con algunos modelos.
3. **La regla nos permite simular circuitos lógicos:** Esta implicación nace de la premisa de que es lógicamente universal, ya que con la compuerta NAND podemos simular cualquier otra compuerta anidando varias, podemos recibir una expresión en álgebra de boole y simularla únicamente con esta operación, también podemos usar la operación IF-THEN debido a que trabajan en el mismo espacio y con las mismas equivalencias.

En resumen, el poder de computación de la regla es alto y que nos permita simular circuitos lógicos nos abre un paso para hacer estructuras compuestas más complejas.

---

## Capítulo 7

# SOL: Simulador de Operaciones Lógicas

En esta sección describiremos el producto de este Trabajo Terminal: un sistema que nos permitirá simular todos los diseños lógicos descritos en el capítulo 5. El contenido de este capítulo tratará las partes esenciales para desarrollar un sistema completo, las cuales son: requerimientos de usuario y de sistema, la arquitectura del sistema, los módulos que estarán dentro de la arquitectura y las clases que contendrán, las tecnologías que se emplearon (lenguajes de programación, frameworks, etc) y finalmente las pruebas del sistema que validarán el cubrimiento de los requerimientos.

### 7.1. Requerimientos

En esta sección describiremos los requerimientos que son imprescindibles para el sistema y que sin ellos SOL no podría funcionar (requerimientos funcionales), y los requerimientos que dan un valor agregado pero no son elementales para que nuestro sistema funcione (requerimientos no funcionales).

### 7.1.1. Requerimientos funcionales

1. **RF1. Guardado de la condición inicial:** El sistema debe permitir al usuario guardar la condición inicial de una evolución, ya sea en el tiempo  $t_0$  o bien los 4 primeros tiempos en el caso de la regla con memoria.
2. **RF2. Guardado de la evolución:** El sistema debe permitir al usuario guardar la evolución del autómata, en la cantidad de evoluciones que haya establecido, tanto en formato de texto plano, como en una exportación ya sea a PDF o como imagen PNG.
3. **RF3. Añadido de mosaicos por elemento:** El sistema debe permitir al usuario trabajar la regla con memoria empleando mosaicos para rellenar el espacio de evoluciones, tanto para los fondos periódicos como para las partículas.
4. **RF4. Múltiples mosaicos en el espacio de evoluciones:** El sistema debe permitir al usuario añadir múltiples mosaicos en el espacio de evoluciones para su evaluación.
5. **RF5. Conversión de las primeras 4 evoluciones a una matriz regular:** El sistema debe transformar los primeros cuatro tiempos del espacio de evoluciones rellenado con mosaicos en una matriz regular para evaluarse con la regla con memoria.
6. **RF6. Carga inicial de los datos:** El sistema debe permitir al usuario introducir la condición inicial del sistema de al menos 4 maneras distintas:
  - **De manera elemental:** Esto significa que cargará una célula viva en el centro del espacio de evoluciones, el resto serán células muertas.
  - **De manera aleatoria:** El usuario podrá elegir los porcentajes de ceros y unos que desea que aparezcan en la condición inicial.
  - **Desde un archivo:** El sistema debe permitir la carga de archivos con condiciones iniciales para evaluar el autómata.
  - **De manera manual:** El usuario podrá ingresar las condiciones iniciales de forma manual.

7. **RF7. Filtrado de fondos periódicos:** El sistema debe permitir filtrar las evoluciones de la regla con memoria ya sea aplicando el filtro para uno o los dos fondos periódicos.
8. **RF8. Opción de ayuda al usuario:** El sistema debe mostrar una opción en el menú para consultar el manual de usuario.
9. **RF9. Carga de operaciones lógicas:** El sistema debe permitir al usuario cargar las operaciones lógicas que desee emplear.

### 7.1.2. Requerimientos no funcionales

1. **RNF1. El sistema requiere ser manejado de forma instintiva:** Este requerimiento indica que, aunque el usuario no haya leído el manual de usuario, sea capaz de usar una gran parte del sistema.
2. **RNF2. El sistema requiere ser escalable:** Debido a que a futuro se planea extender este sistema a uno más complejo, la programación de este sistema debe ser escalable para poder reutilizar la mayor parte del código en el futuro y añadir nuevas funcionalidades.

## 7.2. Arquitectura del sistema

La arquitectura de nuestro sistema se puede observar de forma gráfica en la figura 7.1. Como podemos observar, solamente posee a nuestro usuario, el cual va a interactuar con la aplicación una vez la haya instalado en su computadora, no se hicieron manejos de bases de datos o de servidores debido a que con base en los requerimientos no resulta necesario.

## 7.3. Módulos del sistema

Nuestro sistema “Simulador de Operaciones Lógicas”, posee 3 módulos principales como se observa en la figura 7.2, denominados como:



Figura 7.1: La arquitectura del SOL

1. **ACE:** También conocido como el módulo de autómatas celulares elementales, en él meteremos las clases que requeriremos para evaluar las 256 reglas elementales.
2. **ReglaMemoria:** También conocido como el módulo de la regla 126 con memoria de 4 generaciones y función de mayoría, en él tendremos todas las clases para el manejo de mosaicos dentro de la regla, las interacciones con ellos y la transformación a una matriz regular para su evaluación.
3. **OperacionesLógicas:** Este módulo nos permitirá utilizar las operaciones lógicas que ya definimos para verlas dentro del espacio de evoluciones y entender su comportamiento.

### 7.3.1. Autómatas Celulares Elementales

En la figura 7.3 podemos observar el diagrama de clases de los tres módulos de acuerdo al modelo-vista-controlador. Tenemos nuestras interfaces gráficas, nuestro controlador y nuestro modelo para los autómatas elementales. Ahora describiremos por cada paquete cada una de las clases, sus atributos y métodos y para qué sirve.

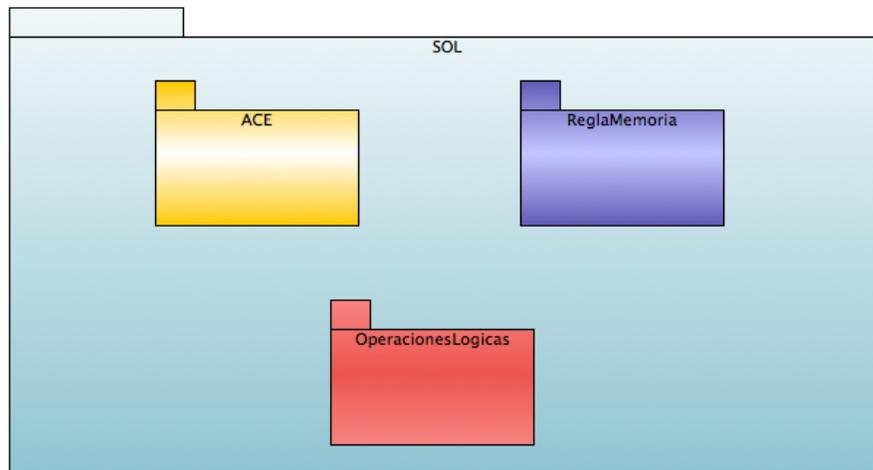


Figura 7.2: La arquitectura del SOL

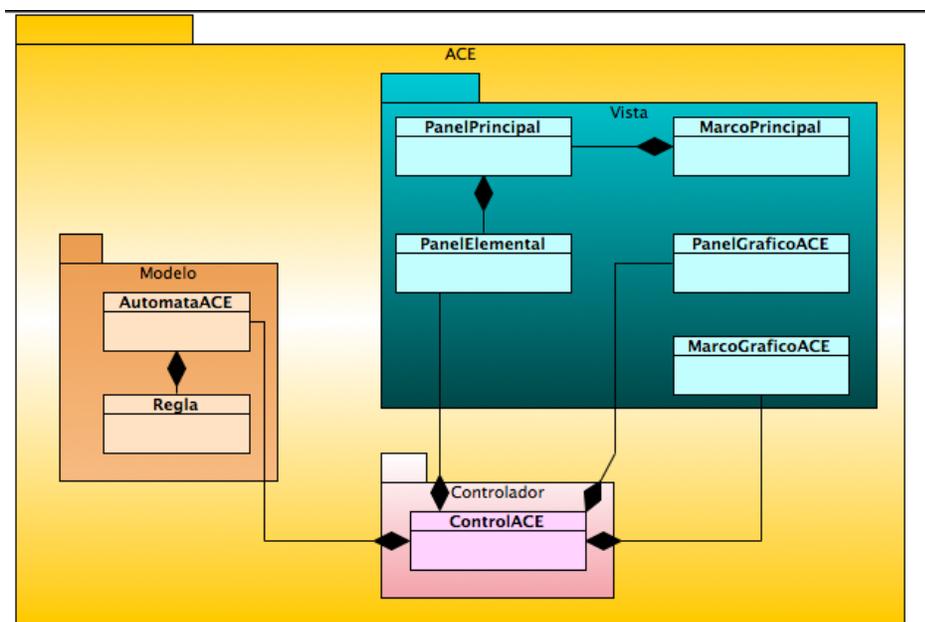


Figura 7.3: Las clases que componen al módulo de los Automatas Celulares Elementales

En la figura 7.4 podemos ver los atributos y métodos más relevantes de las clases, así como su interacción con los otros módulos a través de tenerlos como atributos. A continuación describiremos a detalle cada módulo y cada clase.

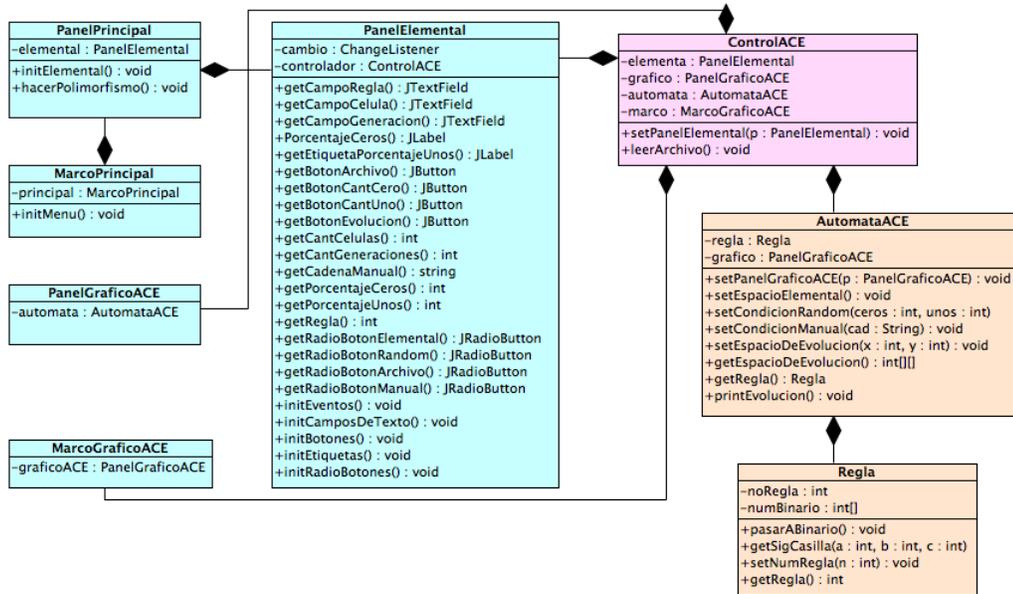


Figura 7.4: Las clases descritas que componen al módulo de los Autómatas Celulares Elementales

### Para el paquete de modelo

En este paquete tenemos dos clases: la clase Regla y la clase AutomataACE, las cuales consisten en:

1. **Regla:** Esta clase nos almacena la definición de la regla que vamos a graficar y las reglas de interacción entre vecinos.
2. **AutomataACE:** Contiene a nuestra regla, el espacio de evoluciones y debido a que éste nos mostrará cómo evoluciona con el paso del tiempo, trabaja con hilos y actualiza el gráfico.

### Para el paquete de vista

En este paquete tenemos cinco clases: `PanelPrincipal`, `PanelElemental`, `MarcoPrincipal`, `PanelGraficoACE` y `MarcoGraficoACE`, las cuales consisten en:

1. **PanelPrincipal:** Esta clase será el panel que contendrá a todos los demás paneles en un futuro, es la que nos permitirá hacer el polimorfismo y el cambio entre módulos.
2. **PanelElemental:** Esta clase contiene todos los gráficos de etiquetas, radio botones, botones y cajas de texto para permitirle al usuario ingresar los datos para evaluar la regla elemental de los ACE.
3. **MarcoPrincipal:** Esta clase es un `JFrame` que contiene al `PanelPrincipal` y solo actúa como contenedor.
4. **PanelGraficoACE:** Esta clase será la que graficará la evolución del autómata conforme pasa el tiempo, nos imprimirá las tiras de células y mostrará que sucede en intervalos finitos de tiempo.
5. **MarcoGraficoACE:** Esta clase también es un `JFrame`, y contiene al `PanelGraficoACE` para mostrarlo al usuario.

### Para el paquete de controlador

En este paquete solamente tenemos una clase: `ControlACE`, la cual se hará cargo de todos los eventos del panel cuando se desea evaluar una regla elemental, tanto las selecciones de entradas como la salida y la graficación mediante hilos.

#### 7.3.2. Regla 126 con memoria

En la figura 7.5 podemos observar el diagrama de clases que compone a la regla 126 con memoria de 4 generaciones, podemos observar que ya existen diversos controladores para la regla, tanto para solamente los aspectos gráficos, como para aspectos ya propiamente de la carga de los mosaicos y la evaluación. A continuación describimos cada clase, su funcionalidad y el objetivo que cubre.

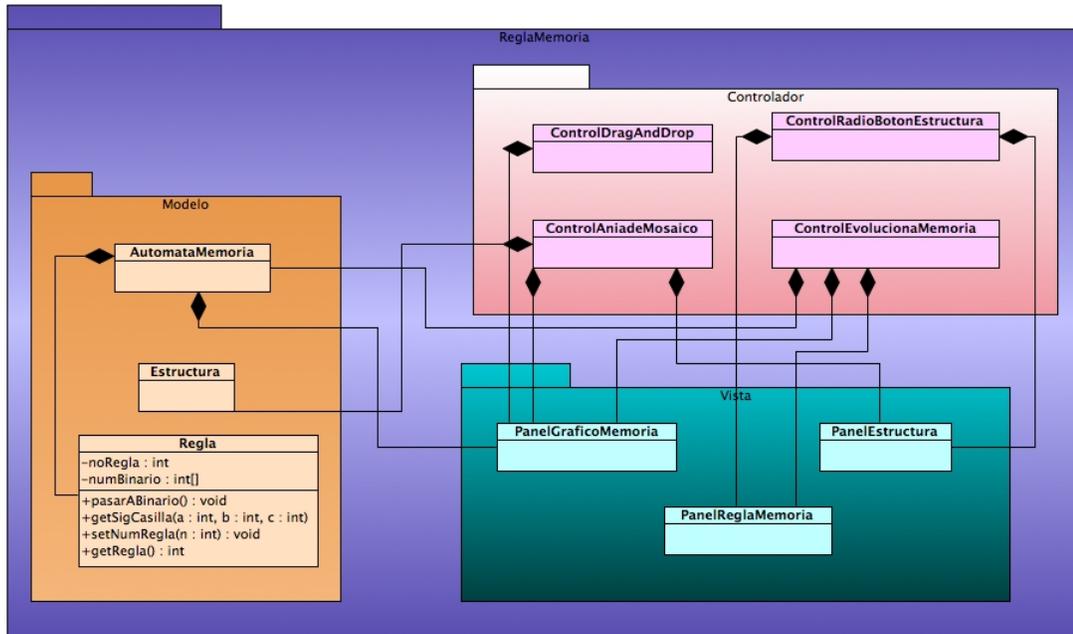


Figura 7.5: Las clases que componen al módulo de la Regla 126 con Memoria

En la figura 7.6 podemos ver los atributos y métodos más relevantes de las clases, así como su interacción con los otros módulos a través de tenerlos como atributos. A continuación describiremos a detalle cada módulo y cada clase.

### Para el paquete de modelo

En este paquete tenemos 3 clases: AutomataMemoria, Estructura y Regla, la clase Regla la explicamos en la sección de los ACE, por lo que como explicaremos las dos clases que se añaden:

1. **AutomataMemoria:** Este autómata, a diferencia del autómata de los ACE, solo trabaja con la regla 126 con memoria de 4 generaciones, recibe una matriz de 4 filas por las columnas que sean(células) y calcula las generaciones hasta 50 (el tamaño del panel).
2. **Estructura:** Ahora, dentro de nuestro sistema tendremos 2 fondos periódicos, 2 still-life y 6 gliders, estos 10 elementos serán tratados como mosaicos y se

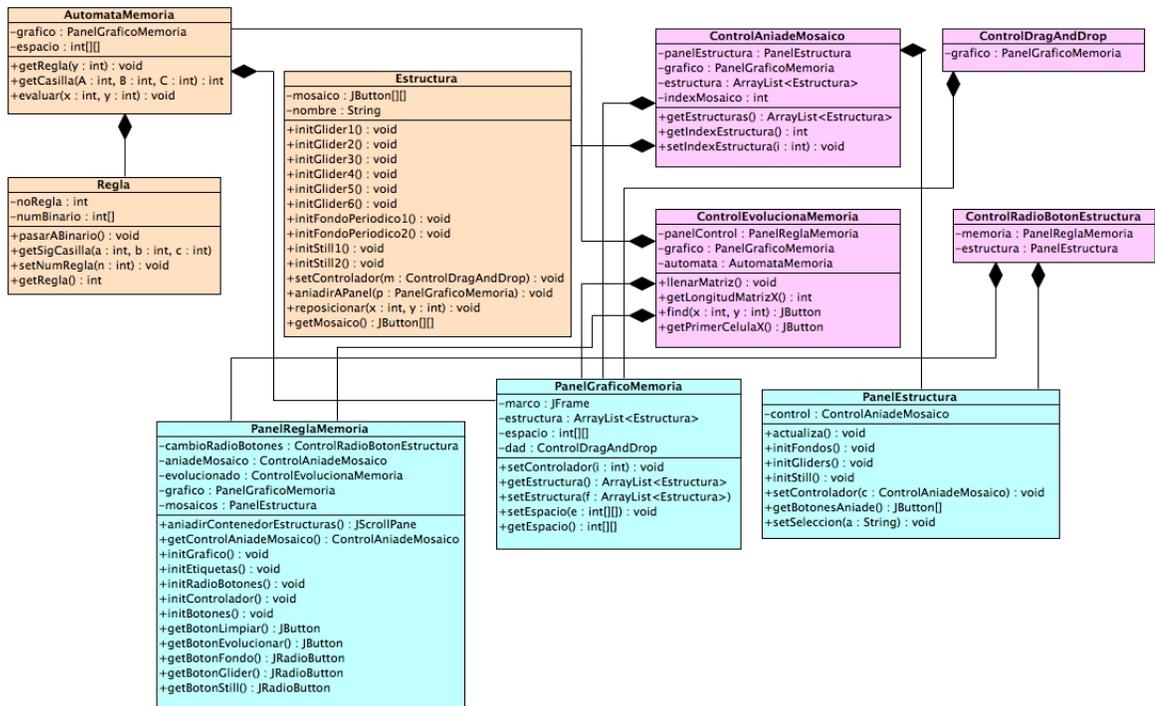


Figura 7.6: Las clases descritas que componen al módulo de la Regla 126 con Memoria

añadirán, pero tiene las mismas características: un conjunto de células que los definen, por lo que los catalogamos como Estructuras.

### Para el paquete de vista

En este paquete nos encontramos con 3 clases: `PanelGraficoMemoria`, `PanelEstructura` y `PanelReglaMemoria`, vamos a describirlas:

1. **PanelGraficoMemoria:** Este panel se encargará de permitirle a usuario arrastrar los mosaicos y acomodarlos a como él desee, también una vez que de clic en el botón de evolucionar del panel de control, se encarga de graficar la matriz regular obtenida de los mosaicos y lo muestra.
2. **PanelReglaMemoria:** Este panel será nuestro panel de control pero para la regla con memoria, en él podremos ver los radio botones de opciones y se encargará de cargar el panel correcto para visualizar los mosaicos y poder agregarlos.
3. **PanelEstructura:** Este panel estará dentro del `PanelReglaMemoria` y se encargará de mostrar los mosaicos correctos de acuerdo a la elección del usuario, así como avisar cuando el usuario le de clic a algún botón de añadir de acuerdo a lo que quiso seleccionar para añadirlo al `PanelGraficoMemoria`.

### Para el paquete de controlador

Este paquete posee 4 controladores: `ControlDragAndDrop`, `ControlAniadeMosaico`, `ControlRadioBotonEstructura` y `ControlEvolucionaMemoria`, los cuales tienen funciones ya sea para los gráficos o bien para la evolución del autómata, los describimos como:

1. **ControlDragAndDrop:** Este controlador se hace cargo de permitir al usuario arrastrar los mosaicos que haya insertado en el `PanelGraficoMemoria`, además de que no le permite moverlos sino es cada 10 pixeles, por lo que mantiene una simetría.

2. **ControlAniadeMosaico:** Este controlador se activa cuando en el PanelEstructura el usuario da clic en algún botón de añadir, entonces detecta qué mosaico fue el que quiere añadir el usuario, y envía la definición de dicho mosaico al PanelGraficoMemoria para su graficación.
3. **ControlRadioBotonEstructura:** Este controlador se hace cargo de que el radio botón que se haya seleccionado en el PanelReglaMemoria, sean los datos que se carguen en el PanelEstructura, y si hay algún cambio se encarga de refrescar dicho panel.
4. **ControlEvolucionaMemoria:** Es el controlador que se encarga de tomar los mosaicos del PanelGraficoMemoria y los convierte a una matriz regular, después actualiza dicho panel mandando esta matriz y evoluciona hasta 50 generaciones.

### 7.3.3. Operaciones Lógicas

En la figura 7.7 podemos observar el diagrama de clases que compone a nuestro módulo de las operaciones lógicas. Esto implica las 3 partes que son: lenguajes regulares, gramáticas libres de contexto y compuertas lógicas. Para ellos utilizamos diversos paneles para mostrar las opciones y de nuevo seguimos el modelo-vista-controlador.

En la figura 7.8 podemos ver los atributos y métodos más relevantes de las clases, así como su interacción con los otros módulos a través de tenerlos como atributos. A continuación describiremos a detalle cada módulo y cada clase.

#### Para el paquete de modelo

Para este paquete tenemos 3 clases: Filtro, AutomataMemoria y Regla. Ya hemos descrito las clases AutomataMemoria y Regla en los módulos anteriores, por lo que describiremos la clase Filtro.

1. **Filtro:** Esta clase nos permite almacenar la matriz original y filtrarla ya sea aplicando el 1er fondo periódico, el 2do fondo periódico o bien ambos al mismo tiempo.

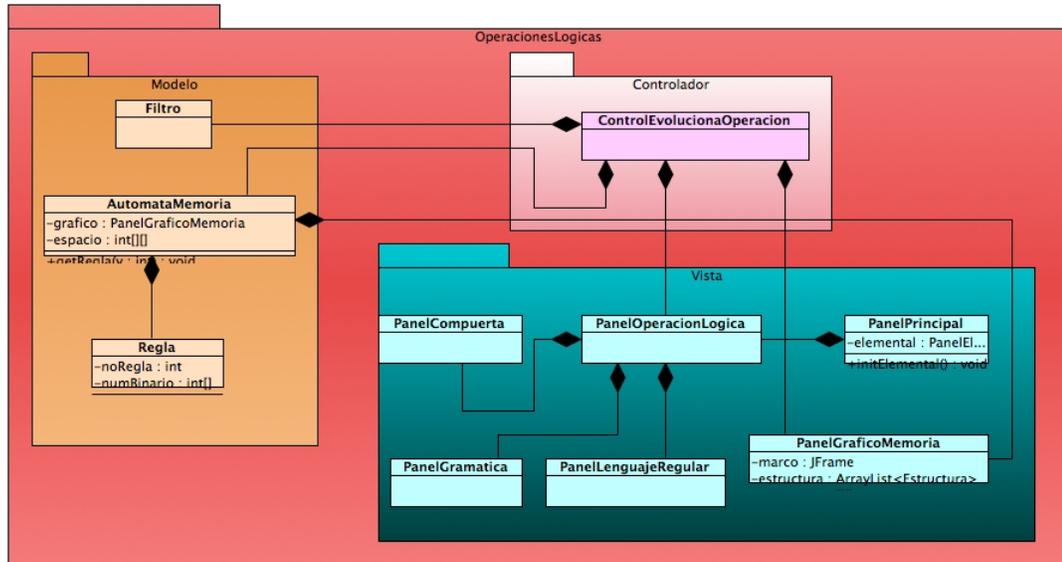


Figura 7.7: Las clases que componen al módulo de Operaciones Lógicas

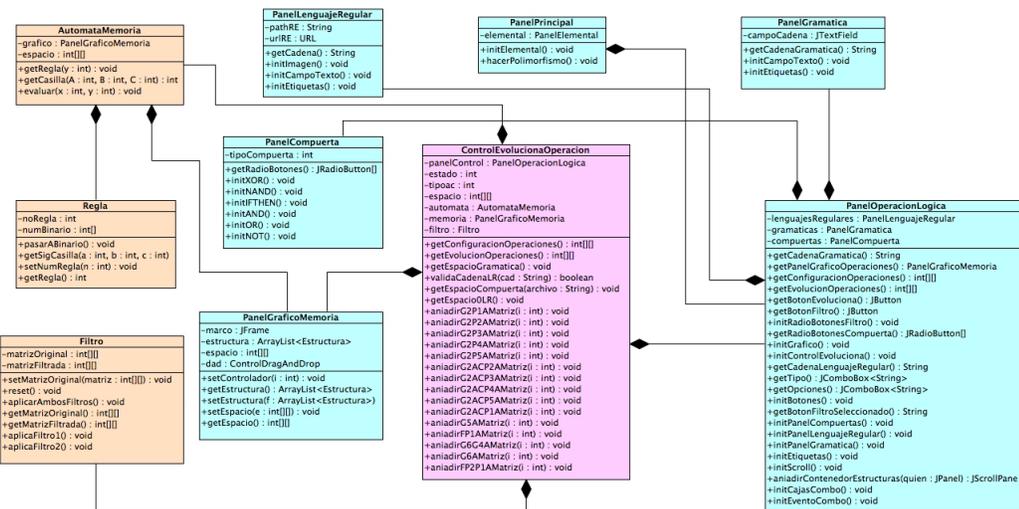


Figura 7.8: Las clases descritas que componen al módulo de la Regla 126 con Memoria

### Para el paquete de vista

Para este paquete tenemos 6 clases, las cuales nos apoyarán a generar las interfaces gráficas con las cuales va a interactuar el usuario y le permitirán seleccionar las opciones correspondientes. Estas clases las enumeramos y describimos a continuación:

1. **PanelCompuerta:** Este panel nos permite observar una tabla con las combinaciones de 0 y 1 disponibles para evaluar la compuerta que hayamos elegido, así como sus ecuación equivalente en partículas y unos radio botones para seleccionar la combinación que deseamos visualizar.
2. **PanelGramatica:** Este panel nos mostrará un campo de texto para poder ingresar la cadena que queremos que se genere con las reglas de producción que tenemos. Entonces cuando el usuario evolucione el autómata, nos permitirá ver la cadena convertida a colisiones de partículas.
3. **PanelLenguajeRegular:** Este panel nos mostrará un campo de texto donde meteremos la cadena que queremos confirmar que pertenezca al lenguaje, para ellos nos mostrará el autómata que hace esta evaluación de acuerdo a la expresión regular que elijamos, evalúa la cadena y nos imprime tanto el mensaje de que pertenece como de que no.
4. **PanelOperacionLogica:** Este panel es el que contendrá a los 3 anteriores, y se encargará de hacer los cambios entre paneles de acuerdo a lo que elija el usuario, así como de enviar la información correcta a nuestro controlador cuando queramos evolucionar o bien filtrar.

### Para el paquete de controlador

Para este paquete solo tenemos una clase, la cual su funcionalidad es:

1. **ControlEvolucionaOperacion:** Se encarga de escuchar a nuestro panel de operaciones lógicas y cuando presionemos algún botón ya sea de evolucionar o bien de filtrar, se hace cargo de recibir la información y mandarla a nuestro autómata y al panel gráfico.

## 7.4. Tecnologías a emplear

En esta sección se describirán las tecnologías empleadas, así como una pequeña justificación del porqué se eligieron. Los lenguajes de programación, paradigmas, versiones, etc, que se emplearon son:

1. **Programación Orientada a Objetos:** Utilizamos este paradigma debido a que nos facilita ver a la regla como un objeto y a los autómatas como otro.
2. **Java:** La razón del uso de Java es que permite la compatibilidad entre computadoras con distinto sistema operativo, únicamente instalando la Java Virtual Machine, además es un lenguaje Orientado a Objetos, lo cual nos permitirá utilizar este paradigma. La versión del jdk a emplearse es la 8.1

## 7.5. Pruebas del sistema

En esta sección describiremos las pruebas que se realizaron del sistema tanto para condiciones ideales como para posibles errores cuando un usuario usa la aplicación. Las pruebas se realizaron por módulos del sistema.

### 7.5.1. Autómatas Celulares Elementales

Al inicial el sistema aparece la pantalla del módulo de autómatas celulares elementales y la opción de “Elemental” seleccionada por defecto, si introducimos la regla 126 y mantenemos la opción de Elemental, en un espacio de 250 células por 250 generaciones, podemos observar el resultado de la figura 7.9.

Si decidimos seleccionar la opción de “Aleatorio”, se habilitarán los botones para cambiar los porcentajes de 0’s y 1’s. En la figura 7.10 podemos observar 3 casos:

1. Si cambiamos el porcentaje de ceros nos arrojará un mensaje emergente donde podremos colocar el nuevo valor entre 1 y 99 %
2. Si cambiamos el porcentaje de unos nos arrojará un mensaje emergente donde podremos introducir el porcentaje entre 1 y 99 %

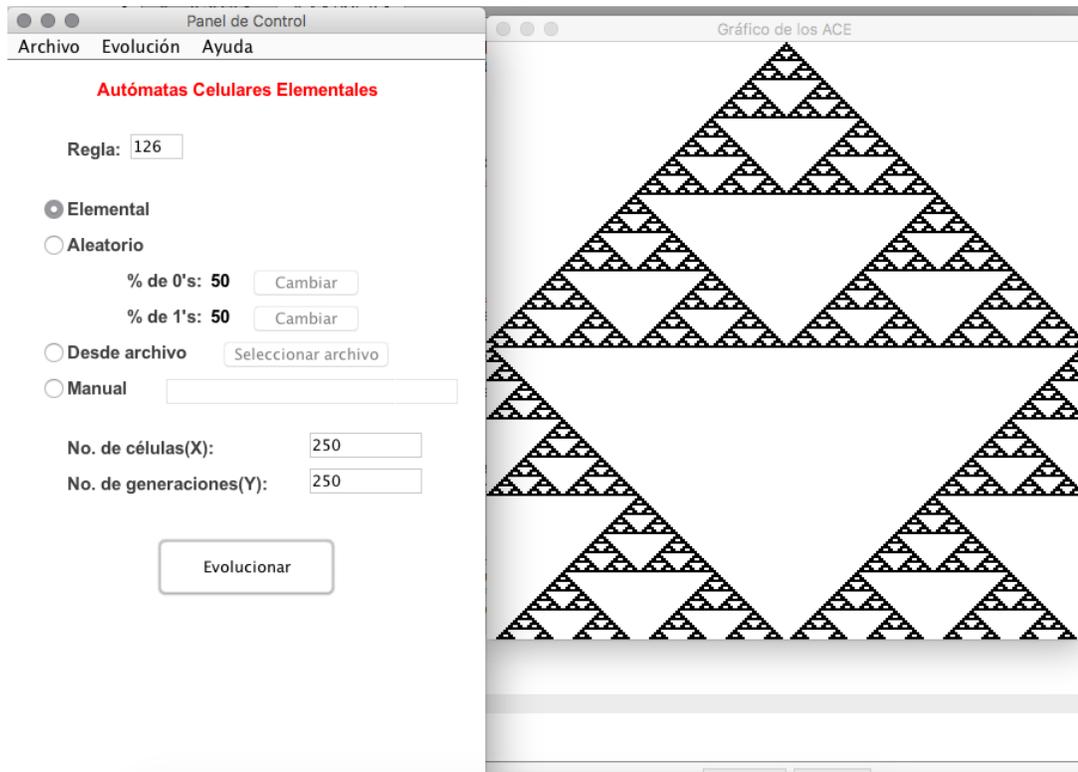


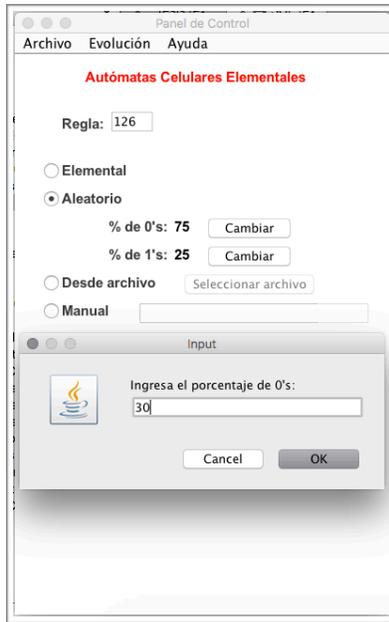
Figura 7.9: El sistema empleando la opción de Elemental

3. Imaginemos ahora que usamos 40 % de células vivas y el 60 % de células muertas, en un espacio de 200 células por 250 generaciones, observaremos lo que se muestra en la figura 3.

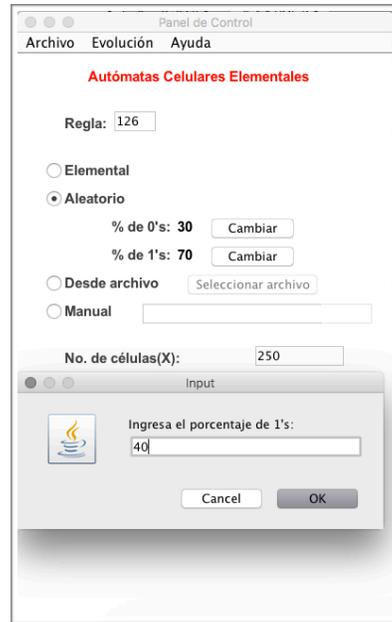
Si seleccionamos la opción “Desde archivo”, el sistema nos habilitará el botón para seleccionar el archivo, en la figura 7.11 podemos ver de manera gráfica los pasos para probar esta opción, los cuales son:

1. Para ejemplificarlo utilizaremos el archivo de la figura 1, en cual contiene 210 caracteres de 0's y 1's.
2. Al dar clic al botón de selección de archivo, nos despliega una ventana para seleccionarlo sin importar en qué carpeta esté.
3. Una vez cargado el archivo, el sistema actualiza el valor de las células a 210 y nos permite graficarlas las 250 generaciones que especificamos, para este ejemplo usamos la regla 54.

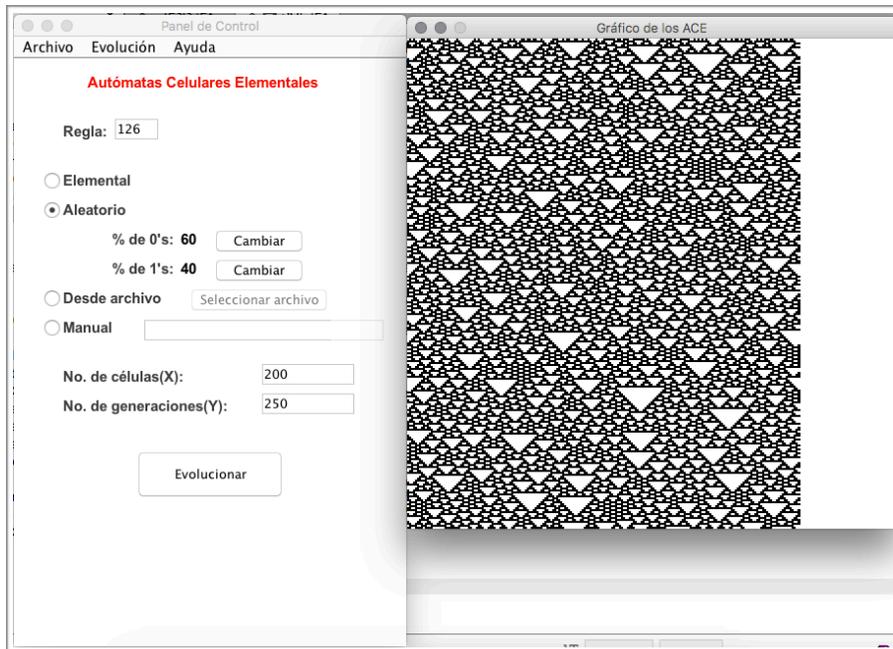
La última opción es emplear el método manual. En la figura 7.12 podemos observar cómo se manejaría de manera manual, hemos colocado la misma cadena que utilizamos en la opción de archivo pero esta vez cambiamos de regla a la 230 con 150 generaciones. Podemos observar que de igual manera el sistema nos muestra el autómata evolucionado.



1.



2.



3.

Figura 7.10: El sistema empleando la opción de Aleatorio



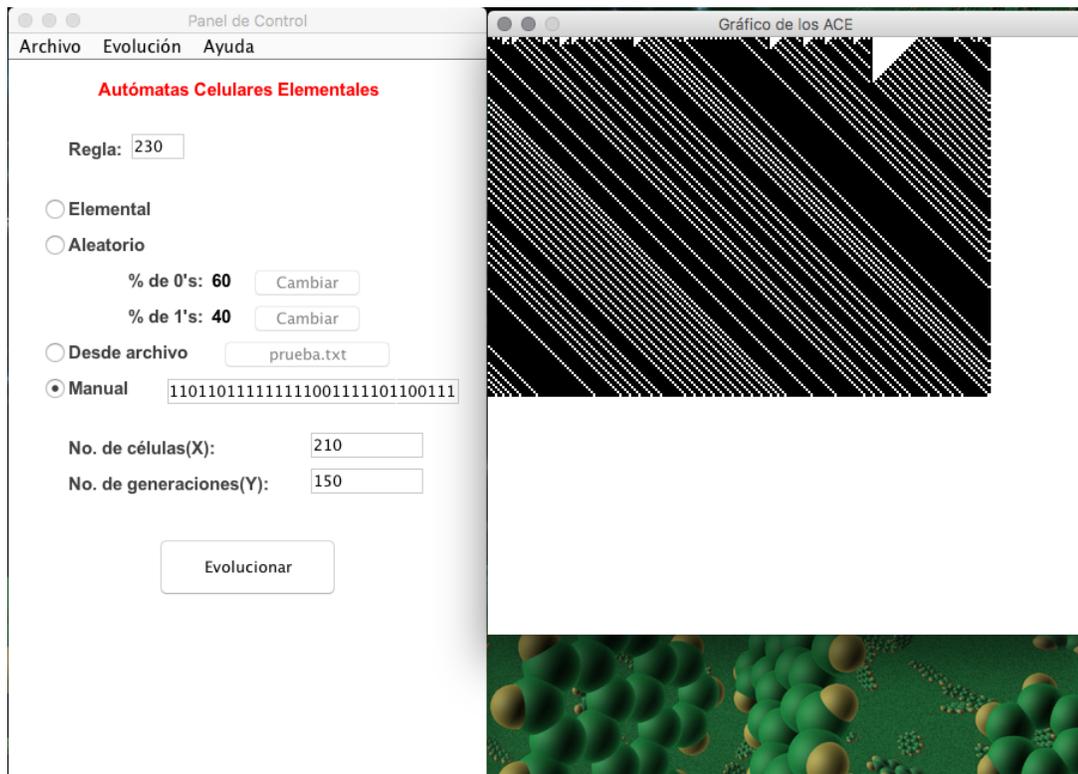


Figura 7.12: El sistema empleando la opción de Manual

### 7.5.2. Regla 126 con memoria

Abordaremos la documentación del sistema de este módulo en especial clasificando las pruebas con fondos periódicos, gliders y still-life, para mostrar cómo se utilizan y como se observan dentro del espacio.

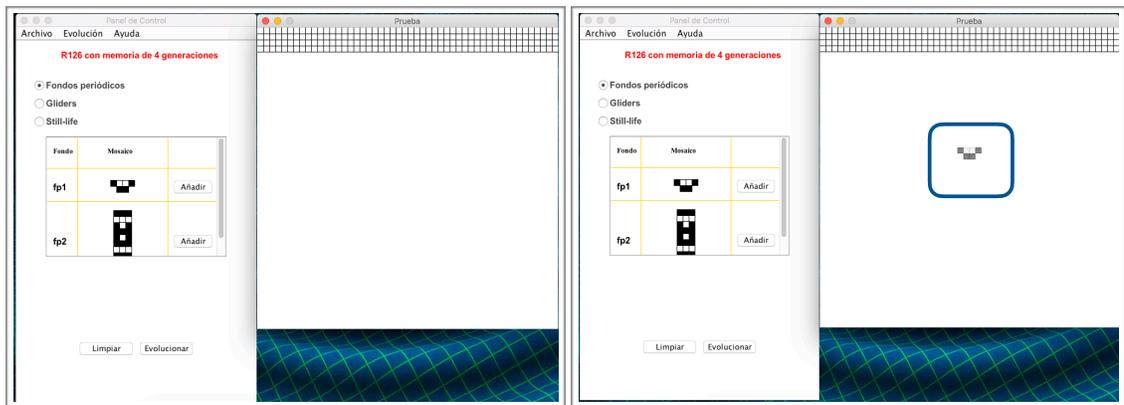
#### Fondos periódicos

En la figura 7.13, podemos observar 4 imágenes que representan las pantallas del sistema del módulo dos, en la primera imagen es cómo inicial el sistema, con la opción del fondos periódicos por default y nos muestra un panel gráfico donde señala las primeras 4 líneas con cuadrados, esas son nuestras líneas de referencia y serán las que tomará nada más para convertir los mosaicos. En la siguiente imagen vemos el añadido de un único mosaico del fondo periódico 1 señalado con un cuadrado azul, podemos agregar muchos más y acomodarlos para generar una evolución como se muestra en la tercera figura, los mosaicos que no se encuentran en las primeras 4 filas se ignorarán de la evolución, finalmente en la última imagen dimos clic al botón de Evolucionar, esto nos transforma el arreglo a una matriz regular y la evoluciona.

En la figura 7.14 podemos ver el caso para el fondo periódico 2, de nuevo podemos agregar un bloque de fondo periódico como se muestra en la 1er figura, después podemos agregar muchos y acomodarlos como se muestra en la segunda imagen, de nuevo los mosaicos que no estén en las primeras 4 líneas serán ignorados. Finalmente si presionamos en evolucionar, nos mostrará el resultado.

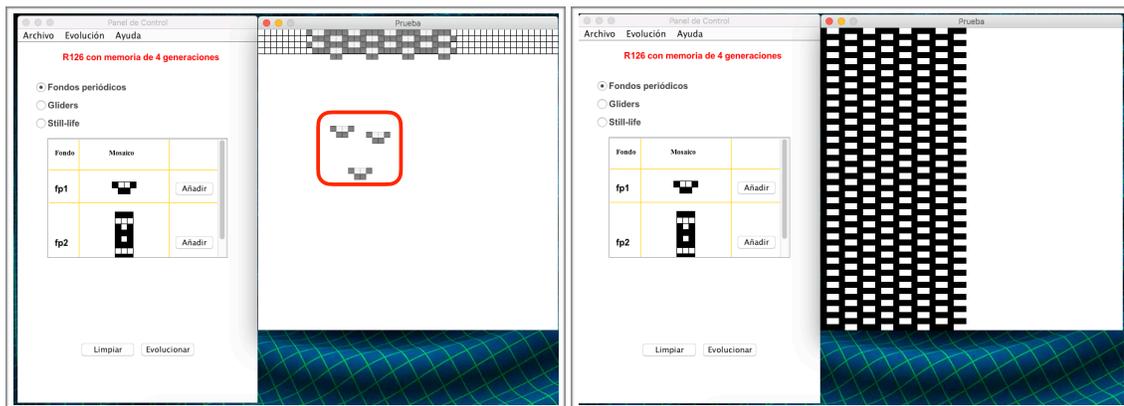
#### Gliders

En la figura 7.15 podemos observar como trabajan los gliders dentro de estas evoluciones, tenemos 6 gliders identificados, los cuales coexisten dentro de los fondos periódicos 1 y 2 para poder evolucionar, por lo que mostramos los ejemplos cuando los añadimos y los rodeamos de fondo periódico para su evolución, de nuevo los mosaicos que no estén dentro de las 4 primeras líneas son ignorados.



Inicio del 2do módulo

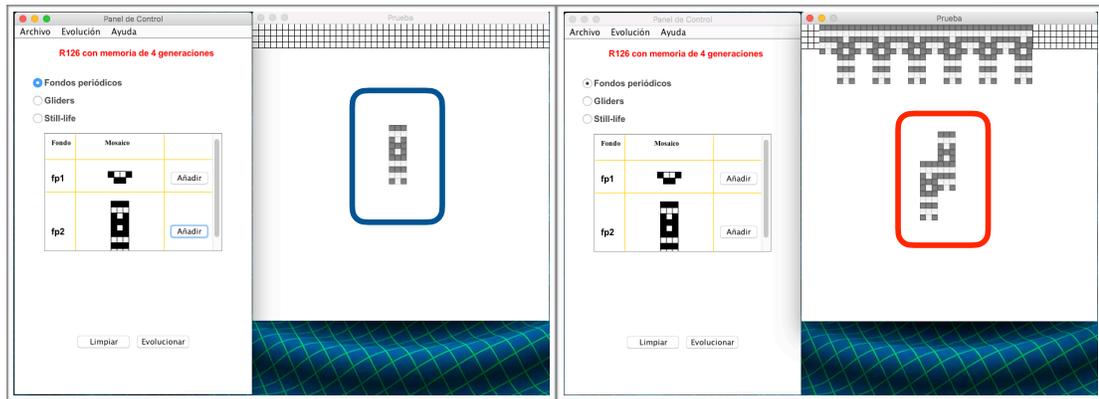
Añadido de un mosaico de fondo periódico



Los mosaicos en rojo se ignorarán

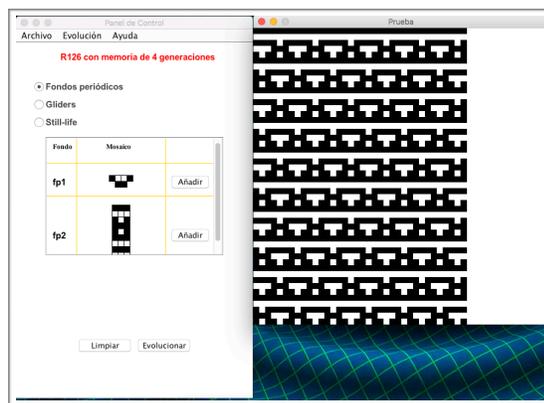
Evolución de los mosaicos puestos

Figura 7.13: La evolución utilizando el fondo periódico 1



Añadido de un único mosaico

Varios mosaicos, se ignoran los señalados con el cuadrado rojo



Evolución del arreglo

Figura 7.14: La evolución utilizando el fondo periódico 2

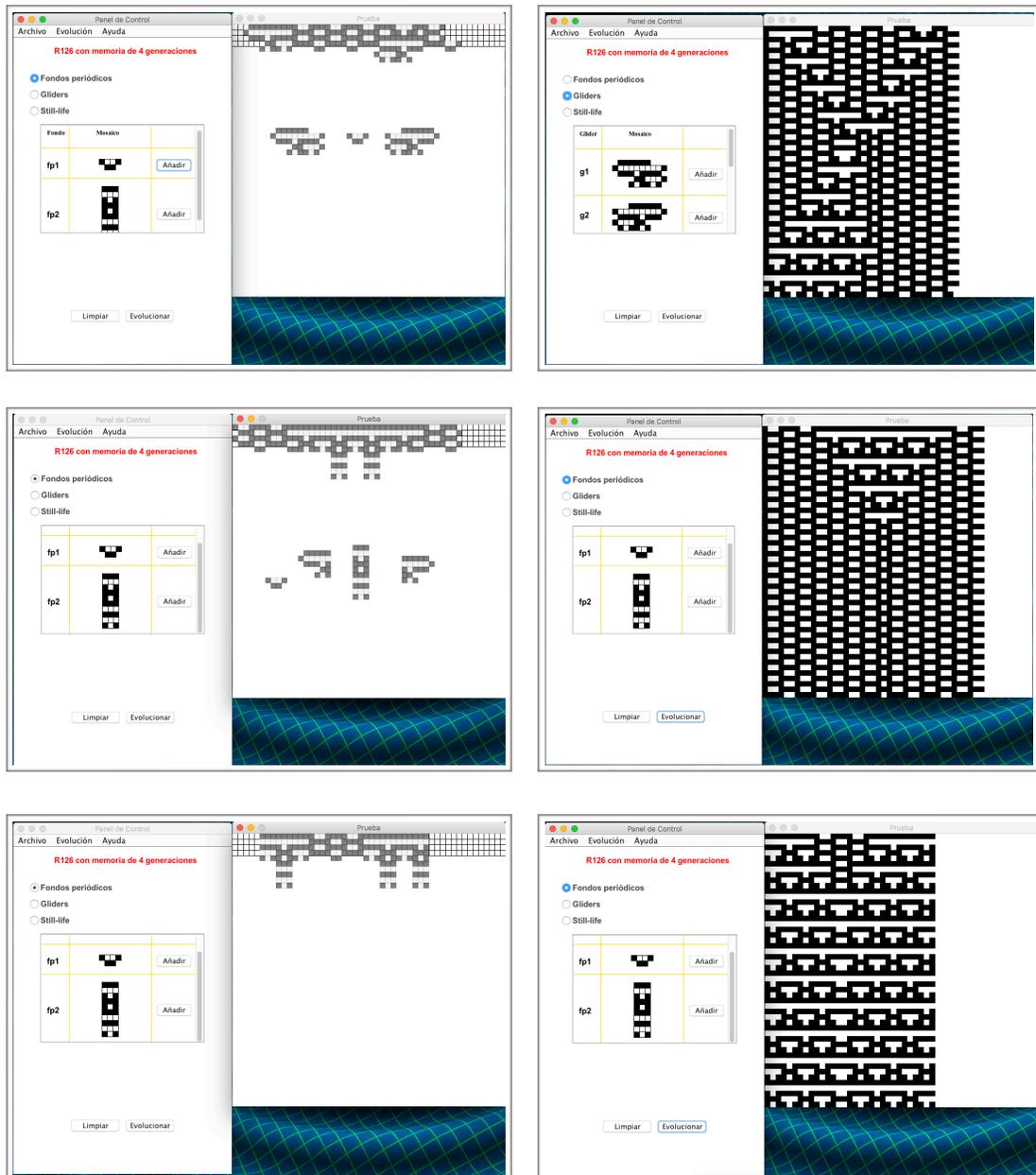


Figura 7.15: Los 6 gliders y sus combinaciones con fondos periódicos

## Still-life

En la figura 7.16, podemos ver los casos de los dos still-life identificados con los fondos periódicos que le corresponden, así como su evolución al convertirse en una matriz regular y los mosaicos que los definen, de nuevo, los mosaicos que no están en las primeras 4 líneas del gráfico no son tomados en cuenta.

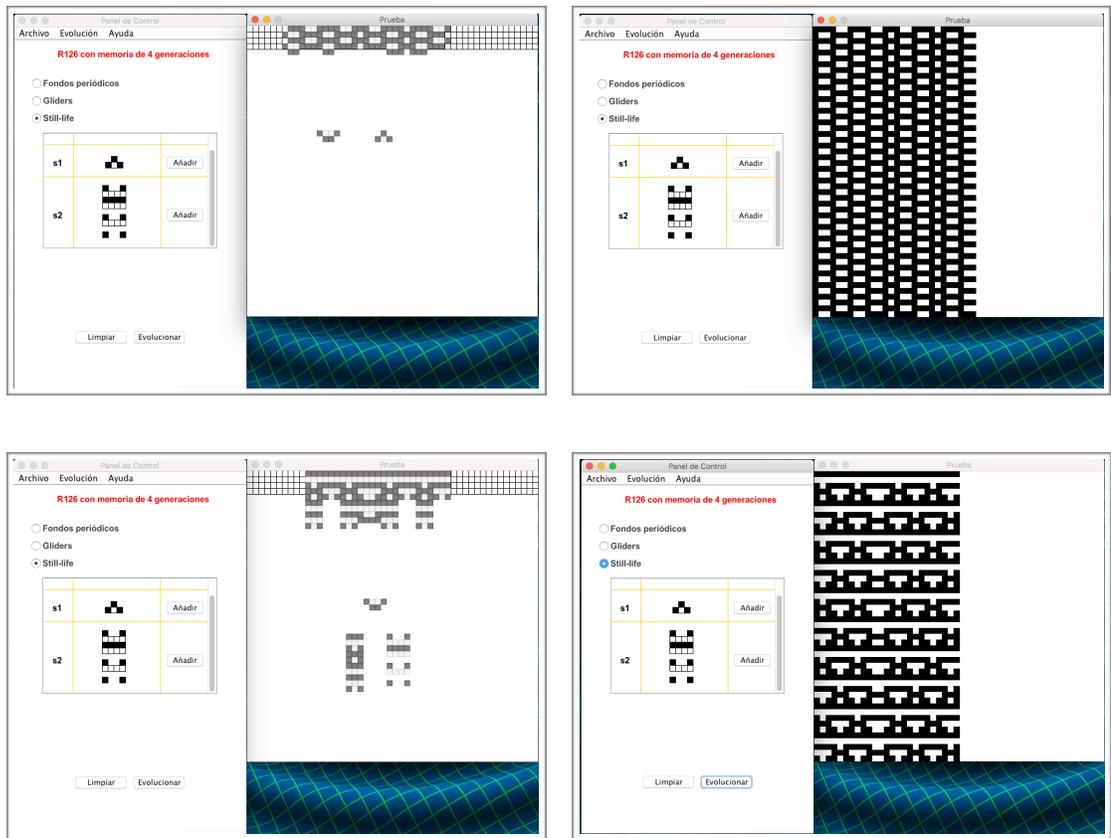


Figura 7.16: Los 2 still-life y sus combinaciones con fondos periódicos

### 7.5.3. Operaciones lógicas

En esta sección describiremos las pruebas del 3er módulo y final de nuestro sistema: las operaciones lógicas, describiremos las opciones disponibles y cómo trabaja el software.

#### Lenguajes regulares

En la figura 7.17 podemos observar la demostración de cómo funciona las opciones de la parte de lenguajes regulares. La primera imagen nos muestra el inicio del módulo, mientras que la segunda nos muestra cuando introducimos una cadena de entrada que no pertenece al lenguaje, nos arroja el mensaje diciendo que no pertenece y la evolución equivalente en partículas. Así como también podemos filtrar de 3 maneras: con el 1er fondo, con el 2do fondo o bien aplicando ambos al mismo tiempo. En la figura 6 se muestra el mensaje cuando introducimos una cadena que pertenece.

#### Gramáticas libres de contexto

En la figura 7.18 podemos ver cómo trabaja la opción de las gramáticas libres de contexto, en la cual nos muestra las reglas de producción y de nuevo nos genera el equivalente con las partículas. También podemos filtrar y guardar: configuración, la cual nos guardaría las primeras 4 evoluciones de 0 y 1, y la evolución, la cual nos guardaría todos los 0 y 1 que generó. Así como exportar como imagen PNG o documento PDF el gráfico de las evoluciones que tenemos.

#### Compuertas lógicas

En la figura 7.19 podemos observar cómo se utiliza la opción de compuertas lógicas, tenemos 6 opciones: XOR, IF-THEN, NAND, AND, OR y NOT. El usuario puede elegir cualquier opción como se muestra en las figuras y seleccionar un radio botón de la combinación de 0 y 1 que desea ver evolucionada. Una vez hecho esto, al dar clic en Evolucionar le mostrará la combinación de partículas que la generan.

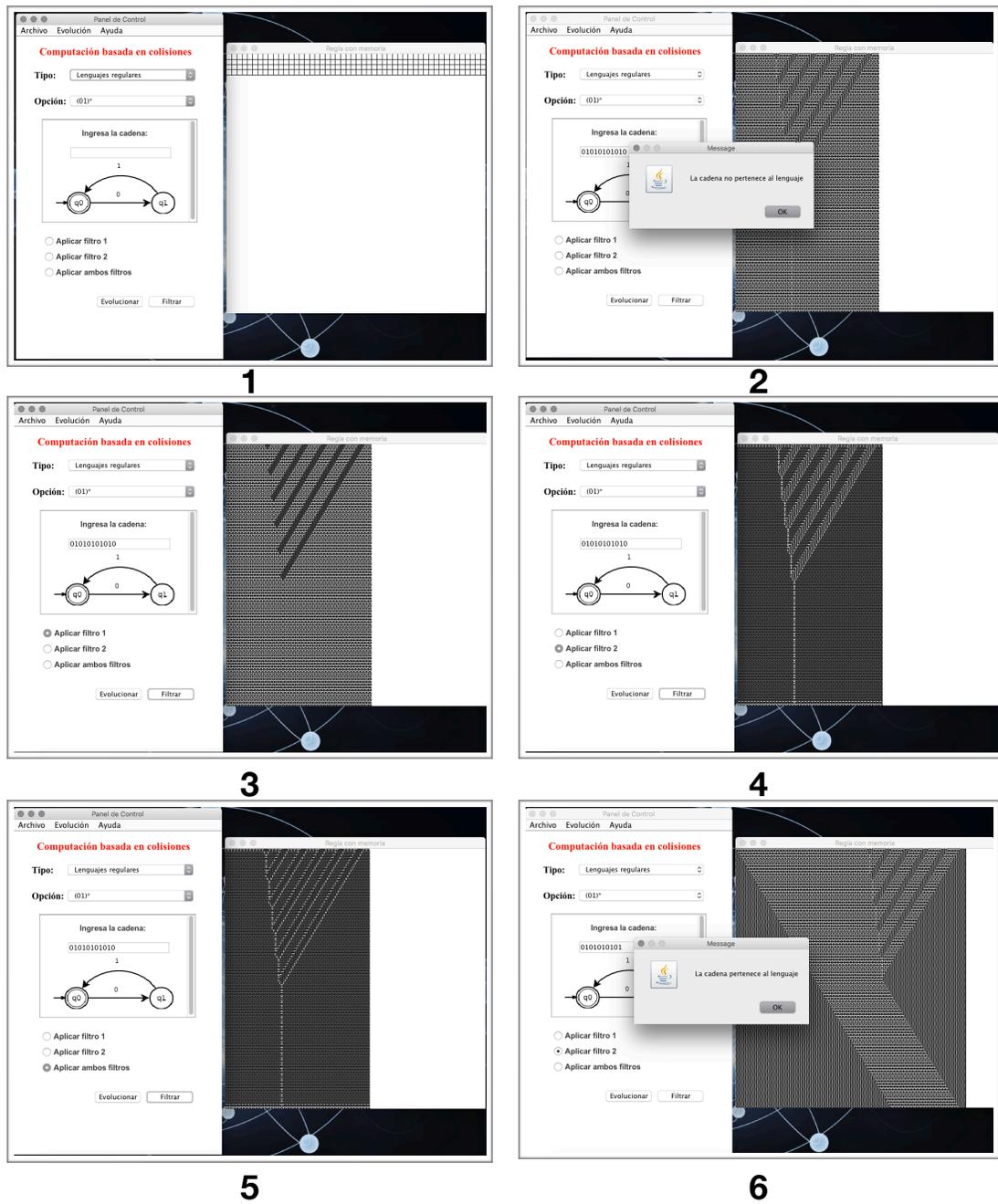


Figura 7.17: Las opciones de la opción de lenguajes regulares

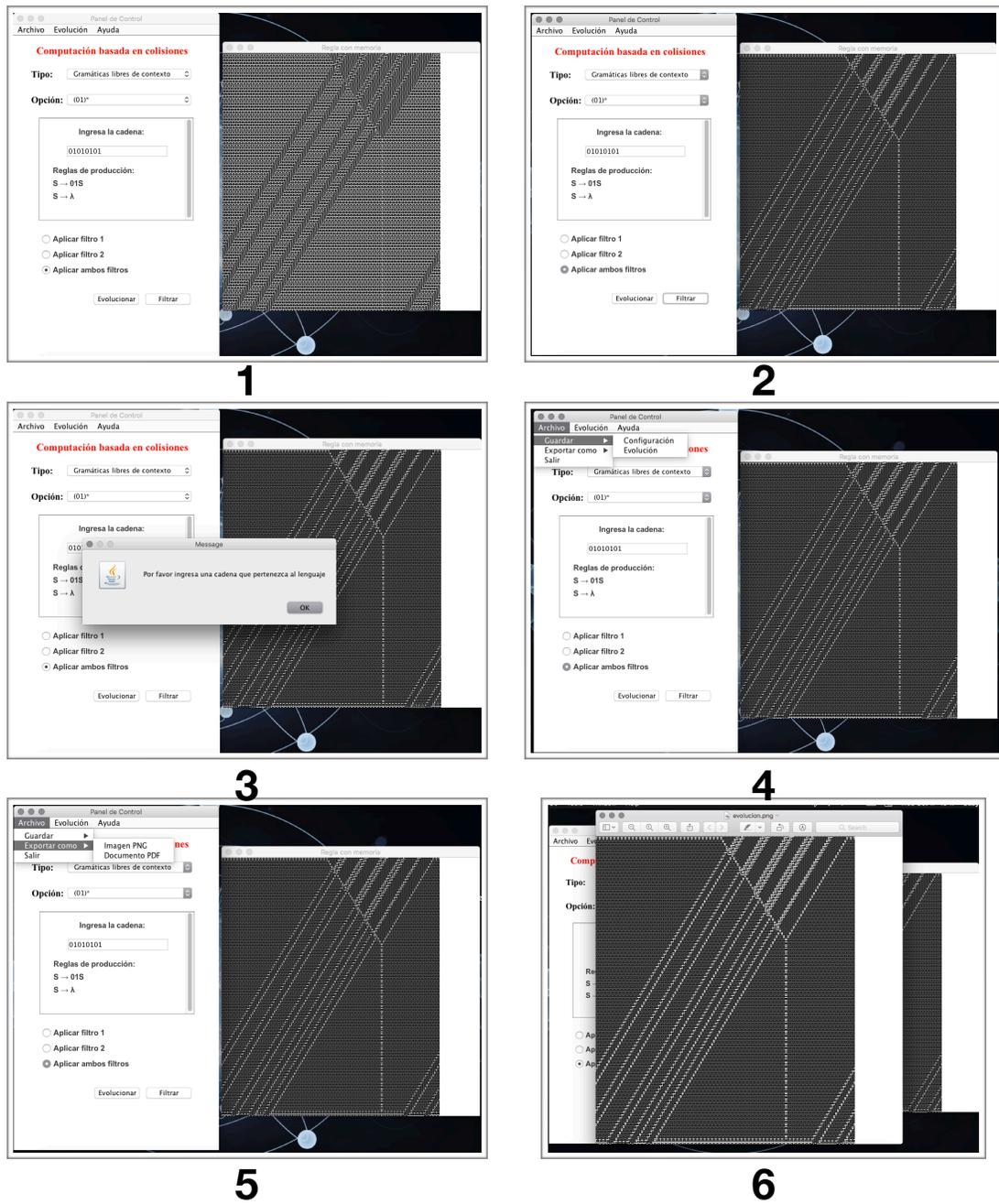


Figura 7.18: Las opciones para manejar Gramáticas Libres de Contexto



Figura 7.19: Las opciones para manejar las Compuertas Lógicas

---

# Capítulo 8

## Resultados finales

En esta sección se describen los resultados obtenidos de realizar este Trabajo Terminal, así como las conclusiones y el trabajo que se realizará a futuro.

### 8.1. Celebration of late. Prof. Harold V. McIntosh Achievements 2017

Este evento se realizó los días 29 y 30 de Noviembre de 2017 en la Facultad de Ciencias de la Computación de la Universidad Autónoma de Puebla, ubicada en Av. San Claudio y 14 Sur, Ciudad Universitaria, C. P. 72570, Puebla. Las conferencias fueron en memoria del doctor Harold V. McIntosh, pionero de la computación en México, y el cual realizó investigaciones en los temas: REC, CONVERT, CAMEX, PLOT, Flexágonos, Autómatas Celulares, variable compleja, mecánica cuántica, teoría de matrices, teoría de grupos y ecuaciones diferenciales.

En él participaron personalidades reconocidas dentro de estas áreas como son: Leon Chua, Juan Carlos Seck Tuoh Mora, Kenichi Morita, Genaro Juárez Martínez, Andrew Adamatzky y Stephen Wolfram. Mi participación dentro del evento fue dando la conferencia “Reconociendo caos y complejidad: caso de estudio en el autómata celular elemental regla 126”, la cual se realizó el día 29 de Noviembre de 2017 de 18:00-18:20 hrs. En dicha conferencia presenté los resultados del estudio de la regla elemental (capítulo 3), así como algunos que se tenían de la regla con memoria (capítulo 4). En la figura 8.1 podemos observar algunas fotografías, así como la constancia

obtenida por la participación en dicho evento.



Figura 8.1: Algunas fotos del evento Celebration of Late Prof. Harold V. McIntosh Achievements

## 8.2. The Ninth International Conference on Complex Systems 2018

La novena edición de las conferencias sobre Sistemas Complejos fue realizada del 22 al 27 de Julio de 2018 en el Hyatt Regency, ubicado en 575 Memorial Drive, Cambridge, Massachussets, USA 02139. Durante el evento se llevaron a cabo conferencias, mesas de discusión y presentaciones de pósters sobre temas de dinámicas no lineales, redes neuronales, sistemas matemáticos, sistemas celulares, sistemas biomoleculares e Inteligencia Artificial. En él participaron personalidades reconocidas a nivel mundial en el área de Sistemas Complejos, tales como: Stephen Wolfram, Yaneer Bar-Yam, H. Eugene Stanley, César Hidalgo, Spencer Wells, Albert-László Barabasi, Raúl Rojas y Steven Hassan.

Nuestra participación consistió en dar una conferencia titulada “Recognizing complex behavior emerging from chaos in cellular automata”, la cual tuvo lugar el día 23 de Julio de 15:40-16:00. En dicha conferencia se presentaron los resultados de la regla elemental y las colisiones de partículas que generan objetos dentro de la regla, así como los gliders-gun que permiten la existencia de vida artificial.

También publicamos un artículo que posee el mismo título de la conferencia en el libro que contiene las memorias del evento, el cual se titula “Unifying Themes in Complex Systems IX”, Springer, págs. 82 - 90. En la figura 8.2 podemos observar algunas fotos del evento, así como el libro publicado que contiene nuestro artículo.

## 8.3. Conclusiones

Los autómatas celulares nos permiten modelar comportamientos que si empleáramos otro método para realizarlo nos resultaría más complejo, el estudio de estos modelos, sus comportamientos, las capacidades que tienen para asemejarse a la realidad, o en el caso de este Trabajo Terminal, para permitirnos computar algo, nos abre un camino a procesar información y encontrar resultados de manera creativa y eficiente.

En la parte académica este TT me permitió adquirir hábitos de estudio, me apoyó a desarrollar la perseverancia de aprender algo distinto, de a pesar de los fallos y los obstáculos que surgieron al analizar el modelo, seguir creyendo que podríamos



Figura 8.2: Algunas fotos del evento The Ninth International Conference on Complex Systems

obtener resultados interesantes de su estudio. Pude entender de manera amplia, me atrevo a decir hasta especializada, qué es un autómata celular, sus características, la importancia de no solo quedarnos en lo que dice la definición, de explorar más allá usando una función de memoria, de reconocer patrones (una parte vital del TT y quizás la que más me costó) y modelarlos de manera de nos permitan “explotar” nuestro sistema y extraer la mayor cantidad de información posible. Exploré una rama del conocimiento nueva, los Sistemas Complejos y la computación no convencional fueron pilares en la investigación, desarrollo y resultados presentados en este documento.

Abriendo un poco la parte del conocimiento, el potencial que la memoria demostró por provocar que surgieran elementos de complejidad dentro de las reglas caóticas, las cuales podemos señalar como reglas que no son fuertemente caóticas, nos abre un área de investigación no solamente con los autómatas celulares elementales, sino con los autómatas celulares que sean considerados caóticos. Ahora bien, estos elementos de complejidad, como ya tenemos la historia y todo el estudio que ha tenido el juego de la vida, podemos caracterizarlos y estudiarlos de manera similar a lo que se conoce de este modelo, inclusive utilizando el estudio realizado a una regla similar a la nuestra: la regla 110. Finalmente, el diseño de computaciones como son compuertas lógicas, lenguajes regulares, gramáticas libres de contexto, etc, nos permite incursionar sobre la computación reversible y conservativa, tema actual y que ha demostrado poseer características convenientes.

En el ámbito personal, aprendí que el trabajo constante es la clave del éxito, en el desarrollo de este TT una de las cosas que se presentaba con mucha frecuencia era la incertidumbre, al ser un trabajo de investigación no existía la información que se requería para poder realizar el software descrito, se requirió realizar el estudio a fondo y no sabíamos a ciencia cierta si la regla iba a demostrar un comportamiento “dócil”, con el que pudiéramos modelar las computaciones de manera entendible, sencilla y eficaz. También entendí que la búsqueda porque el trabajo quede mejor de lo que podríamos esperar es una segunda clave para que una investigación quede de forma excepcional, gracias a las exigencias y consejos de mi director de TT se obtuvieron estos resultados, al igual que mi exigencia personal por presentar un documento en excelencia.

Terminaré concluyendo que la investigación en este campo tiene futuro, ya existen muchos trabajos dedicados a los autómatas celulares, y requerimos muchos más para así lograr entender el universo computacional, sus limitaciones y las no limitaciones que podemos adquirir al diseñar de una manera u otra. Finalmente, las capacidades computacionales de un sistema nos pueden dar un apoyo fuerte para resolver problemas que en una instancia tomarían demasiado tiempo.

## 8.4. Trabajo a futuro

Después de todo el análisis y el sistema realizado para este TT, el trabajo a futuro que podemos realizar es primeramente que nuestro sistema os permita simular cualquier expresión que esté escrita con el álgebra de boole utilizando estas compuertas lógicas. También debido a que la regla ya demostramos que es lógicamente universal, sabemos que la posibilidad de que tenga una máquina de Turing asociada es alta, por lo que requerimos comenzar una exploración enfocada meramente a encontrarla. Ahora bien, los autómatas celulares tienen aplicaciones en muchas áreas, vamos a enfocar estos resultados en el entendimiento del cáncer, motivación principal de este trabajo terminal. Una de las potencialidades que tienen la regla, es el hecho de que podemos combinar fondos periódicos y el fondo periódico que mayormente se presenta tiene una flexibilidad para usarse muy buena, por lo que podemos aprovechar esa flexibilidad para realizar computaciones más complejas, e inclusive diseñar un procesador o cosas superiores con las colisiones.

La idea de que el software se actualice para que cualquier persona simplemente arrastre las compuertas que quiere usar, las anide, y el software lo traduzca a las colisiones, es una idea buena para entender cómo funciona la regla, así como el poder que tienen para acoplarse prácticamente a cualquier colisión, y como después de la exploración sabemos que la regla tiene simetrías con las colisiones, podemos utilizar estas simetrías como apoyos para el acoplamiento.

Existe trabajo por hacer con estos resultados, así como con las cosas que todavía no quedaron claras de la regla, pero por los resultados actuales, sabemos que son exploraciones e investigaciones que requieren ser hechas ya que la regla ha demostrado potencial y posibilidades muy altas de poder simular cosas más grandes.

---

# Bibliografía

- [1] A. Adamatzky. *Identification of Cellular Automata*. Taylor y Francis, 1 ed<sup>ón</sup>., 1994.
- [2] A. Adamatzky. *Computing in Nonlinear Media and Automata Collectives*. Institute of Physics Publishing, 1 ed<sup>ón</sup>., 2001.
- [3] A. Adamatzky. *Collision-Based Computing*. Springer, 1 ed<sup>ón</sup>., 2002.
- [4] A. Adamatzky. *Advances in Unconventional Computing. Volume 1: Theory*. Springer, 1 ed<sup>ón</sup>., 2017.
- [5] R. Alonso-Sanz y M. Martín. Elementary cellular automata with memory. *Complex Systems*, 14:99–126, 2003.
- [6] Y. Bar-Yam. *Dynamics of Complex Systems*. Addison Wesley, 1 ed<sup>ón</sup>., 1997.
- [7] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, y R. L. Guy. *Information and Transmission in Cellular Automata*. Winning Ways for your Mathematical Plays vol. 2: Games in Particular, 2 ed<sup>ón</sup>., 1982.
- [8] E. Borriello y S. I. Walker. An information-based classification of elementary cellular automata. págs. 1–8, 2017.
- [9] M. Cook. Universality in elementary cellular automata. *Complex Systems*, 15:1–40, 2004.
- [10] J. C. Seck-Tuoh-Mora G. J. Martínez, A. Adamatzky y R. Alonso-Sanz. How to make dull cellular automata complex by adding memory: Rule 126 case study. *Complexity*, 15(6):34–49, 2010.

- 
- [11] D. A. R. Gomez. Descripción y aplicaciones de los autómatas celulares. *Verano de Investigación 2011*, págs. 3–5, 2011.
- [12] A. C. González. La medida del caos en autómatas celulares que presentan comportamiento colectivo no trivial. *Computer Based Learning Unit, University of Leeds*, págs. 3–7, 1998.
- [13] P. Grogono. Dynamic systems. *Stanislaw Lem*, págs. 8–12, 2005.
- [14] J. E. Hopcroft, R. Motwani, y J. D. Ullman. *introducción a la Teoría de autómatas, lenguajes y computación*. Addison Wesley, 1 ed<sup>ón</sup>., 2007.
- [15] K. Culik II y S. Yu. Undecidability of ca classification schemes. *Complex Systems*, 2:177–190, 1985.
- [16] R. Klages. Introduction to dynamic systems. *Queen Mary, University of London*, págs. 12–19, 2008.
- [17] O. Martin, A. M. Odlyzko, y S. Wolfram. Algebraic properties of cellular automata. *Communications in Mathematical Physics*, 93:219–258, 1984.
- [18] G. J. Martínez. Grados de reversibilidad en autómatas celulares lineales. págs. 1–31, 1998.
- [19] G. J. Martínez. A note on elementary cellular automata classification. págs. 1–25, 2013.
- [20] G. J. Martínez y A. Adamatzky. Cellular automaton super-collider: An abstract model. *MIT Technology Review*.
- [21] G. J. Martínez, A. Adamatzky, y R. Alonso-Sanz. Descripción y aplicaciones de los autómatas celulares. págs. 10–39, 2013.
- [22] G. J. Martínez, A. Adamatzky, F. Chen, y L. Chua. On soliton collisions between localizations in complex elementary cellular automata: Rules 54 and 110 and beyond. *Complex Systems*, 21:1–26, 2012.
- [23] G. J. Martínez, A. Adamatzky, y H. V. McIntosh. Complete characterization of structure of rule 54. *Complex Systems*, 23:1–33, 2014.

- 
- [24] G. J. Martínez, A. Adamatzky., y H. V. McIntosh. A computation in a cellular automaton collider rule 110. págs. 1–37, 2016.
- [25] G. J. Martínez, A. Adamatzky, y K. Morita. Logical gates via gliders collisions. *Journal of Cellular Automata*, 13(4):325–346, 2018.
- [26] G. J. Martínez, A. Adamatzky, y C. R. Stephens. Cellular automaton supercolliders. págs. 1–24, 2011.
- [27] G. J. Martínez, H. V. McIntosh, y J. C. Seck-Tuoh-Mora. Gliders in rule 110. *International Journal of Unconvetional Computing*, 2:1–49, 2005.
- [28] G. J. Martínez, H. V. McIntosh, J. C. Seck-Tuoh-Mora, y S. Vergara. Rule 110 objects and other collision-based constructions. págs. 1–25, 2006.
- [29] G. J. Martínez, H. V. McIntosh, J. C. Seck-Tuoh-Mora, y S. V. C. Vergara. Determining a regular language by glider-based structures called phases fi\_1 in rule 110. págs. 1–26, 2006.
- [30] G. J. Martínez, J. C. Seck-Tuoh-Mora, y H. Zenil. Wolfram’s classification and computation in cellular automata classes iii and iv. págs. 1–27, 2012.
- [31] H. V. McIntosh. Linear cellular automata. págs. 1–26, 1987.
- [32] A. J. Morales, C. Gershenson, D. Braha, A. A. Minai, y Y. Bar-Yam. *Unifying Themes in Complex Systems IX*. Springer, 1 ed<sup>ón</sup>., 2018.
- [33] J. V. Neumann. *Theory of Self-Reproducing Automata*. Library of Congress, 1 ed<sup>ón</sup>., 1966.
- [34] N. H. Packard y S. Wolfram. Two-dimensional cellular automata. *Journal of Statistical Physics*, 38(5), 1985.
- [35] T. Panitanarak. Cellular automata. *CS6800 Summer*, págs. 2–4, 2009.
- [36] J. C. Seck-Tuoh-Mora. Autómatas celulares lineales reversibles. págs. 5–21, 1997.

- 
- [37] M. A. Shereshevsky. Lyapunov exponents for one-dimensional cellular automata. *Journal of Nonlinear Science*, 2:1–8, 1992.
- [38] S. Wolfram. Cellular automata as models of complexity. *CALT*, 66(938):1–12, 1982.
- [39] S. Wolfram. Cellular automata. *Los Alamos Science*, págs. 4–9, 1983.
- [40] S. Wolfram. Statistical mechanics of cellular automata. *Reviews of Modern Physics*, 55(3):600–644, 1983.
- [41] S. Wolfram. Cellular automata as models of complexity. *Nature*, 311(5985):1–7, 1984.
- [42] S. Wolfram. Computation theory of cellular automata. *Communications in Mathematical Physics*, 96:15–57, 1984.
- [43] S. Wolfram. Universality and complexity in cellular automata. *Physica*, 10:1–35, 1984.
- [44] S. Wolfram. Cellular automaton supercomputing. págs. 1–9, 1986.
- [45] S. Wolfram. Tables of cellular automaton properties. *Theory and Applications of Cellular Automata*, págs. 485–557, 1986.
- [46] S. Wolfram. *A New Kind of Science*. Wolfram Media, 1 ed<sup>ón</sup>., 2002.
- [47] A. Wuensche y M. Lesser. *The Global Dynamics of Cellular Automata*. Addison-Wesley, 1 ed<sup>ón</sup>., 1992.

---

# Apéndice A

## Atractores de la regla 126

En esta sección colocaremos todas las tablas descriptivas de los atractores (masa, periodo, cantidad de hojas y grado) para los atractores de longitud 2 hasta longitud igual a 15 debido a que esto no se encuentra en el trabajo realizado por Andrew Wuensche [47], a partir de la longitud 16 hasta la 24 se colocará la tabla y algunas imágenes de los atractores más interesantes. Las imágenes mostradas se pueden entender siguiendo el código de colores siguiente:

1. Una línea de color guinda indican una arista.
2. Un punto de color azul indica un vértice.

### A.1. Atractores con longitud igual a 2.

No. de atractor	Masa	Periodo	Cant. hojas	Grado
1	4	1	2	3

Cuadro A.1: Tabla resumida de colisiones

---

### A.2. Atractores con longitud igual a 3.

No. de atractor	Masa	Periodo	Cant. hojas	Grado
1	8	1	6	3

Cuadro A.2: Tabla resumida de colisiones

### A.3. Atractores con longitud igual a 4.

No. de atractor	Masa	Periodo	Cant. hojas	Grado
1	8	1	6	3
2	4	2	2	2
3	4	2	2	2

Cuadro A.3: Tabla resumida de colisiones

### A.4. Atractores con longitud igual a 5.

No. de atractor	Masa	Periodo	Cant. hojas	Grado
1	12	1	10	3
2	4	2	2	2
3	4	2	2	2
4	4	2	2	2
5	4	2	2	2
6	4	2	2	2

Cuadro A.4: Tabla resumida de colisiones

### A.5. Atractores con longitud igual a 6.

No. de atractor	Masa	Periodo	Cant. hojas	Grado
1	52	1	35	6
2	4	2	2	2
3	4	2	2	2
4	4	2	2	2

Cuadro A.5: Tabla resumida de colisiones

### A.6. Atractores con longitud igual a 7.

No. de atractor	Masa	Periodo	Cant. hojas	Grado
1	128	1	91	6

Cuadro A.6: Tabla resumida de colisiones

### A.7. Atractores con longitud igual a 8.

No. de atractor	Masa	Periodo	Cant. hojas	Grado
1	136	1	106	7
2,3,4,5	28	6	20	3
6,7	4	2	2	2

Cuadro A.7: Tabla resumida de colisiones

### A.8. Atractores con longitud igual a 9.

No. de atractor	Masa	Periodo	Cant. hojas	Grado
1	80	1	78	3
2 al 9	44	6	33	4
10, 12 al 19	4	2	2	2
11	44	6	33	4

Cuadro A.8: Tabla resumida de colisiones

### A.9. Atractores con longitud igual a 10.

No. de atractor	Masa	Periodo	Cant. hojas	Grado
1	124	1	122	3
2,3,5,8,11	104	4	82	7
4,7,10,13,17	56	6	44	4
6,9,12,14,16	12	2	7	4
15,18 al 26	4	2	2	2

Cuadro A.9: Tabla resumida de colisiones

### A.10. Atractores con longitud igual a 11.

No. de atractor	Masa	Periodo	Cant. hojas	Grado
1	200	1	198	3
2 al 5, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 20	136	4	109	7
6, 9, 10, 13, 14, 17, 19, 22 al 25	24	2	18	5

*Continúa en la siguiente página*

Cuadro A.10 – Continuación de la página anterior

No. de atractor	Masa	Periodo	Cant. ho- jas	Grado
18, 21	44	11	33	2

Cuadro A.10: Tabla resumida de colisiones

### A.11. Atractores con longitud igual a 12.

No. de atractor	Masa	Periodo	Cant. ho- jas	Grado
1	548	1	495	9
2, 3, 5, 7, 10, 15	284	14	242	6
4, 6, 9, 13, 17, 18	188	4	154	7
8, 11, 16	124	2	96	7
12, 14	168	36	120	3
19, 20	4	2	2	2

Cuadro A.11: Tabla resumida de colisiones

### A.12. Atractores con longitud igual a 13.

No. de atractor	Masa	Periodo	Cant. ho- jas	Grado
1	548	1	495	9
1	2160	1	1820	10
2 al 9, 11, 13 al 16	428	14	371	6
10, 12	208	39	143	3
17 al 29	4	2	2	2

Cuadro A.12: Tabla resumida de colisiones

### A.13. Atractores con longitud igual a 14.

No. de atractor	Masa	Periodo	Cant. hojas	Grado
1	11932	1	10327	19
2 al 5, 7, 9, 10	588	14	520	8
6, 8	84	14	56	3
11, 12, 16, 17, 20, 23, 26, 27, 31, 32, 35, 38, 41, 42	6	2	4	2
13, 14, 15, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 28, 29, 30, 33, 34, 36, 37, 39, 40, 43, 44, 45	4	2	2	2

Cuadro A.13: Tabla resumida de colisiones

### A.14. Atractores con longitud igual a 15.

No. de atractor	Masa	Periodo	Cant. hojas	Grado
1	32448	1	28621	21
2, 12, 22, 32, 42	10	2	8	2
3 al 11, 13 al 21, 23 al 31, 33 al 41, 43 al 51	6	2	4	2

Cuadro A.14: Tabla resumida de colisiones

### A.15. Atractores con longitud igual a 16.

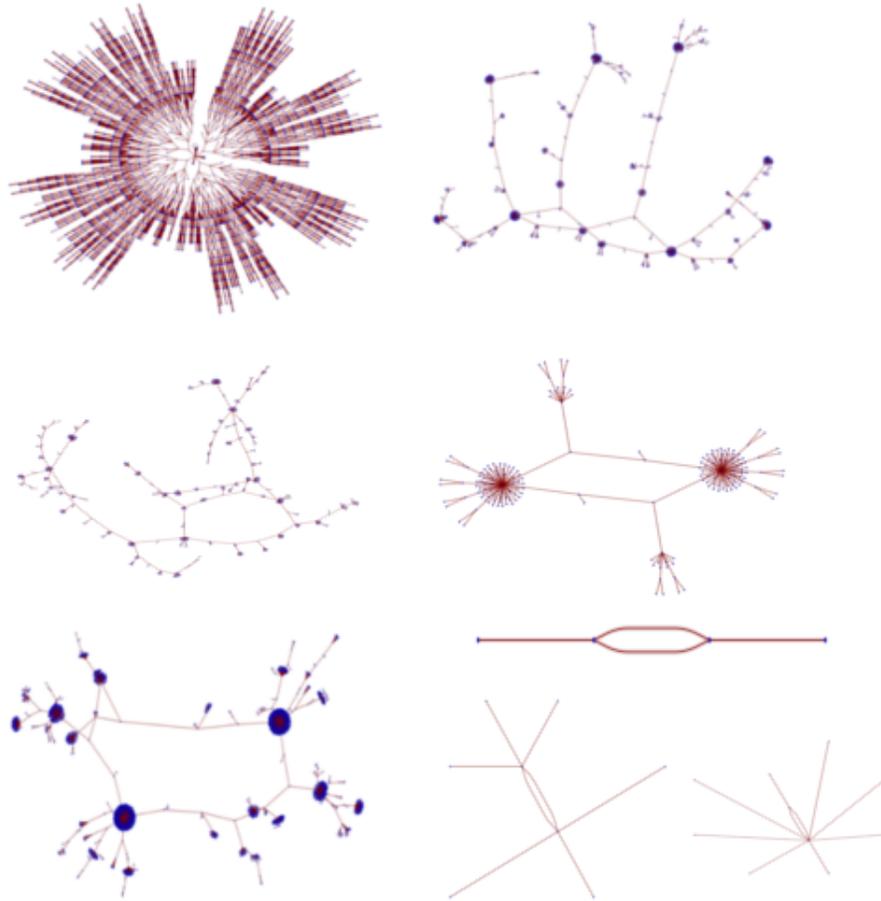


Figura A.1: Atractores para longitud igual a 16.

No. de atractor	Masa	Periodo	Cant. ho- jas	Grado
1	31560	1	28290	22
2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 22	1968	14	1864	8
5, 7, 9, 13, 18, 25, 29, 34	904	14	784	13
10, 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35	620	14	510	14

*Continúa en la siguiente página*

Cuadro A.15 – *Continuación de la página anterior*

No. de atractor	Masa	Periodo	Cant. hojas	Grado
26, 32, 36, 37	180	6	160	4
38, 40, 42, 47, 48, 51, 54, 55, 58, 63, 64, 67, 70, 71, 74, 79	10	2	8	2
39, 41, 43 al 46, 49, 50, 53, 56, 57, 59 al 62, 65, 66, 69, 72, 73, 75 al 78	8	2	6	2
52, 68	4	2	2	2

Cuadro A.15: Tabla resumida de colisiones

### A.16. Atractores con longitud igual a 17.

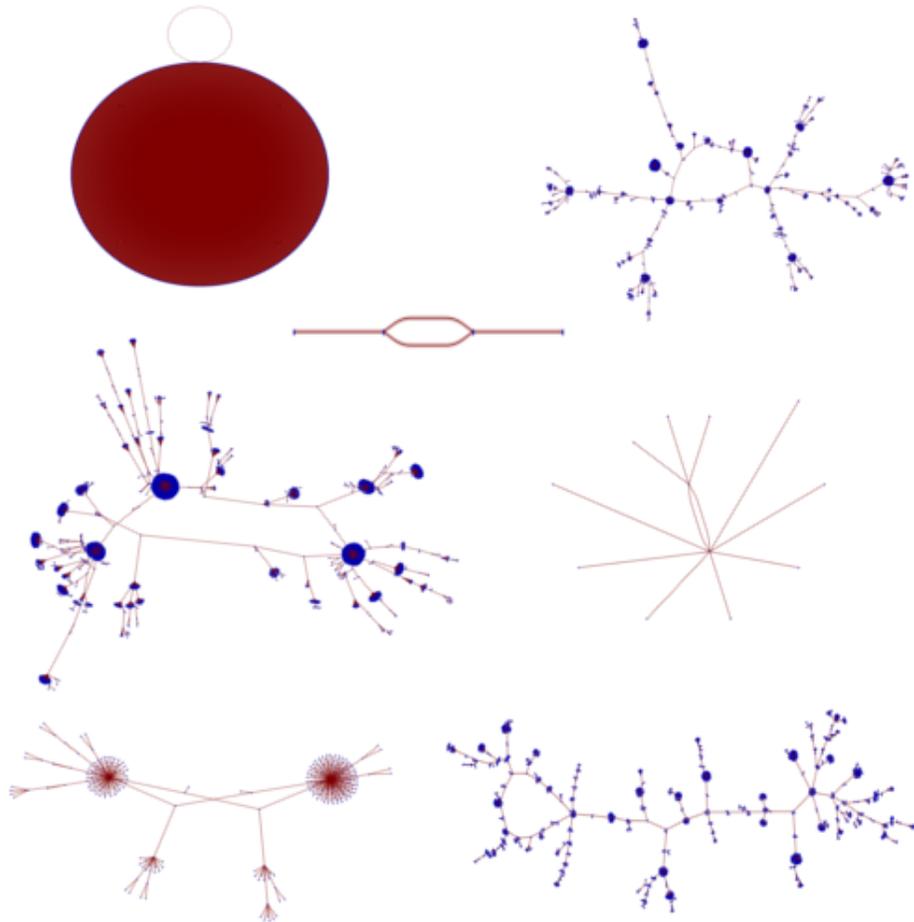


Figura A.2: Atractores para longitud igual a 17.

No. de atractor	Masa	Periodo	Cant. ho- jas	Grado
1	3572	1	3570	3
2 al 5, 7, 8, 11, 12, 16, 18, 24, 26, 35, 38, 46, 50, 60	2988	14	2806	9

*Continúa en la siguiente página*

Cuadro A.16 – *Continuación de la página anterior*

No. de atractor	Masa	Periodo	Cant. hojas	Grado
6, 9, 10, 13, 14, 19, 21, 29, 31, 39, 40, 42, 48, 52, 59, 63, 64	1696	14	1511	13
15, 17, 20, 22, 23, 25, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 36, 37, 41, 43, 44, 45, 47, 49, 53 al 58, 61, 62, 68 al 72	1284	14	1115	23
51, 65, 66, 67, 73, 75 al 86	232	6	211	4
87, 89 al 92, 94, 101 al 105, 108, 115 al 119	12	2 10	2	
88, 93, 95 al 100, 106, 107, 109 al 114, 120	4	2	2	2

Cuadro A.16: Tabla resumida de colisiones

### A.17. Atractores con longitud igual a 18.

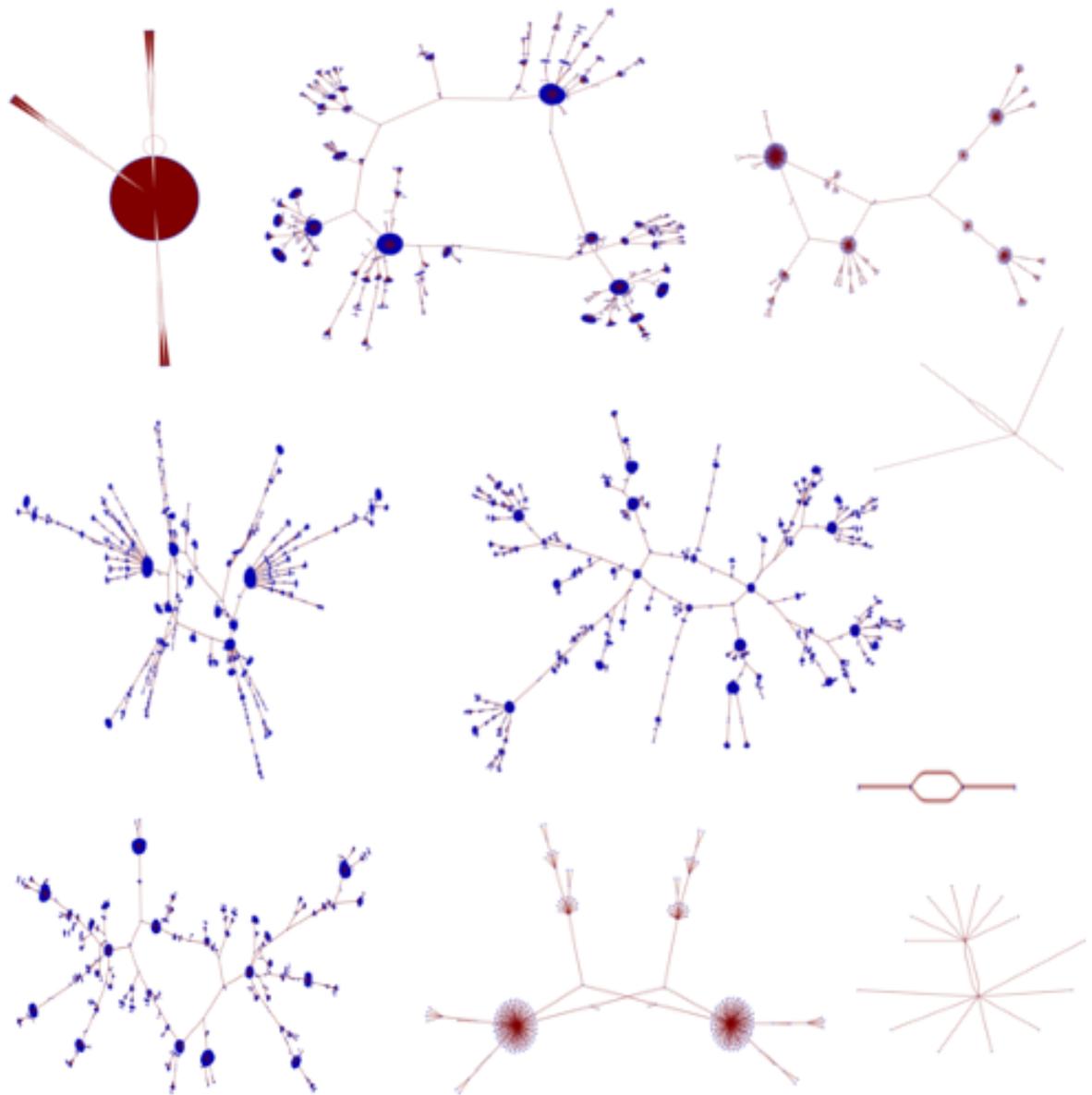


Figura A.3: Atractores para longitud igual a 18.

### A.18. Atractores con longitud igual a 19.

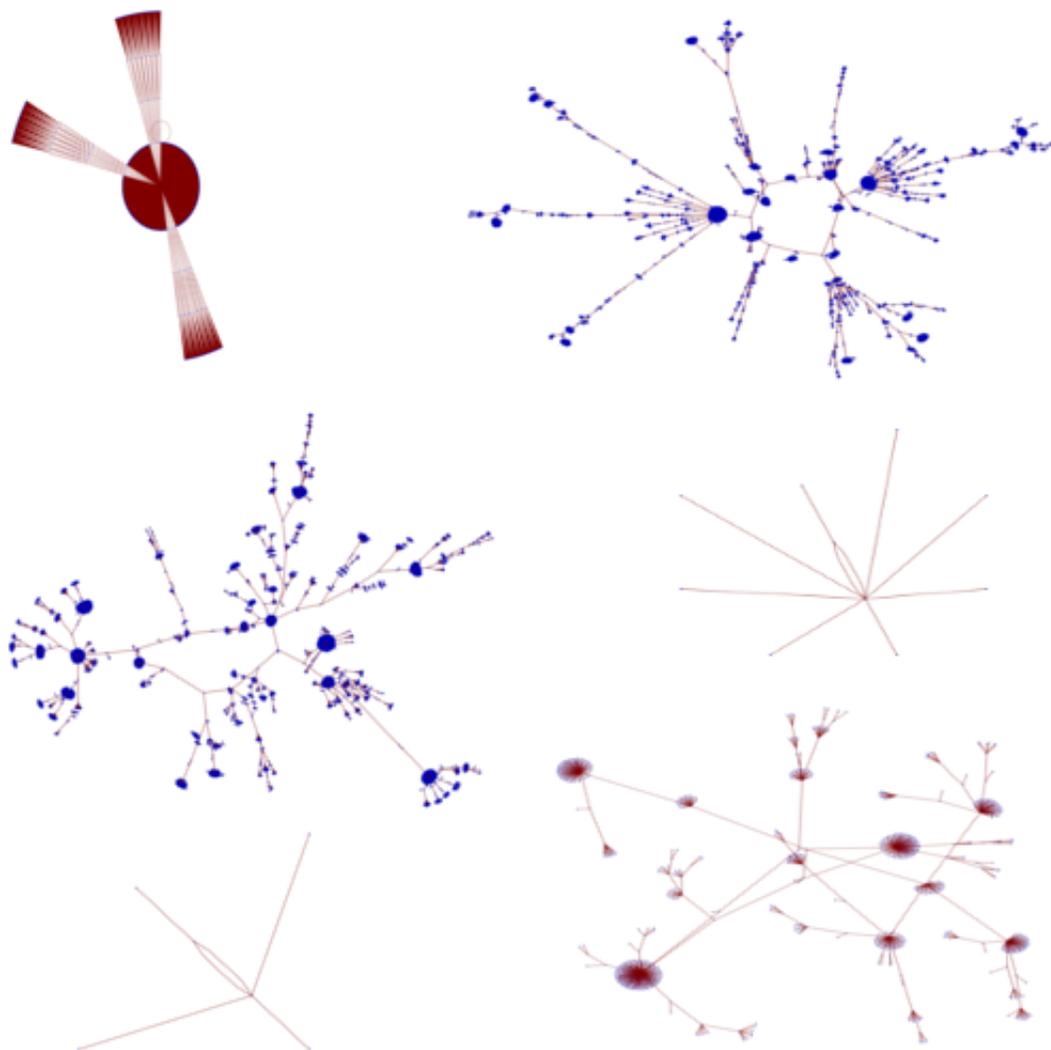


Figura A.4: Atractores para longitud igual a 19.

## A.19. Atractores con longitud igual a 20.

Los siguientes atractores nos muestran un comportamiento caótico y de diversas formas, algunos de ellos poseen Jardines del Edén extensos, mientras que otros tienen un anillo grande pero jardines chicos, y otros solo poseen un gran número de hojas. Se pueden observar de forma detenida en la siguiente figura:

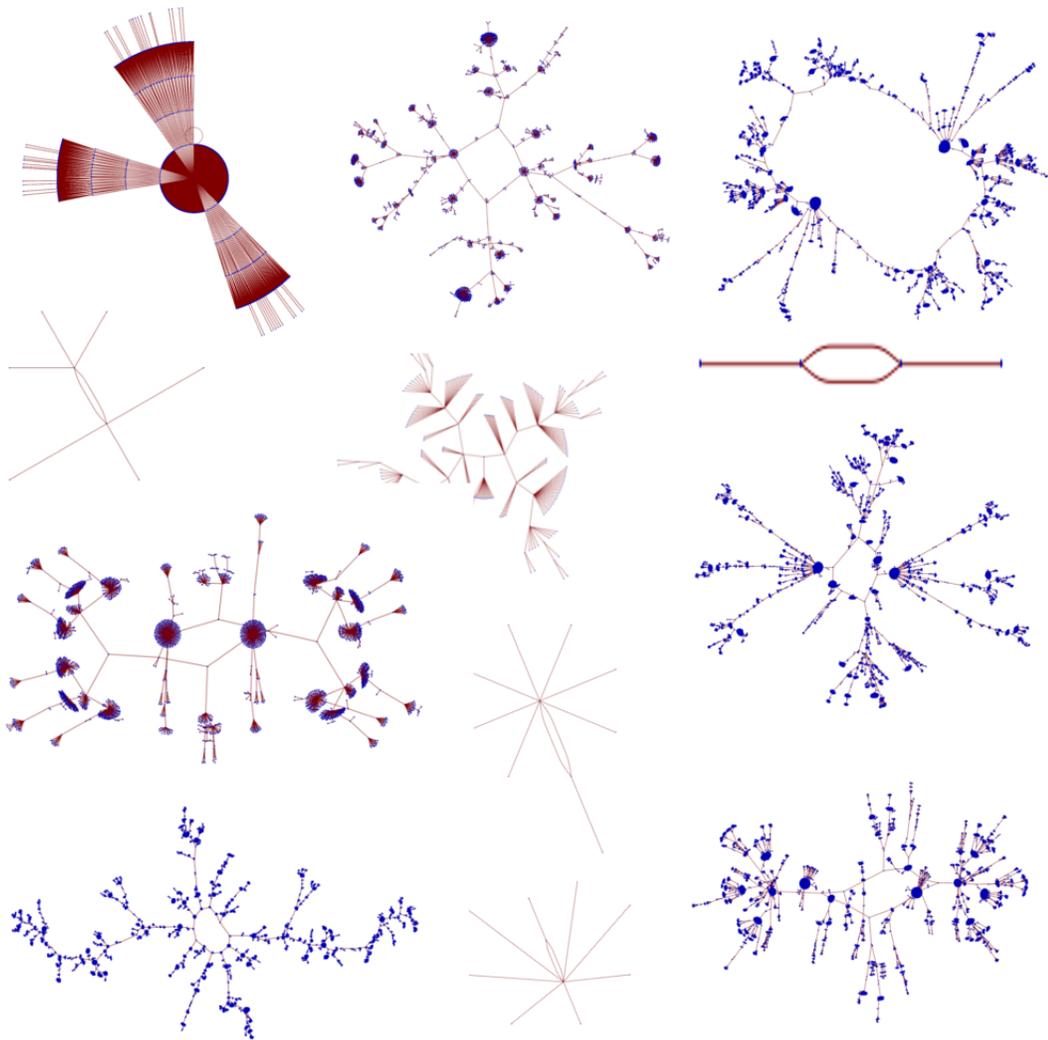


Figura A.5: Atractores para longitud igual a 20.

## A.20. Atractores con longitud igual a 21.

El mismo atractor, sin embargo la cantidad de Jardines del Edén para llegar a él ha aumentado considerablemente. Los atractores nos muestran cadenas que generan un patrón tal que se repetirá  $n$  veces en determinados pasos del tiempo, sin embargo, podráa ser que algunos atractores contengan a otros, como en este caso este atractor al poseer más Jardín del Edén que el anterior podemos concluir que lo contiene:

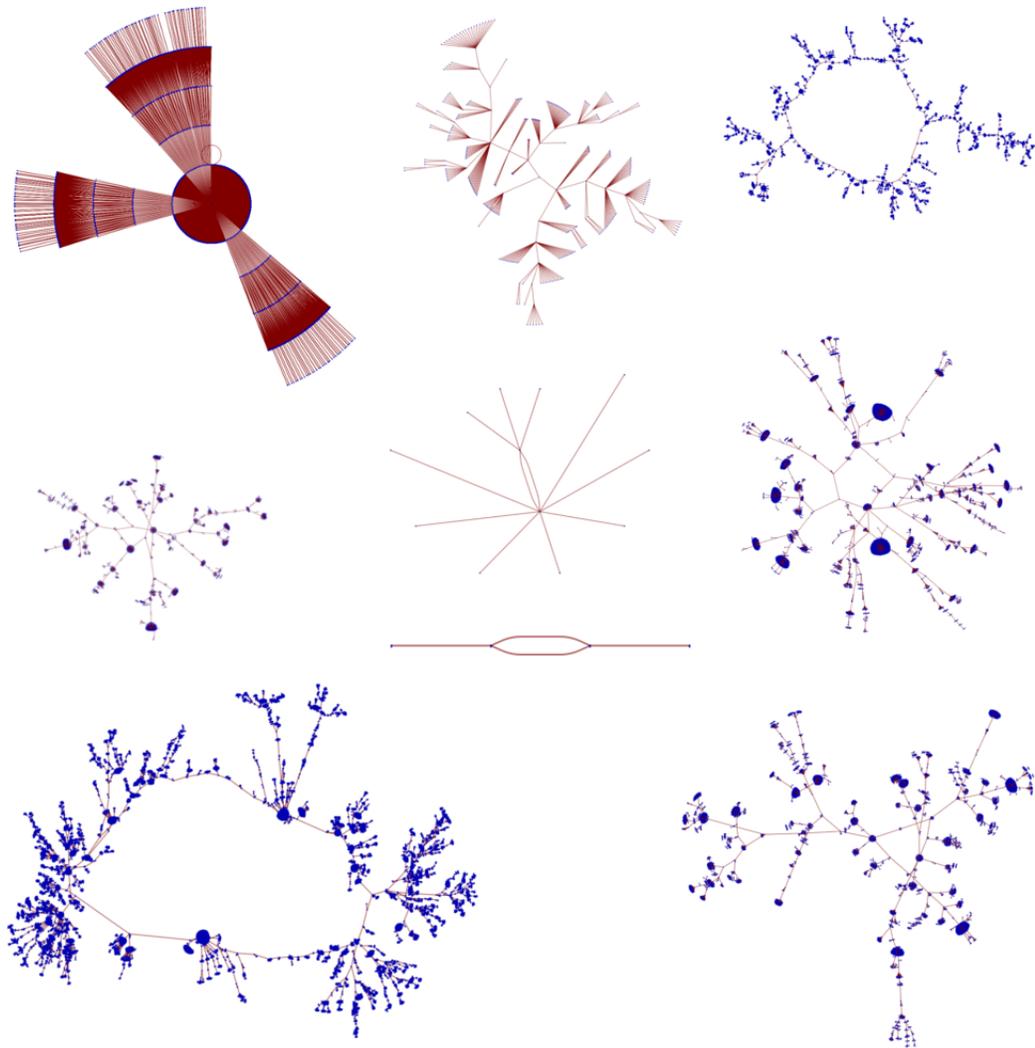


Figura A.6: Atractores para longitud igual a 21.

## A.21. Atractores con longitud igual a 22.

Como podemos observar en la siguiente figura, los patrones ya no son tan triviales y nos permiten observar de mejor forma sus ciclos. Han aumentado la cantidad de atractores y a su vez la densidad en las hojas es tan que solo podemos observar un color uniforme, pero dentro hay miles de puntos iniciales hacia un estado atractor.

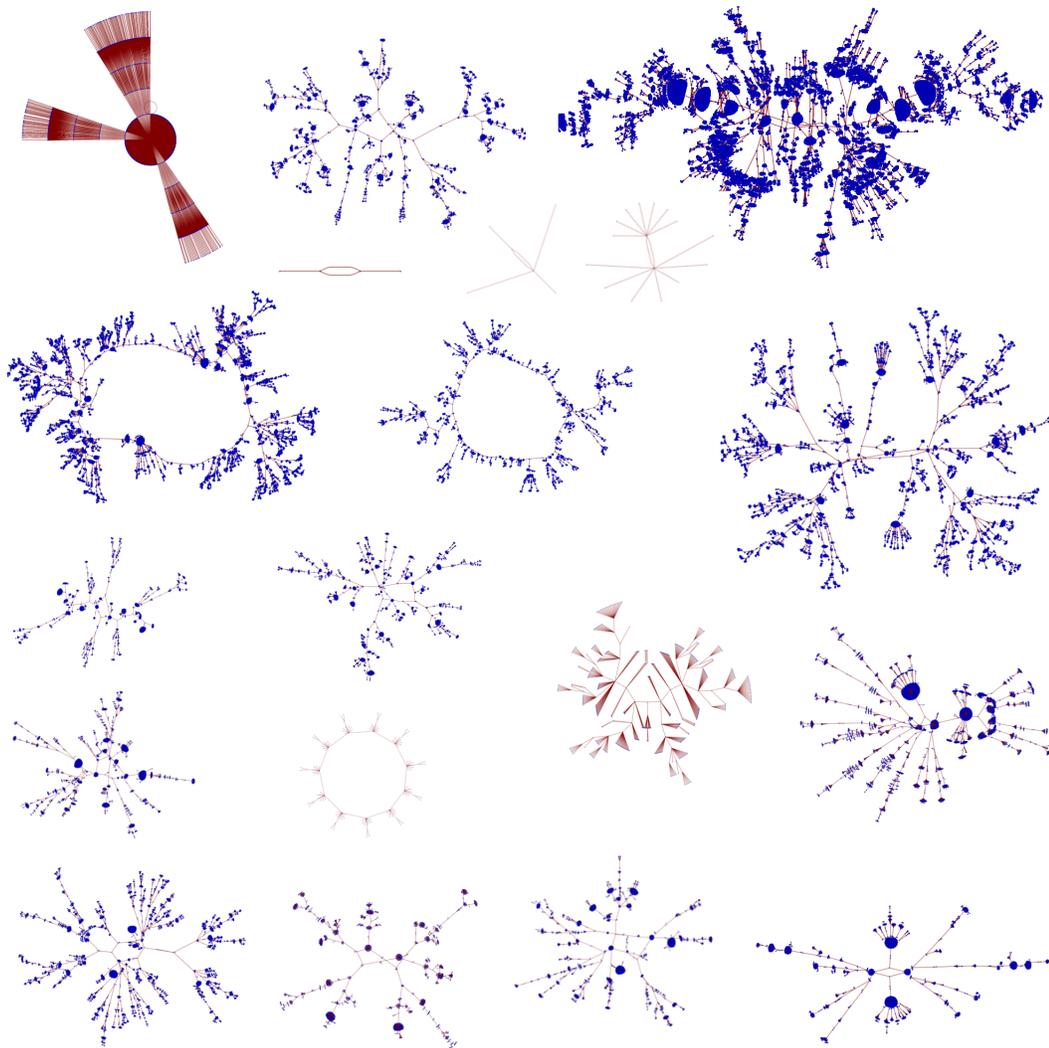


Figura A.7: Atractores para longitud igual a 22.

## A.22. Atractores con longitud igual a 23.

Cada vez aumentan la cantidad de atractores repetidos pero o con mayor Jardín del Edén o con mayor ciclo, pero los mismos caminos que los anteriores. Esto implica que entre mayor es la cadena, contiene propiedades del anterior:

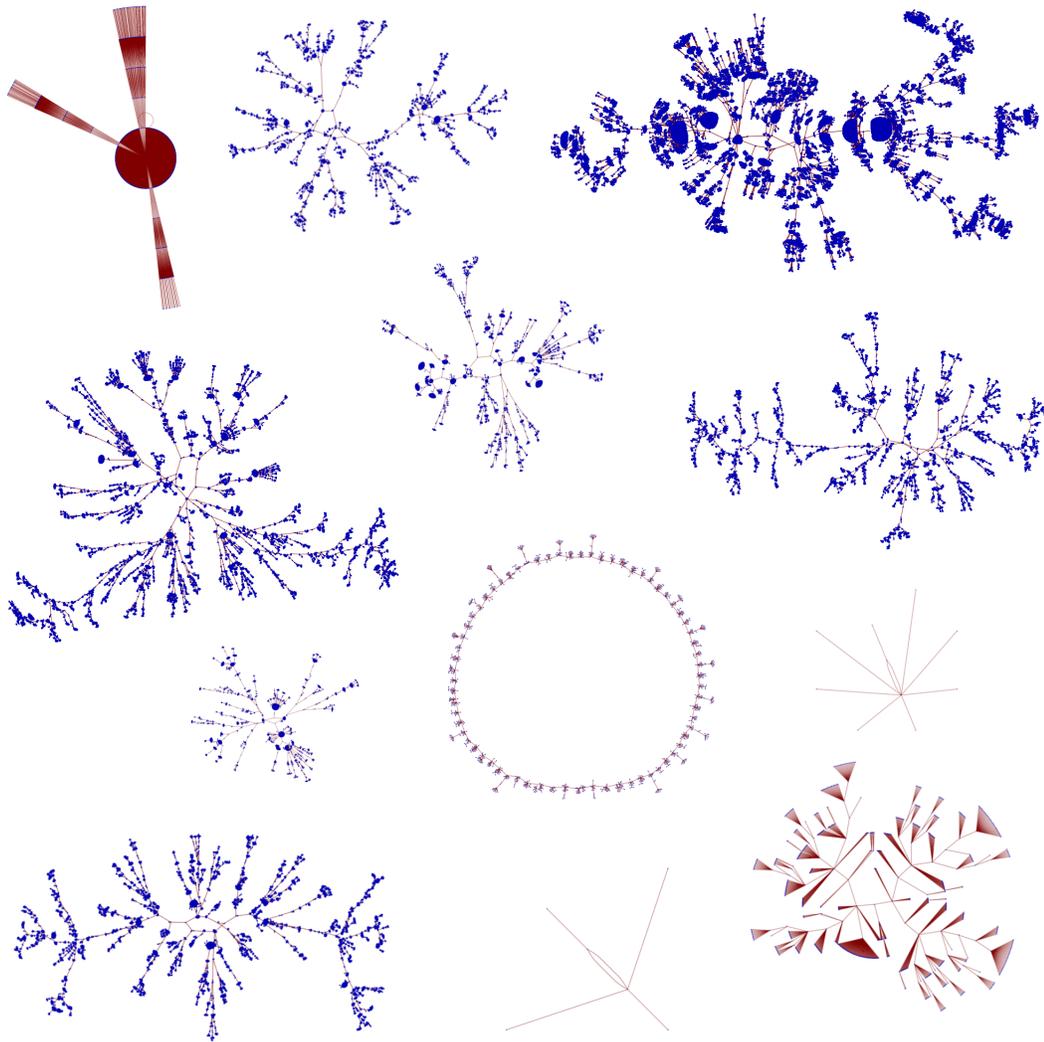


Figura A.8: Atractores para longitud igual a 23.

### A.23. Atractores con longitud igual a 24.

Las cadenas de longitud 24 nos generan demasiados patrones, en total son 640 atractores dentro de las posibles combinaciones de cadenas, esto es  $2^{24}$  posibles estados contenidos en 640 grafos. Sin embargo, algunos de estos se repiten, por lo que hemos tomado los que son únicos.

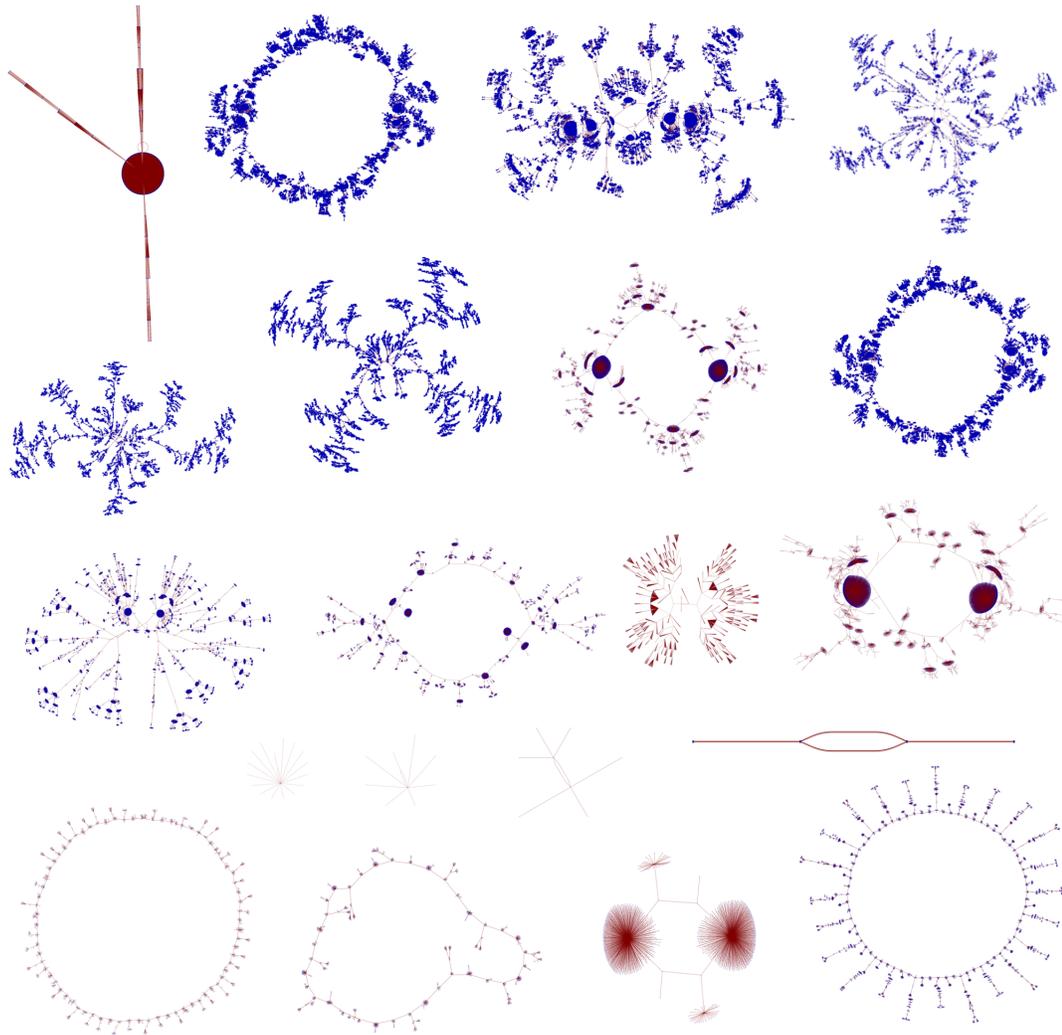


Figura A.9: Atractores para longitud igual a 24.

---

# Apéndice B

## Colisiones realizadas

Este apéndice está dedicado a colocar todas las colisiones realizadas, independientemente del resultado de la colisión, con el objetivo de mostrar al lector la manera en la que se codificaron las diversas colisiones, así como la ecuación completa para que sea capaz de ingresarlo dentro del simulador y compruebe los resultados mostrados en este documento.

### B.1. Colisiones binarias

#### B.1.1. Parámetros para definir la cantidad de colisiones binarias a realizarse

Para definir la cantidad de colisiones binarias a realizarse empleamos teoría de conjuntos para calcular la cantidad de combinaciones posibles entre todos los elementos que tenemos identificados. En el caso especial de las colisiones binarias, el orden no importa de cómo se ingresen las partículas, por lo que emplearemos una combinación sin repeticiones, y para calcular empleamos la fórmula B.1:

$$C = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (\text{B.1})$$

Dónde:

1.  $n$  es el número de elementos totales.

2.  $r$  es la cantidad de elementos que vamos a tomar.

En el caso de las colisiones binarias, tenemos 8 elementos identificados (6 gliders y 2 still-life, para más detalles consultar la sección 4.4), y tomaremos 2 (binario), por lo que sustituyendo obtenemos que:

$$C = \binom{n}{r} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28$$

Por lo tanto, tenemos 28 maneras de combinar las partículas, las cuales serían las mostradas en la tabla B.1, sin embargo de estas 28 solo podemos realizar 11 por dos razones:

1. **El fondo periódico es distinto:** Debido a que no hemos encontrado un fondo periódico que permita la coexistencia de los gliders que tienen distinto fondo periódico (3er fondo), las partículas que posean fondos distintos son imposibles de colisionar. Ejemplo de esto son las partículas  $g_1$  y  $g_4$ , debido a que  $g_1$  tiene el fondo periódico  $1(fp_1)$  del lado donde colisionaría con  $g_4$ , la cual tiene al fondo periódico  $2(fp_2)$ .
2. **Las partículas son paralelas:** Si las partículas se mueven hacia la misma dirección, jamás colisionarán debido a que poseen la misma velocidad (consultar la sección 4.4 para más información). Ejemplo de esto son los gliders  $g_6$  y  $g_1$ , aunque tienen el fondo periódico en común, se mueven hacia la derecha, por lo que nunca colisionarán, otro ejemplo son los still-life.

Así que en la tabla B.1 mostraremos la combinación y si se puede realizar o no, en caso de que no ser posible se dará uno de los dos motivos que se han explicado.

No.	Combinación	¿Puede realizarse?	Motivo
1	$g_1 \leftrightarrow g_2$	Si	
2	$g_1 \leftrightarrow g_3$	No	Son paralelas
3	$g_1 \leftrightarrow g_4$	No	Fondo periódico distinto
4	$g_1 \leftrightarrow g_5$	No	Fondo periódico distinto y son paralelas

*Continúa en la siguiente página*

Cuadro B.1 – Continuación de la página anterior

No.	Combinación	¿Puede realizarse?	Motivo
5	$g_1 \leftrightarrow g_6$	Si	
6	$g_1 \leftrightarrow s_1$	Si	
7	$g_1 \leftrightarrow s_2$	No	Fondo periódico distinto
8	$g_2 \leftrightarrow g_4$	No	Fondo periódico distinto y son paralelas
9	$g_2 \leftrightarrow g_6$	No	Son paralelas
10	$g_3 \leftrightarrow g_2$	No	Fondo periódico distinto
11	$g_3 \leftrightarrow g_4$	Si	
12	$g_3 \leftrightarrow g_5$	No	Son paralelas
13	$g_3 \leftrightarrow g_6$	No	Fondo periódico distinto
14	$g_3 \leftrightarrow s_1$	No	Fondo periódico distinto
15	$g_3 \leftrightarrow s_2$	Si	
16	$g_4 \leftrightarrow g_6$	No	Son paralelas
17	$g_5 \leftrightarrow g_2$	Si	
18	$g_5 \leftrightarrow g_4$	No	Fondo periódico distinto
19	$g_5 \leftrightarrow g_6$	Si	
20	$g_5 \leftrightarrow s_1$	Si	
21	$g_5 \leftrightarrow s_2$	No	Fondo periódico distinto
22	$s_1 \leftrightarrow g_2$	Si	
23	$s_1 \leftrightarrow g_4$	No	Fondo periódico distinto
24	$s_1 \leftrightarrow g_6$	Si	
25	$s_1 \leftrightarrow s_2$	No	Son paralelas
26	$s_2 \leftrightarrow g_2$	No	Fondo periódico distinto
27	$s_2 \leftrightarrow g_4$	Si	
28	$s_2 \leftrightarrow g_6$	No	Fondo periódico distinto

Cuadro B.1: Tabla de colisiones binarias posibles

Así, tenemos la cantidad total de combinaciones que se pueden simular, para el caso de las binarias no existen más combinaciones posibles. Ahora, por cada com-

binación debemos determinar cuántas colisiones son posibles de acuerdo a las fases que poseen las partículas que participan, para esto emplearemos la fórmula B.2.

$$\text{Colisiones} = m * n \quad (\text{B.2})$$

Dónde:

1.  $m$  son la cantidad de fases que posee la primer partícula que participa.
2.  $n$  son la cantidad de fases que posee la segunda partícula que participa.

Entonces, tomemos como ejemplo que colisionaremos  $g_1$  contra  $g_6$ , ambas partículas tienen 5 fases distintas (para consultar las fases ver 4.4), por lo tanto tenemos:

$$\text{Colisiones} = 5 * 5 = 25$$

Podemos colisionar de 25 maneras distintas nuestro sistema, independientemente de si el resultado en alguna colisión es el mismo o algún punto de colisión no es alcanzable. En las secciones siguientes calcularemos por cada una de las 11 combinaciones la cantidad de colisiones posibles y mostraremos los resultados obtenidos, así como la ecuación completa para su simulación y comprobación, esta ecuación estará formada por la estructura mostrada en la ecuación B.3

$$fp_a(f_b) \leftrightarrow g_c(f_d) \leftrightarrow s_e(f)_h = K \quad (\text{B.3})$$

Dónde:

1.  $fp_a(f_b)$  denotará el fondo periódico número  $a$  en la fase número  $b$ .
2.  $g_c(f_d)$  denotará el glider número  $c$  en la fase número  $d$ .
3.  $s_e(f)_h$  denotará el still-life número  $e$  en la fase número  $h$ .
4.  $K$  denotará una combinación de gliders y still-life, y tendrá la misma notación descrita en la sección 4.6.

Finalmente para dividir las colisiones, en cada sección colocaremos una subsección por cada fase de la partícula que aparece del lado izquierdo, en ella ejemplificaremos su interacción con todas las fases de la partícula del lado derecho.

### B.1.2. Restricciones por dinámica

Existen algunas restricciones por la dinámica del fondo al momento de realizar las colisiones, y que disminuyen la cantidad que son posibles de realizar, estas restricciones son:

1. **El fondo periódico 2 solo permite una colisión por combinación:** Esta restricción se da si los elementos que participan tienen las mismas fases que el fondo periódico. Por ejemplo, si intentamos colisionar el glider  $g_3$  con el glider  $g_4$ , la cantidad teórica de colisiones posibles son  $5*5=25$ , sin embargo, estos gliders existen en el fondo periódico 2, el cual posee 5 fases también, por lo que para mantener las estructuras y que coexistan con el fondo, solo podemos colisionar de una manera y es cuando el glider está en fase con el fondo, así que solo podemos colisionar 5 formas.
2. **El fondo periódico 2 solo permite dos colisiones por combinación:** Este caso es similar al primero, pero solo aplica para el still-life  $s_2$ , ya que posee 10 fases, el fondo nos permite colocarlo de dos formas distintas. Un ejemplo es si colisionamos el glider  $g_3$  con el still-life  $s_2$ , teóricamente nos debe dar  $5*10=50$ , sin embargo solo podemos diseñar dos colisiones que estén en fase con el fondo, por lo que en realidad solo podremos simular 10 formas.

### B.1.3. g1 VS g2

Para  $g_1$  contra  $g_2$ , tenemos que ambas poseen 5 fases, por lo que la cantidad de colisiones posibles que podemos realizar son:

$$\text{Colisiones} = 5 * 5 = 25 \quad (\text{B.4})$$

#### g1 en la fase 1

En la figura B.1 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_1$  usando la fase 1, y rotar la fase del glider  $g_2$  en las 5 fases que posee.

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = \emptyset$

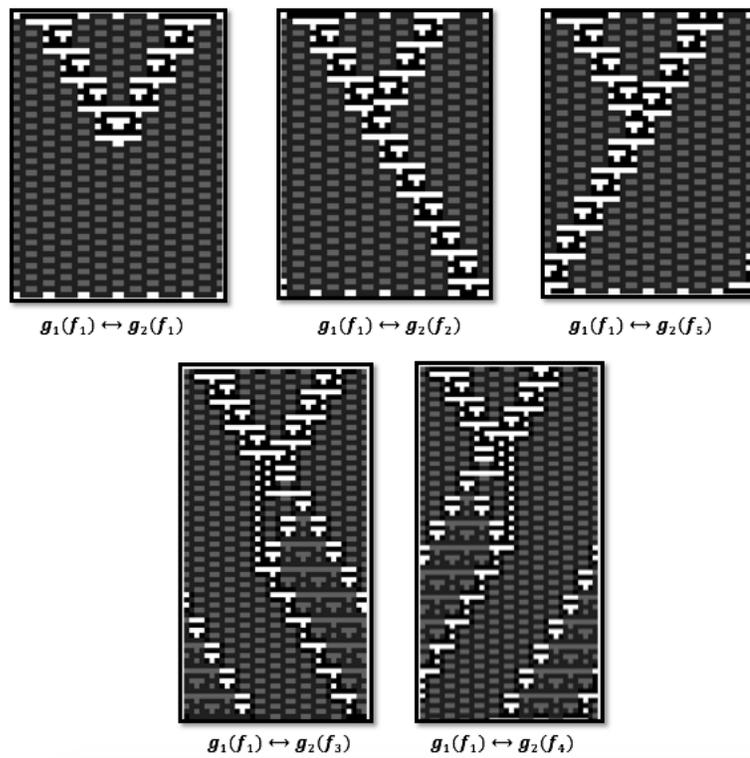


Figura B.1: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_1$  en la fase 1 y las 5 fases que posee el glider  $g_2$

2.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_1$
3.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_3 + g_5$
4.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_6 + g_4$
5.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_2$

**g1 en la fase 2**

En la figura B.2 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_1$  usando la fase 2, y rotar la fase del glider  $g_2$  en las 5 fases que posee.

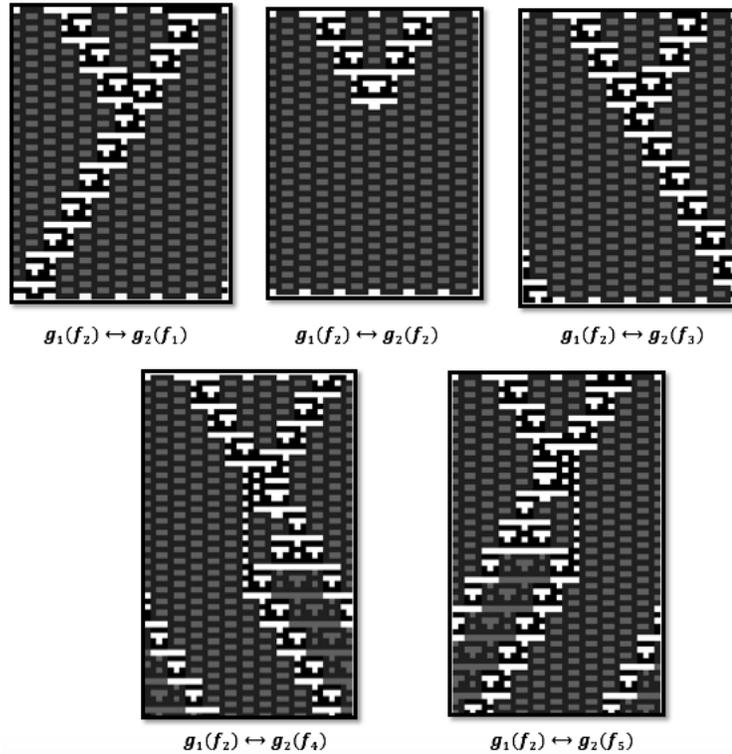


Figura B.2: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_1$  en la fase 2 y las 5 fases que posee el glider  $g_2$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_2$

2.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = \emptyset$
3.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_1$
4.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_3 + g_5$
5.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_6 + g_4$

### g1 en la fase 3

En la figura B.3 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_1$  usando la fase 3, y rotar la fase del glider  $g_2$  en las 5 fases que posee.

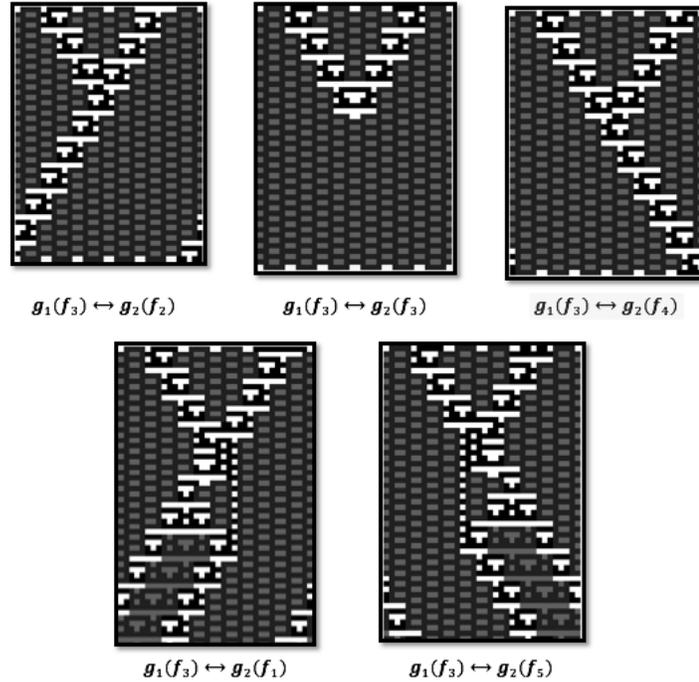


Figura B.3: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_1$  en la fase 3 y las 5 fases que posee el glider  $g_2$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_6 + g_4$
2.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_2$

3.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_2) = \emptyset$
4.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_1$
5.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_3 + g_5$

**g1 en la fase 4**

En la figura B.4 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_1$  usando la fase 4, y rotar la fase del glider  $g_2$  en las 5 fases que posee.

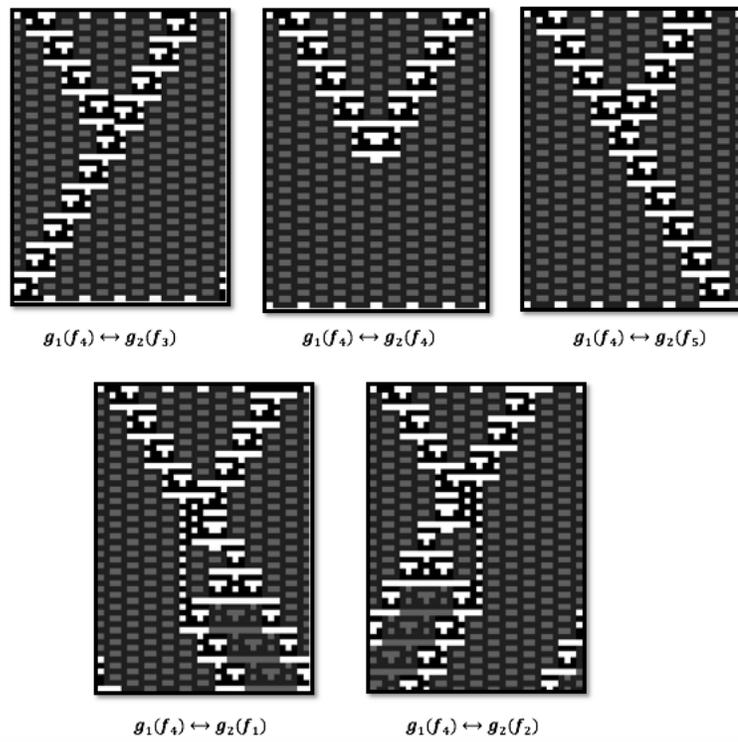


Figura B.4: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_1$  en la fase 4 y las 5 fases que posee el glider  $g_2$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_3 + g_5$
2.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_6 + g_4$

3.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_2$
4.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_1) = \emptyset$
5.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_1$

**g1 en la fase 5**

En la figura B.5 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_1$  usando la fase 5, y rotar la fase del glider  $g_2$  en las 5 fases que posee.

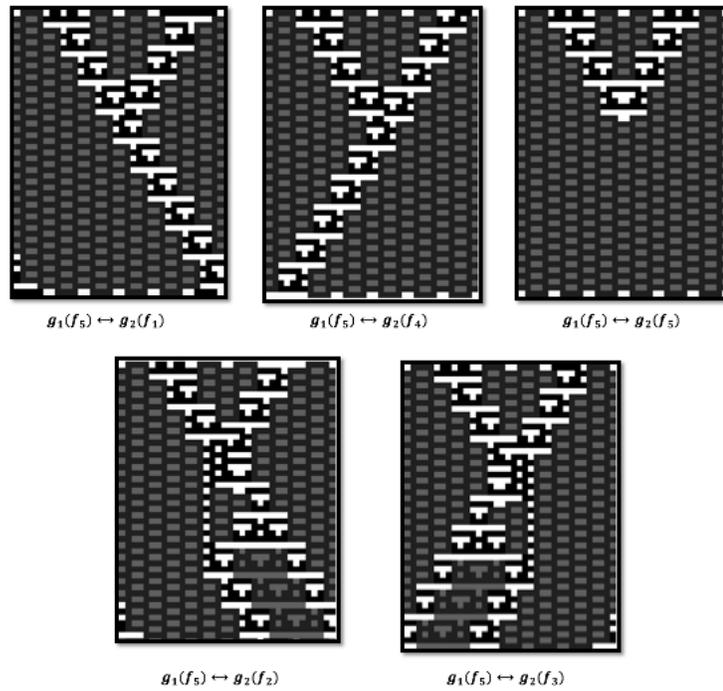


Figura B.5: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_1$  en la fase 5 y las 5 fases que posee el glider  $g_2$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_1$
2.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_3 + g_5$
3.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_6 + g_4$

$$4. fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_2$$

$$5. fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_2) = \emptyset$$

### B.1.4. g1 VS g6

Para  $g_1$  contra  $g_6$ , tenemos que ambas poseen 5 fases, por lo que la cantidad de colisiones posibles que podemos realizar son:

$$Colisiones = 5 * 5 = 25 \tag{B.5}$$

#### g1 en la fase 1

En la figura B.6 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_1$  usando la fase 1, y rotar la fase del glider  $g_6$  en las 5 fases que posee.

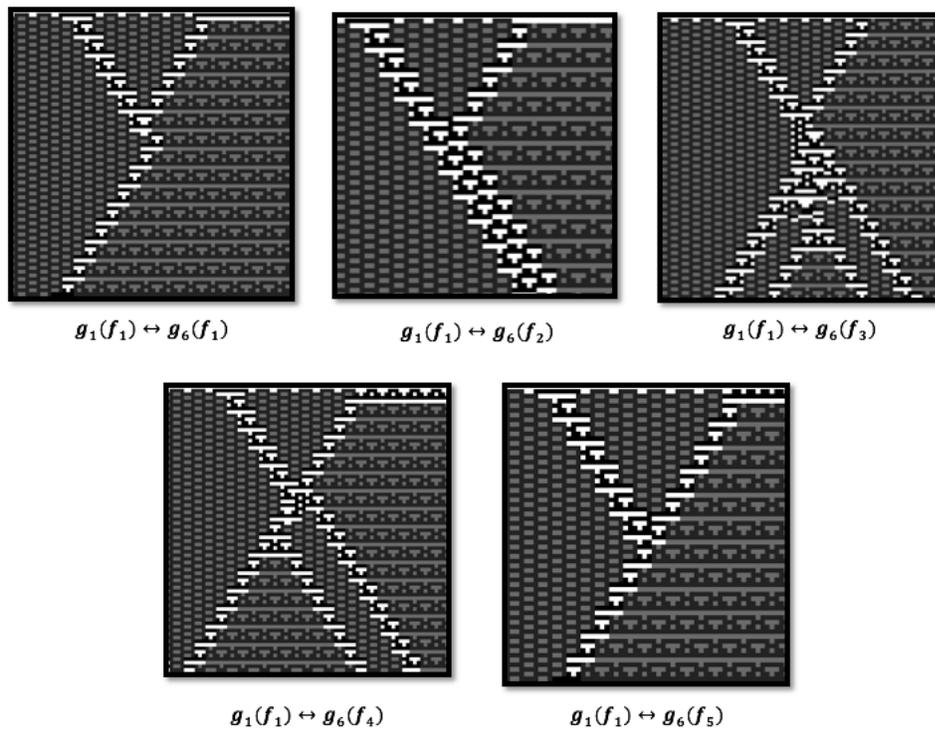


Figura B.6: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_1$  en la fase 1 y las 5 fases que posee el glider  $g_6$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_1) \leftrightarrow fp_2(f_1) = g_6$
2.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_2) \leftrightarrow fp_2(f_2) = g_3^2$
3.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_3) \leftrightarrow fp_2(f_3) = g_2 + g_6 + g_5 + g_3$
4.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_4) \leftrightarrow fp_2(f_4) = g_6 + g_5 + g_3$
5.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_5) \leftrightarrow fp_2(f_5) = g_6$

### g1 en la fase 2

En la figura B.7 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_1$  usando la fase 2, y rotar la fase del glider  $g_6$  en las 5 fases que posee.

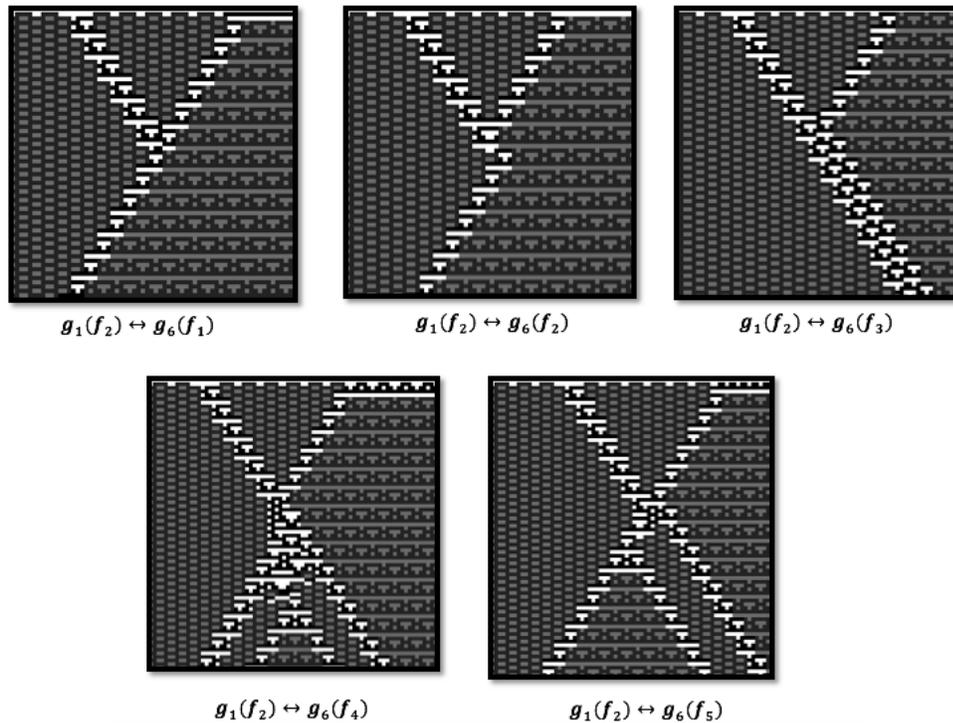


Figura B.7: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_1$  en la fase 2 y las 5 fases que posee el glider  $g_6$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_1) \leftrightarrow fp_2(f_1) = g_6$
2.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_2) \leftrightarrow fp_2(f_2) = g_6$
3.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_3) \leftrightarrow fp_2(f_3) = g_3^2$
4.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_4) \leftrightarrow fp_2(f_4) = g_2 + g_6 + g_5 + g_3$
5.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_5) \leftrightarrow fp_2(f_5) = g_6 + g_5 + g_3$

### g1 en la fase 3

En la figura B.8 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_1$  usando la fase 3, y rotar la fase del glider  $g_6$  en las 5 fases que posee.

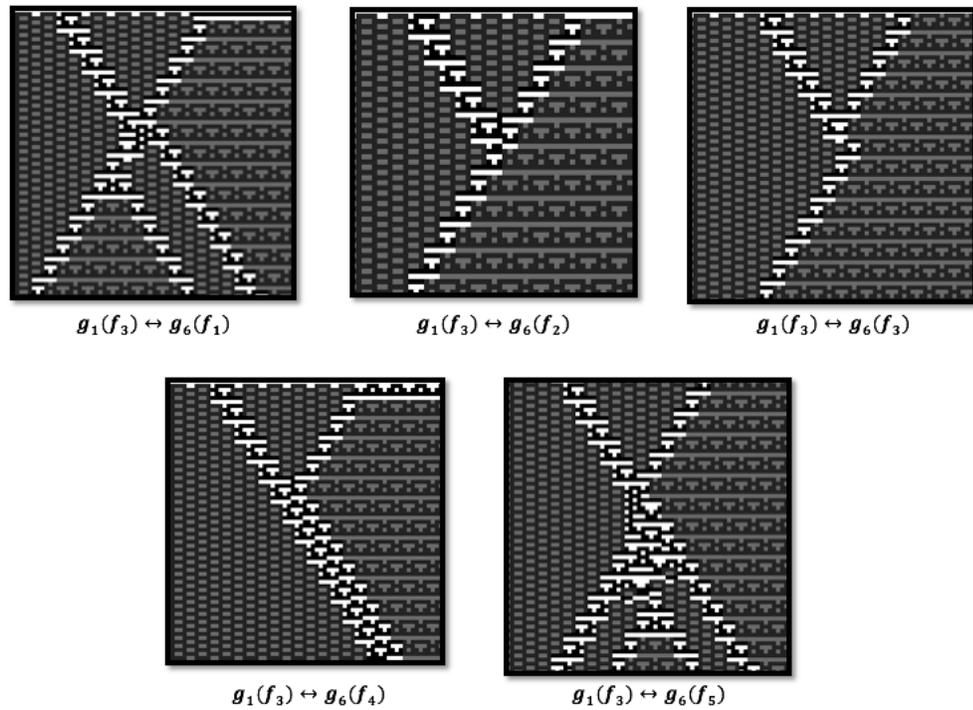


Figura B.8: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_1$  en la fase 3 y las 5 fases que posee el glider  $g_6$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_1) \leftrightarrow fp_2(f_1) = g_6 + g_5 + g_3$

2.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_2) \leftrightarrow fp_2(f_2) = g_6$
3.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_3) \leftrightarrow fp_2(f_3) = g_6$
4.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_4) \leftrightarrow fp_2(f_4) = g_3^2$
5.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_5) \leftrightarrow fp_2(f_5) = g_2 + g_6 + g_5 + g_3$

### g1 en la fase 4

En la figura B.9 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_1$  usando la fase 4, y rotar la fase del glider  $g_6$  en las 5 fases que posee.

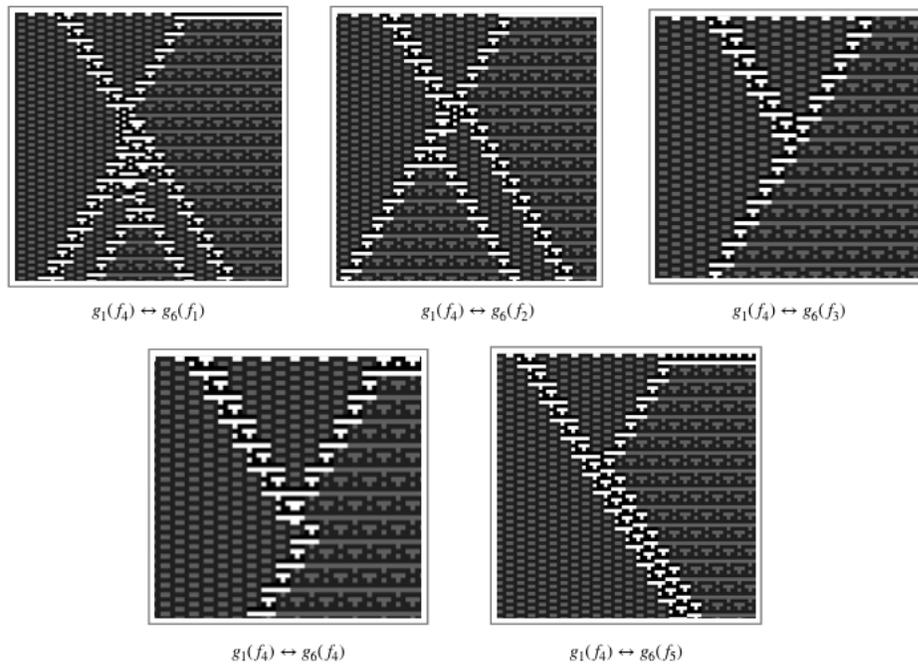


Figura B.9: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_1$  en la fase 4 y las 5 fases que posee el glider  $g_6$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_1) \leftrightarrow fp_2(f_1) = g_2 + g_6 + g_5 + g_3$
2.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_2) \leftrightarrow fp_2(f_2) = g_6 + g_5 + g_3$

3.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_3) \leftrightarrow fp_2(f_3) = g_6$
4.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_4) \leftrightarrow fp_2(f_4) = g_6$
5.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_5) \leftrightarrow fp_2(f_5) = g_3^2$

### g1 en la fase 5

En la figura B.10 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_1$  usando la fase 5, y rotar la fase del glider  $g_6$  en las 5 fases que posee.

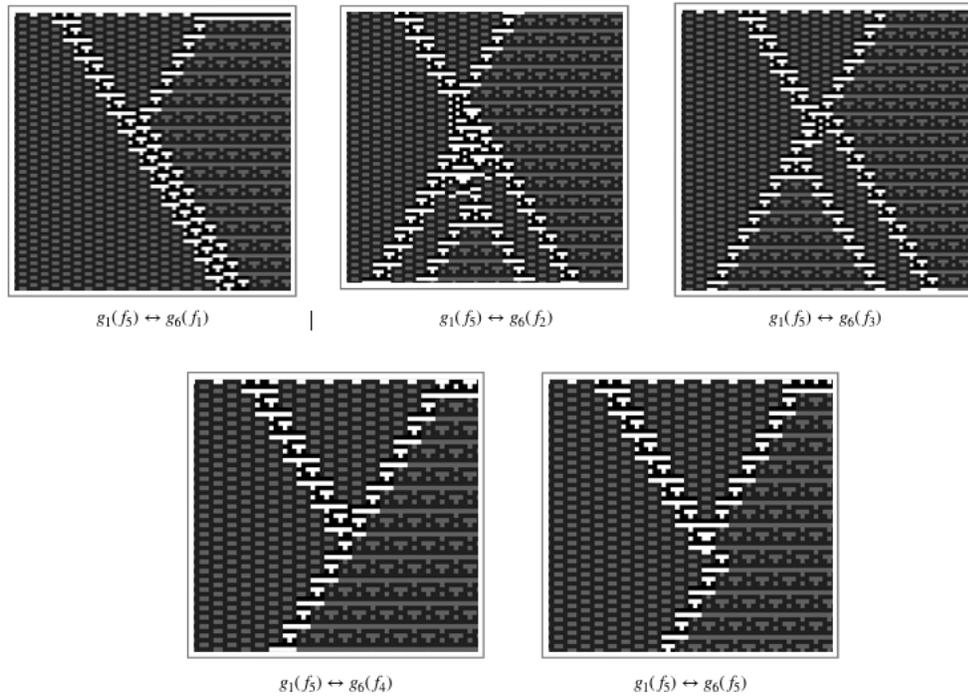


Figura B.10: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_1$  en la fase 5 y las 5 fases que posee el glider  $g_6$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_1) \leftrightarrow fp_2(f_1) = g_3^2$
2.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_2) \leftrightarrow fp_2(f_2) = g_2 + g_6 + g_5 + g_3$
3.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_3) \leftrightarrow fp_2(f_3) = g_6 + g_5 + g_3$

$$4. fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_4) \leftrightarrow fp_2(f_4) = g_6$$

$$5. fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_5) \leftrightarrow fp_2(f_5) = g_6$$

### B.1.5. g1 VS s1

Para  $g_1$  contra  $s_1$ , tenemos que  $g_1$  posee 5 fases, mientras que  $s_1$  solo posee 2, por lo que la cantidad de colisiones posibles son:

$$Colisiones = 5 * 2 = 10 \tag{B.6}$$

#### g1 en la fase 1

En la figura B.11 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_1$  usando la fase 1, y rotar la fase del still-life  $s_1$  en las 2 fases que posee.

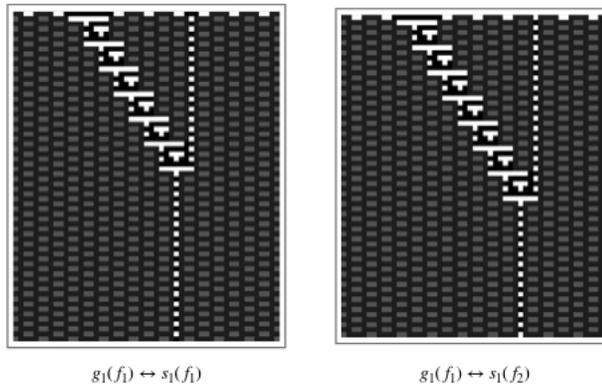


Figura B.11: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_1$  en la fase 1 y las 2 fases que posee el still-life  $s_1$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

$$1. fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow s_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = s_1$$

$$2. fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow s_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = s_1$$

### g1 en la fase 2

En la figura B.12 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_1$  usando la fase 2, y rotar la fase del still-life  $s_1$  en las 2 fases que posee.

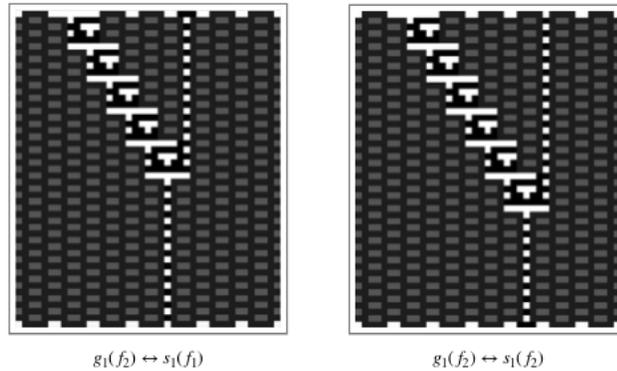


Figura B.12: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_1$  en la fase 2 y las 2 fases que posee el still-life  $s_1$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow s_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = s_1$
2.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow s_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = s_1$

### g1 en la fase 3

En la figura B.13 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_1$  usando la fase 3, y rotar la fase del still-life  $s_1$  en las 2 fases que posee.

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow s_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = s_1$
2.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow s_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = s_1$

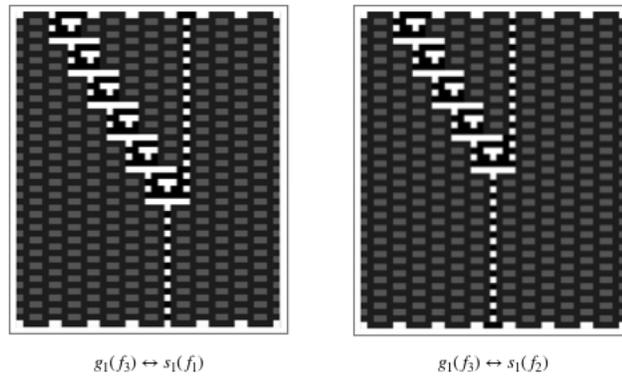


Figura B.13: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_1$  en la fase 3 y las 2 fases que posee el still-life  $s_1$

### **$g_1$ en la fase 4**

En la figura B.14 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_1$  usando la fase 4, y rotar la fase del still-life  $s_1$  en las 2 fases que posee.

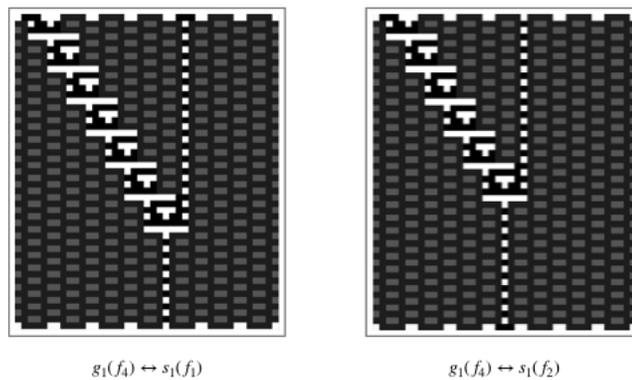


Figura B.14: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_1$  en la fase 4 y las 2 fases que posee el still-life  $s_1$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow s_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = s_1$
2.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_1(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow s_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = s_1$

### g1 en la fase 5

En la figura B.15 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_1$  usando la fase 5, y rotar la fase del still-life  $s_1$  en las 2 fases que posee.

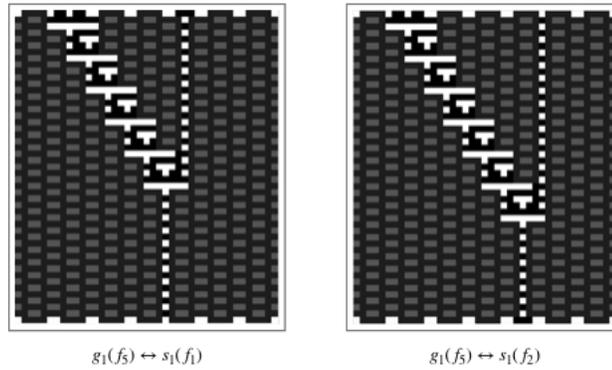


Figura B.15: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_1$  en la fase 5 y las 2 fases que posee el still-life  $s_1$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow s_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = s_1$
2.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_1(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow s_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = s_1$

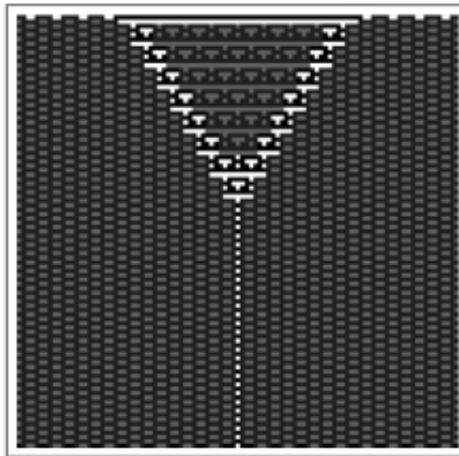
### B.1.6. g3 VS g4

Para  $g_3$  contra  $g_4$ , tenemos que ambas poseen 5 fases, sin embargo se requiere aplicar el criterio de restricción número 1 señalado en B.1.2, por lo que las colisiones posibles son:

$$\begin{aligned}
 \text{Colisiones teoricas} &= 5 * 5 = 25 \\
 \text{Colisiones reales} &= 5 * 1 = 5
 \end{aligned}
 \tag{B.7}$$

### g3 en la fase 1

En la figura B.16 podemos observar la única colisión posible al mantener fija la fase del glider  $g_3$  usando la fase 1, y utilizar la fase 1 del glider  $g_4$ :



$$g_3(f_1) \leftrightarrow g_4(f_1)$$

Figura B.16: La colisión posible entre el glider  $g_3$  en la fase 1 y el glider  $g_4$  en la fase 1

Entonces, la ecuación que tenemos como resultado es:

$$1. \quad fp_1(f_1) \leftrightarrow g_3(f_1) \leftrightarrow fp_2(f_1) \leftrightarrow g_4(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = s_1$$

### g3 en la fase 2

En la figura B.17 podemos observar la única colisión posible al mantener fija la fase del glider  $g_3$  usando la fase 2, y utilizar la fase 2 del glider  $g_4$ :

Entonces, la ecuación que tenemos como resultado es:

$$1. \quad fp_1(f_2) \leftrightarrow g_3(f_2) \leftrightarrow fp_2(f_2) \leftrightarrow g_4(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = s_1$$

### g3 en la fase 3

En la figura B.18 podemos observar la única colisión posible al mantener fija la fase del glider  $g_3$  usando la fase 3, y utilizar la fase 3 del glider  $g_4$ :



$$g_3(f_2) \leftrightarrow g_4(f_2)$$

Figura B.17: La colisión posible entre el glider  $g_3$  en la fase 2 y el glider  $g_4$  en la fase 2



$$g_3(f_3) \leftrightarrow g_4(f_3)$$

Figura B.18: La colisión posible entre el glider  $g_3$  en la fase 3 y el glider  $g_4$  en la fase 3

Entonces, la ecuación que tenemos como resultado es:

$$1. fp_1(f_2) \leftrightarrow g_3(f_3) \leftrightarrow fp_2(f_3) \leftrightarrow g_4(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_2) = s_1$$

### **g3 en la fase 4**

En la figura B.19 podemos observar la única colisión posible al mantener fija la fase del glider  $g_3$  usando la fase 4, y utilizar la fase 4 del glider  $g_4$ :



$$g_3(f_4) \leftrightarrow g_4(f_4)$$

Figura B.19: La colisión posible entre el glider  $g_3$  en la fase 4 y el glider  $g_4$  en la fase 4

Entonces, la ecuación que tenemos como resultado es:

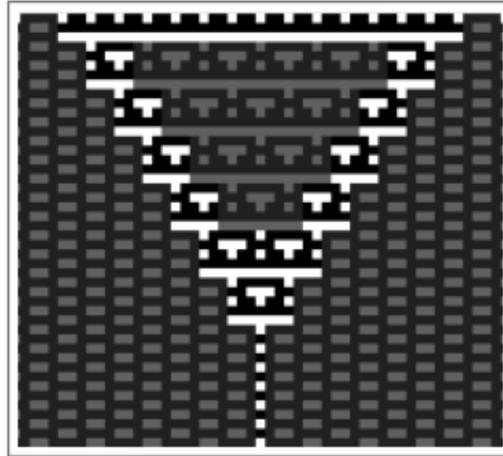
$$1. fp_1(f_1) \leftrightarrow g_3(f_4) \leftrightarrow fp_2(f_4) \leftrightarrow g_4(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_1) = s_1$$

### **g3 en la fase 5**

En la figura B.20 podemos observar la única colisión posible al mantener fija la fase del glider  $g_3$  usando la fase 5, y utilizar la fase 5 del glider  $g_4$ :

Entonces, la ecuación que tenemos como resultado es:

$$1. fp_1(f_2) \leftrightarrow g_3(f_5) \leftrightarrow fp_2(f_5) \leftrightarrow g_4(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_2) = s_1$$



$$g_3(f_5) \leftrightarrow g_4(f_5)$$

Figura B.20: La colisión posible entre el glider  $g_3$  en la fase 5 y el glider  $g_4$  en la fase 5

### B.1.7. $g_3$ VS $s_2$

Para  $g_3$  contra  $s_2$ , tenemos que  $g_3$  posee 5 fases y  $s_2$  posee 10, sin embargo se aplican los criterios 1 y 2 de la sección B.1.2, por lo que la cantidad de colisiones que se pueden hacer son:

$$\begin{aligned} \text{Colisiones teóricas} &= 5 * 10 = 50 \\ \text{Colisiones reales} &= 5 * 2 = 10 \end{aligned} \tag{B.8}$$

#### $g_3$ en la fase 1

En la figura B.21 podemos observar las dos colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_3$  usando la fase 1, y utilizar la fase 1 y 6 del still-life  $s_2$ :

Entonces, las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_3(f_1) \leftrightarrow fp_2(f_1) \leftrightarrow s_2(f_1) \leftrightarrow fp_2(f_1) = g_6$
2.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow g_3(f_1) \leftrightarrow fp_2(f_1) \leftrightarrow s_2(f_6) \leftrightarrow fp_2(f_1) = g_6$

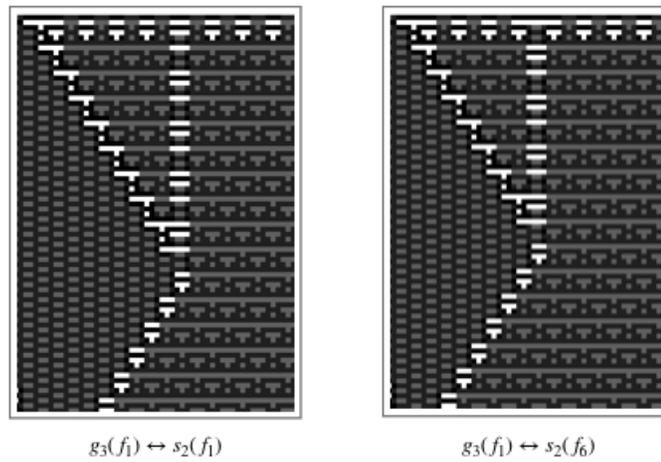


Figura B.21: Las colisiones posibles entre el glider  $g_3$  en la fase 1 y el still-life  $s_2$  en la fase 1 y 6

### **$g_3$ en la fase 2**

En la figura B.22 podemos observar las dos colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_3$  usando la fase 2, y utilizar la fase 2 y 7 del still-life  $s_2$ :

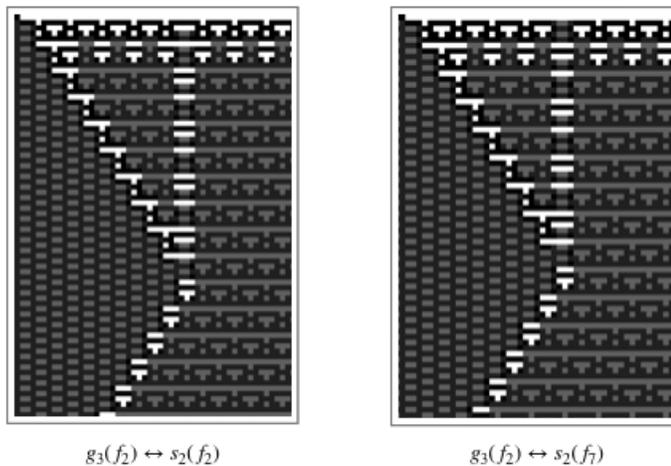


Figura B.22: Las colisiones posibles entre el glider  $g_3$  en la fase 1 y el still-life  $s_2$  en la fase 2 y 7

Entonces, las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_3(f_2) \leftrightarrow fp_2(f_2) \leftrightarrow s_2(f_2) \leftrightarrow fp_2(f_2) = g_6$

$$2. fp_1(f_2) \leftrightarrow g_3(f_2) \leftrightarrow fp_2(f_2) \leftrightarrow s_2(f_7) \leftrightarrow fp_2(f_2) = g_6$$

### g3 en la fase 3

En la figura B.23 podemos observar las dos colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_3$  usando la fase 3, y utilizar la fase 3 y 8 del still-life  $s_2$ :

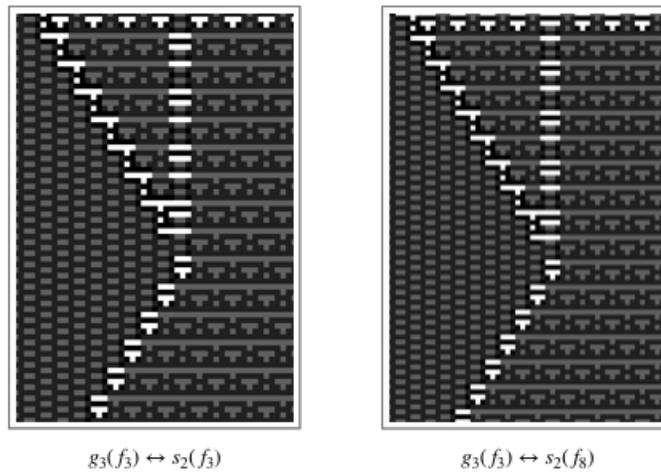


Figura B.23: Las colisiones posibles entre el glider  $g_3$  en la fase 3 y el still-life  $s_2$  en la fase 3 y 8

Entonces, las ecuaciones que tenemos como resultado son:

$$1. fp_1(f_2) \leftrightarrow g_3(f_3) \leftrightarrow fp_2(f_3) \leftrightarrow s_2(f_3) \leftrightarrow fp_2(f_3) = g_6$$

$$2. fp_1(f_2) \leftrightarrow g_3(f_3) \leftrightarrow fp_2(f_3) \leftrightarrow s_2(f_8) \leftrightarrow fp_2(f_3) = g_6$$

### g3 en la fase 4

En la figura B.24 podemos observar las dos colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_3$  usando la fase 4, y utilizar la fase 4 y 9 del still-life  $s_2$ :

Entonces, las ecuaciones que tenemos como resultado son:

$$1. fp_1(f_1) \leftrightarrow g_3(f_4) \leftrightarrow fp_2(f_4) \leftrightarrow s_2(f_4) \leftrightarrow fp_2(f_4) = g_6$$

$$2. fp_1(f_1) \leftrightarrow g_3(f_4) \leftrightarrow fp_2(f_4) \leftrightarrow s_2(f_9) \leftrightarrow fp_2(f_4) = g_6$$

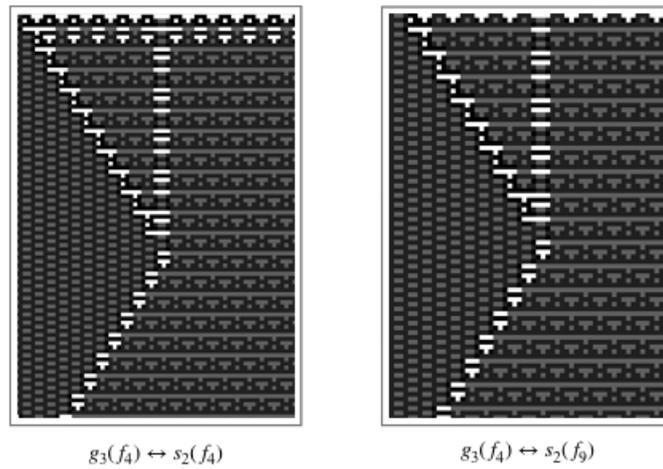


Figura B.24: Las colisiones posibles entre el glider  $g_3$  en la fase 4 y el still-life  $s_2$  en la fase 4 y 9

### $g_3$ en la fase 5

En la figura B.25 podemos observar las dos colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_3$  usando la fase 5, y utilizar la fase 5 y 10 del still-life  $s_2$ :

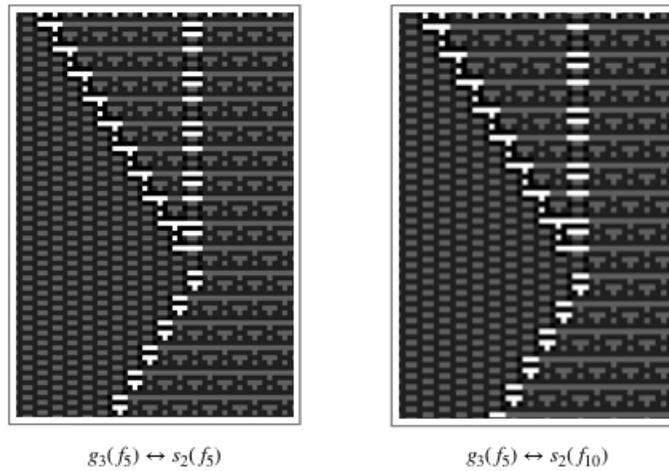


Figura B.25: Las colisiones posibles entre el glider  $g_3$  en la fase 5 y el still-life  $s_2$  en la fase 5 y 10

Entonces, las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_3(f_5) \leftrightarrow fp_2(f_5) \leftrightarrow s_2(f_5) \leftrightarrow fp_2(f_5) = g_6$
2.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow g_3(f_5) \leftrightarrow fp_2(f_5) \leftrightarrow s_2(f_{10}) \leftrightarrow fp_2(f_5) = g_6$

### B.1.8. g5 VS g2

Para  $g_5$  contra  $g_2$ , tenemos que ambos poseen 5 fases, por lo que la cantidad de colisiones que podemos realizar son:

$$\text{Colisiones} = 5 * 5 = 25 \tag{B.9}$$

#### g5 en la fase 1

En la figura B.26 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_5$  usando la fase 1, y rotar la fase del glider  $g_2$  en las 5 fases que posee.

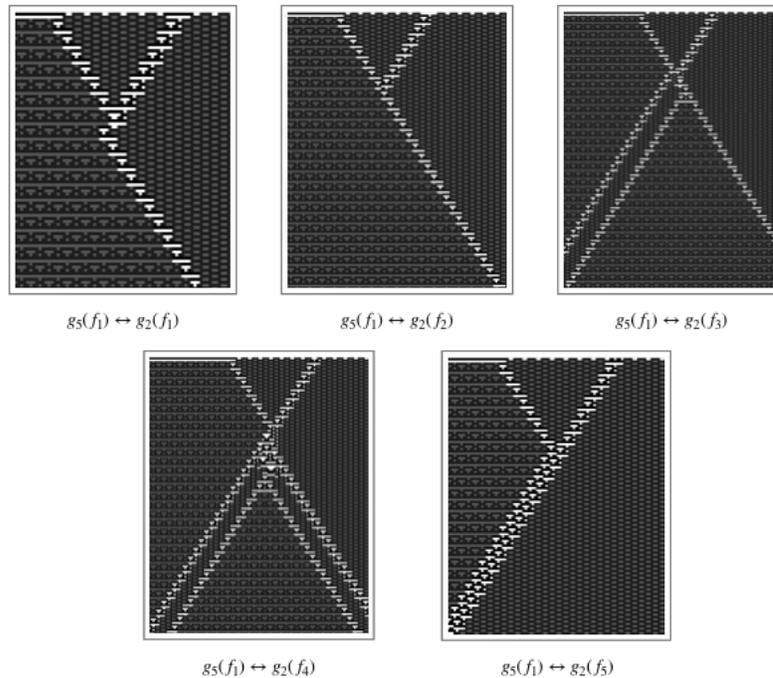


Figura B.26: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_5$  en la fase 1 y las 5 fases que posee el glider  $g_2$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_2(f_1) \leftrightarrow g_5(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_5$
2.  $fp_2(f_1) \leftrightarrow g_5(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_5$
3.  $fp_2(f_1) \leftrightarrow g_5(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_4 + g_6 + g_5$
4.  $fp_2(f_1) \leftrightarrow g_5(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_4 + g_6 + g_5 + g_2$
5.  $fp_2(f_1) \leftrightarrow g_5(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_4^2$

### g5 en la fase 2

En la figura B.27 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_5$  usando la fase 2, y rotar la fase del glider  $g_2$  en las 5 fases que posee.

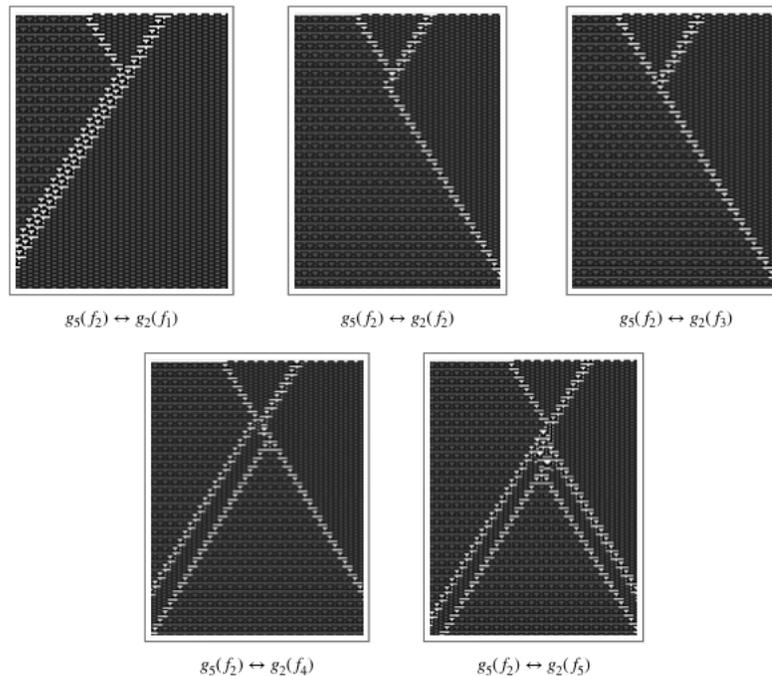


Figura B.27: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_5$  en la fase 2 y las 5 fases que posee el glider  $g_2$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_2(f_2) \leftrightarrow g_5(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_4^2$
2.  $fp_2(f_2) \leftrightarrow g_5(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_5$
3.  $fp_2(f_2) \leftrightarrow g_5(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_5$
4.  $fp_2(f_2) \leftrightarrow g_5(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_4 + g_6 + g_5$
5.  $fp_2(f_2) \leftrightarrow g_5(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_4 + g_6 + g_5 + g_2$

### g5 en la fase 3

En la figura B.28 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_5$  usando la fase 3, y rotar la fase del glider  $g_2$  en las 5 fases que posee.

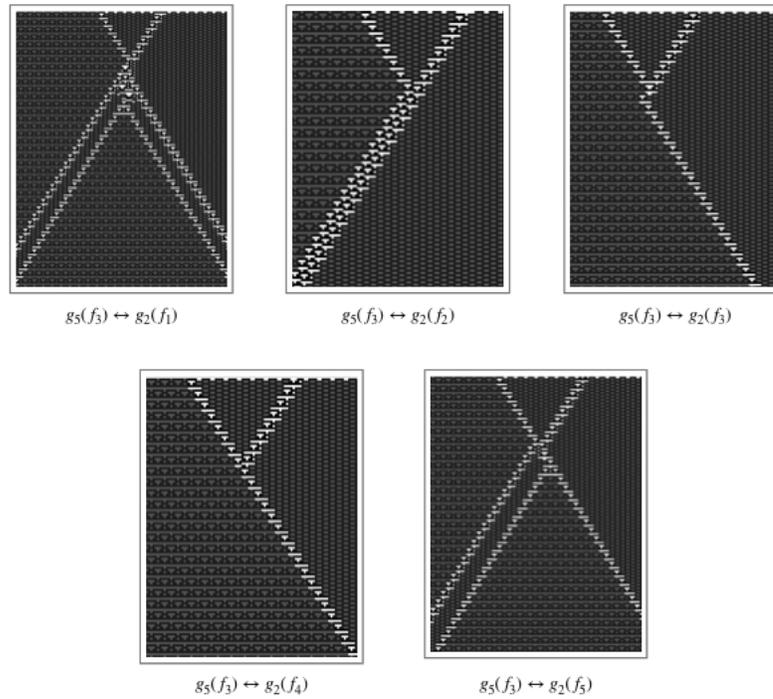


Figura B.28: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_5$  en la fase 3 y las 5 fases que posee el glider  $g_2$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_2(f_3) \leftrightarrow g_5(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_4 + g_6 + g_5 + g_2$

2.  $fp_2(f_3) \leftrightarrow g_5(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_4^2$
3.  $fp_2(f_3) \leftrightarrow g_5(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_5$
4.  $fp_2(f_3) \leftrightarrow g_5(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_5$
5.  $fp_2(f_3) \leftrightarrow g_5(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_4 + g_6 + g_5$

**g5 en la fase 4**

En la figura B.29 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_5$  usando la fase 4, y rotar la fase del glider  $g_2$  en las 5 fases que posee.

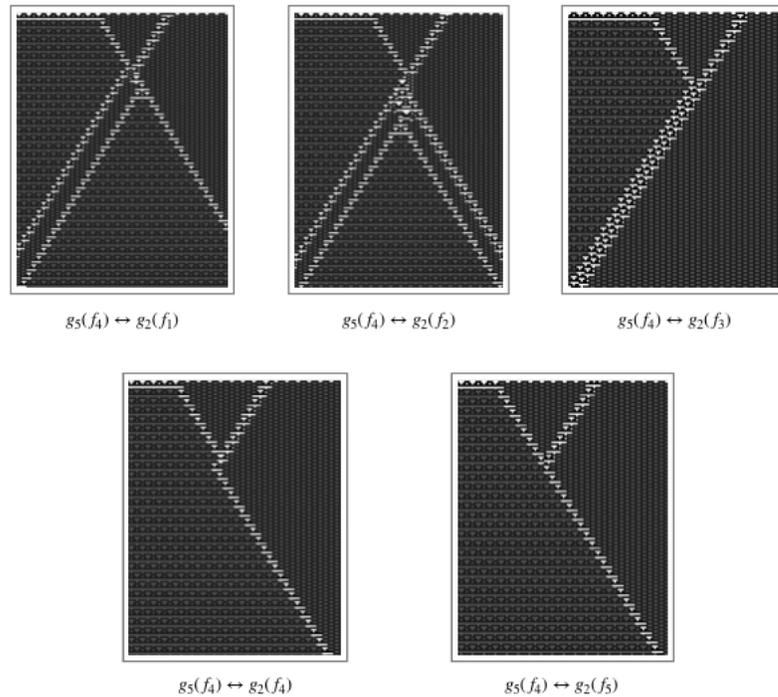


Figura B.29: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_5$  en la fase 4 y las 5 fases que posee el glider  $g_2$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_2(f_4) \leftrightarrow g_5(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_4 + g_6 + g_5$
2.  $fp_2(f_4) \leftrightarrow g_5(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_4 + g_6 + g_5 + g_2$

3.  $fp_2(f_4) \leftrightarrow g_5(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_4^2$
4.  $fp_2(f_4) \leftrightarrow g_5(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_5$
5.  $fp_2(f_4) \leftrightarrow g_5(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_5$

### g5 en la fase 5

En la figura B.30 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_5$  usando la fase 5, y rotar la fase del glider  $g_2$  en las 5 fases que posee.

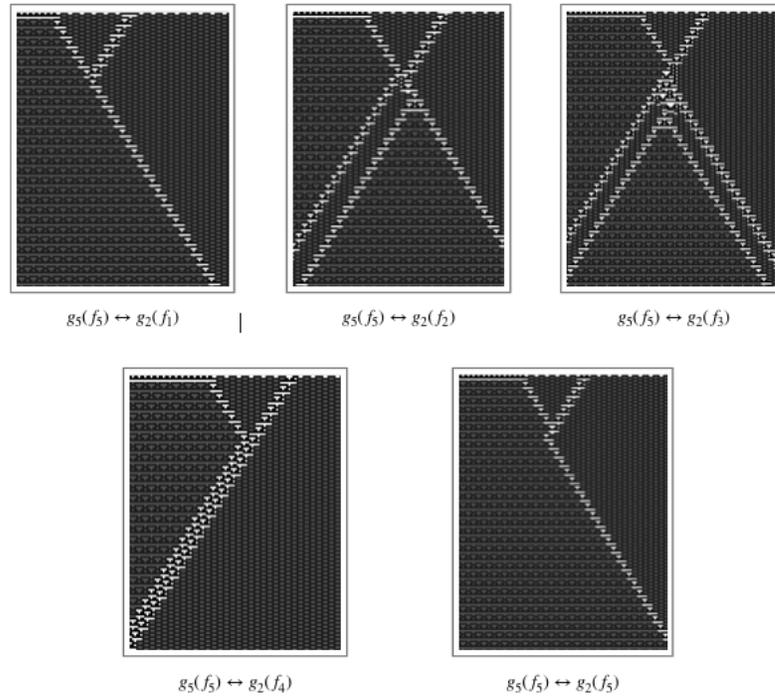


Figura B.30: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_5$  en la fase 5 y las 5 fases que posee el glider  $g_2$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_2(f_5) \leftrightarrow g_5(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_5$
2.  $fp_2(f_5) \leftrightarrow g_5(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_4 + g_6 + g_5$
3.  $fp_2(f_5) \leftrightarrow g_5(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_4 + g_6 + g_5 + g_2$

$$4. fp_2(f_5) \leftrightarrow g_5(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_4^2$$

$$5. fp_2(f_5) \leftrightarrow g_5(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_5$$

### B.1.9. g5 VS g6

Para  $g_5$  contra  $g_6$ , tenemos que ambos poseen 5 fases, por lo que la cantidad de colisiones que podemos realizar son:

$$Colisiones = 5 * 5 = 25 \tag{B.10}$$

#### g5 en la fase 1

En la figura B.31 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_5$  usando la fase 1, y rotar la fase del glider  $g_6$  en las 5 fases que posee.

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

$$1. fp_2(f_1) \leftrightarrow g_5(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_1) \leftrightarrow fp_2(f_1) = s_2$$

$$2. fp_2(f_1) \leftrightarrow g_5(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_2) \leftrightarrow fp_2(f_2) = g_5g_3$$

$$3. fp_2(f_1) \leftrightarrow g_5(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_3) \leftrightarrow fp_2(f_3) = gun_3$$

$$4. fp_2(f_1) \leftrightarrow g_5(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_4) \leftrightarrow fp_2(f_4) = gun_4$$

$$5. fp_2(f_1) \leftrightarrow g_5(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_5) \leftrightarrow fp_2(f_5) = g_4g_6$$

#### g5 en la fase 2

En la figura B.32 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_5$  usando la fase 2, y rotar la fase del glider  $g_6$  en las 5 fases que posee.

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

$$1. fp_2(f_2) \leftrightarrow g_5(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_1) \leftrightarrow fp_2(f_1) = g_4g_6$$

$$2. fp_2(f_2) \leftrightarrow g_5(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_2) \leftrightarrow fp_2(f_2) = s_2$$

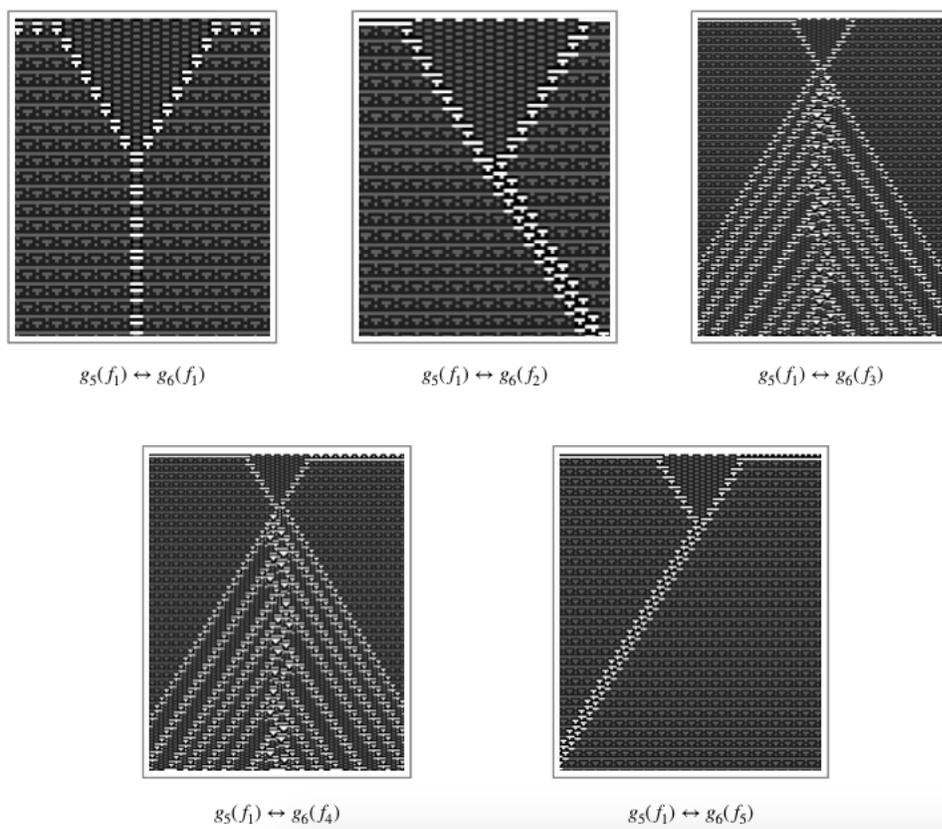


Figura B.31: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_5$  en la fase 1 y las 5 fases que posee el glider  $g_6$

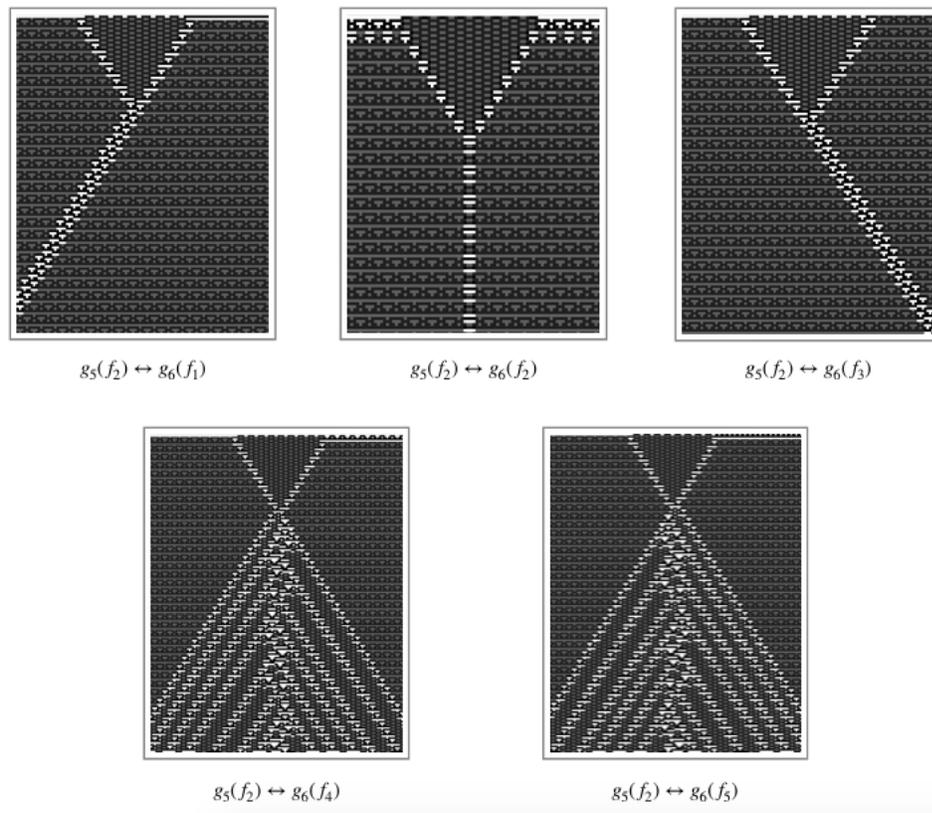


Figura B.32: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_5$  en la fase 2 y las 5 fases que posee el glider  $g_6$

3.  $fp_2(f_2) \leftrightarrow g_5(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_3) \leftrightarrow fp_2(f_3) = g_5g_3$
4.  $fp_2(f_2) \leftrightarrow g_5(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_4) \leftrightarrow fp_2(f_4) = gun_3$
5.  $fp_2(f_2) \leftrightarrow g_5(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_5) \leftrightarrow fp_2(f_5) = gun_4$

**g5 en la fase 3**

En la figura B.33 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_5$  usando la fase 3, y rotar la fase del glider  $g_6$  en las 5 fases que posee.

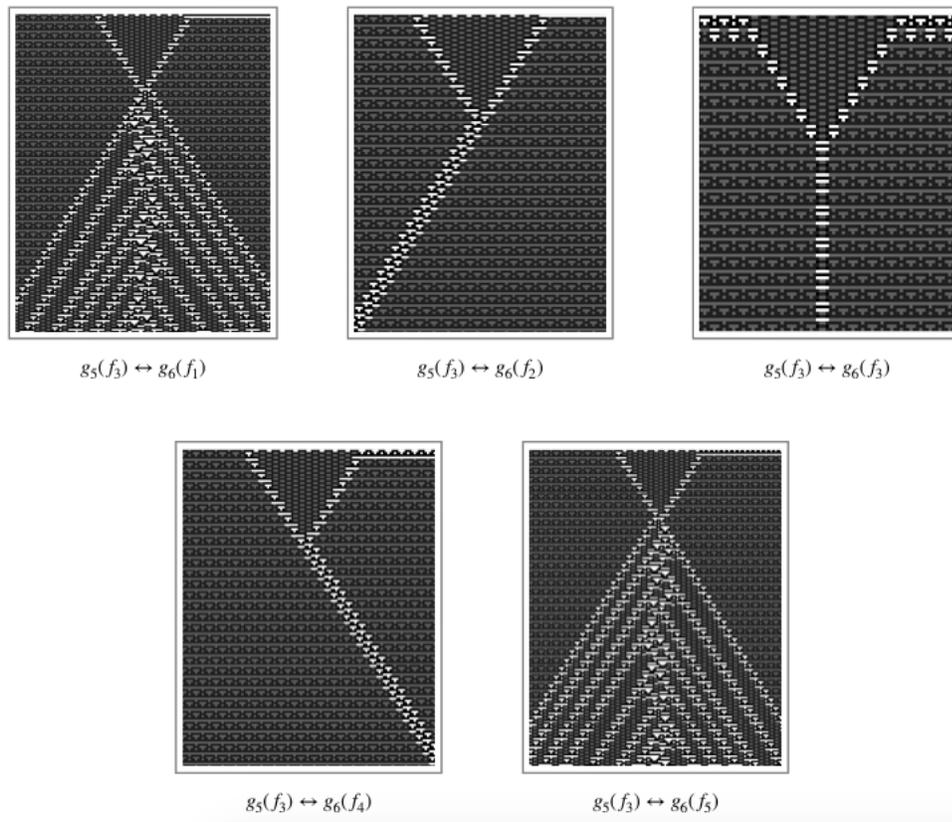


Figura B.33: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_5$  en la fase 3 y las 5 fases que posee el glider  $g_6$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_2(f_3) \leftrightarrow g_5(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_1) \leftrightarrow fp_2(f_1) = gun_4$

2.  $fp_2(f_3) \leftrightarrow g_5(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_2) \leftrightarrow fp_2(f_2) = g_4g_6$
3.  $fp_2(f_3) \leftrightarrow g_5(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_3) \leftrightarrow fp_2(f_3) = s_2$
4.  $fp_2(f_3) \leftrightarrow g_5(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_4) \leftrightarrow fp_2(f_4) = g_5g_3$
5.  $fp_2(f_3) \leftrightarrow g_5(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_5) \leftrightarrow fp_2(f_5) = gun_3$

### g5 en la fase 4

En la figura B.34 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_5$  usando la fase 4, y rotar la fase del glider  $g_6$  en las 5 fases que posee.

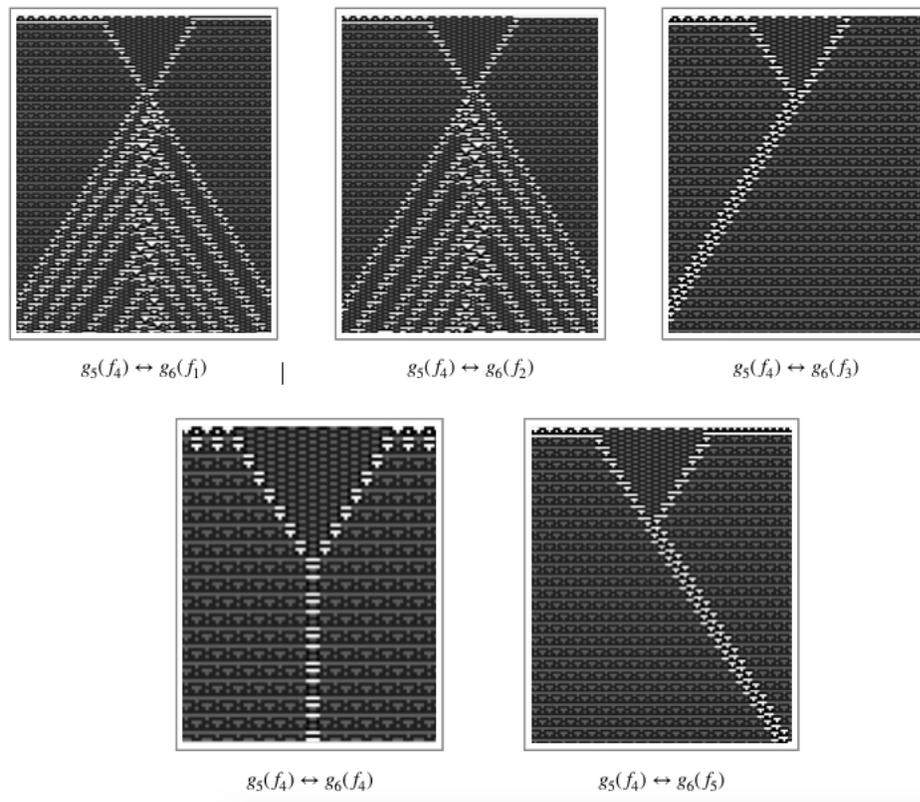


Figura B.34: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_5$  en la fase 4 y las 5 fases que posee el glider  $g_6$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_2(f_4) \leftrightarrow g_5(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_1) \leftrightarrow fp_2(f_1) = gun_3$
2.  $fp_2(f_4) \leftrightarrow g_5(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_2) \leftrightarrow fp_2(f_2) = gun_4$
3.  $fp_2(f_4) \leftrightarrow g_5(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_3) \leftrightarrow fp_2(f_3) = g_4g_6$
4.  $fp_2(f_4) \leftrightarrow g_5(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_4) \leftrightarrow fp_2(f_4) = s_2$
5.  $fp_2(f_4) \leftrightarrow g_5(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_5) \leftrightarrow fp_2(f_5) = g_5g_3$

**g5 en la fase 5**

En la figura B.35 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_5$  usando la fase 5, y rotar la fase del glider  $g_6$  en las 5 fases que posee.

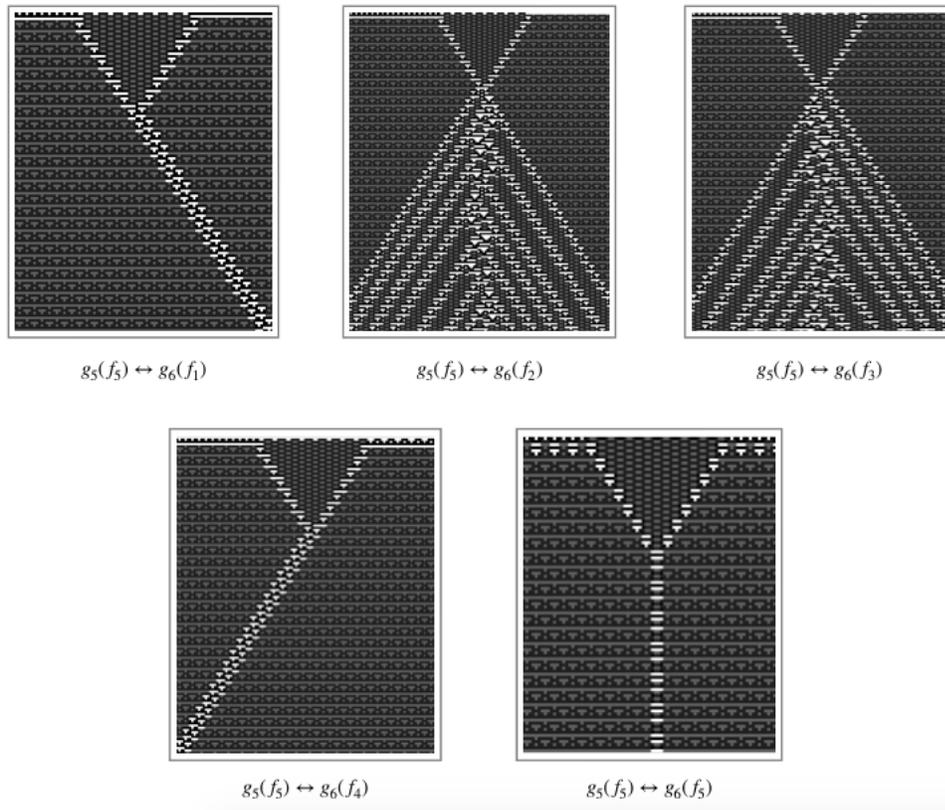


Figura B.35: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_5$  en la fase 5 y las 5 fases que posee el glider  $g_6$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_2(f_5) \leftrightarrow g_5(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_1) \leftrightarrow fp_2(f_1) = g_5g_3$
2.  $fp_2(f_5) \leftrightarrow g_5(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_2) \leftrightarrow fp_2(f_2) = gun_3$
3.  $fp_2(f_5) \leftrightarrow g_5(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_3) \leftrightarrow fp_2(f_3) = gun_4$
4.  $fp_2(f_5) \leftrightarrow g_5(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_4) \leftrightarrow fp_2(f_4) = g_4g_6$
5.  $fp_2(f_5) \leftrightarrow g_5(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_5) \leftrightarrow fp_2(f_5) = s_2$

### B.1.10. g5 VS s1

Para  $g_5$  contra  $s_1$ , tenemos que el glider  $g_5$  posee 5 fases y el still-life  $s_1$  posee 2, por lo que la cantidad de colisiones que podemos realizar son:

$$Colisiones = 5 * 2 = 10 \tag{B.11}$$

#### g5 en la fase 1

En la figura B.36 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_5$  usando la fase 1, y rotar la fase del still-life  $s_1$  en las 2 fases que posee.

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_2(f_1) \leftrightarrow g_5(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow s_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_4$
2.  $fp_2(f_1) \leftrightarrow g_5(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow s_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_4$

#### g5 en la fase 2

En la figura B.37 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_5$  usando la fase 2, y rotar la fase del still-life  $s_1$  en las 2 fases que posee.

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_2(f_2) \leftrightarrow g_5(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow s_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_4$
2.  $fp_2(f_2) \leftrightarrow g_5(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow s_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_4$

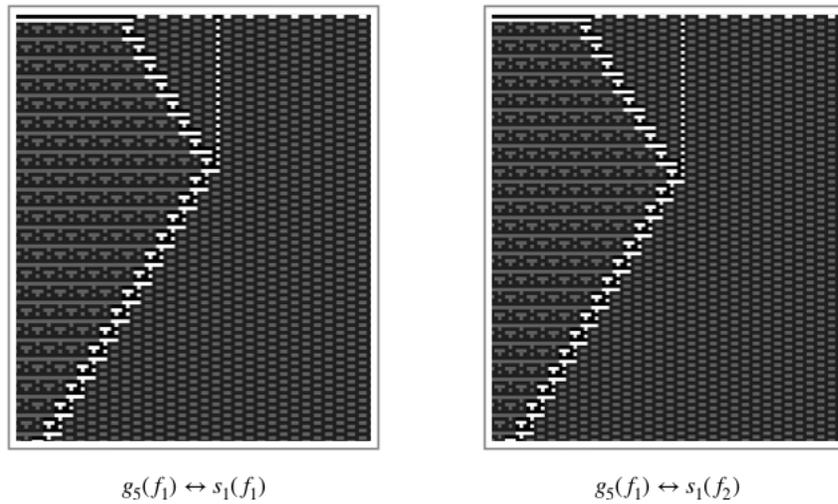


Figura B.36: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_5$  en la fase 1 y las 2 fases que posee el still-life  $s_1$

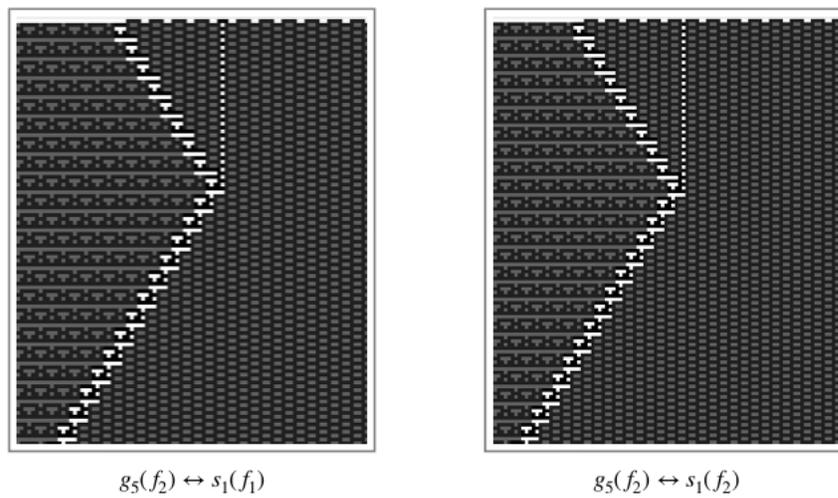


Figura B.37: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_5$  en la fase 2 y las 2 fases que posee el still-life  $s_1$

### g5 en la fase 3

En la figura B.38 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_5$  usando la fase 3, y rotar la fase del still-life  $s_1$  en las 2 fases que posee.

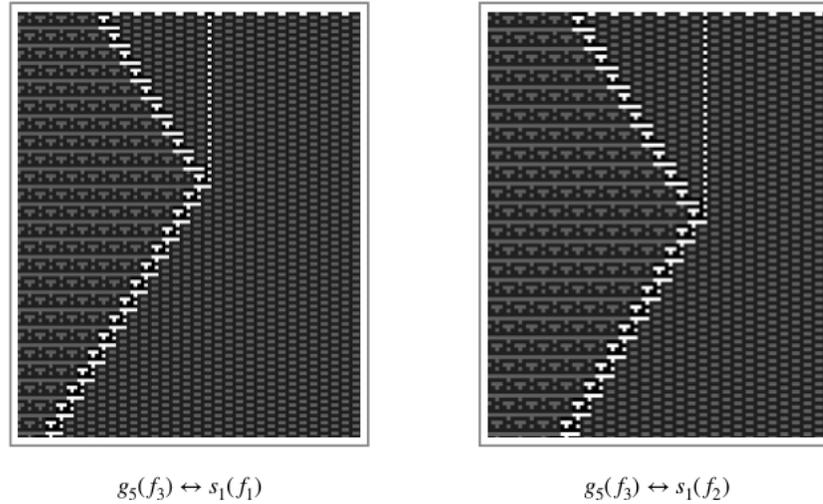


Figura B.38: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_5$  en la fase 3 y las 2 fases que posee el still-life  $s_1$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_2(f_3) \leftrightarrow g_5(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow s_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_4$
2.  $fp_2(f_3) \leftrightarrow g_5(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow s_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_4$

### g5 en la fase 4

En la figura B.39 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_5$  usando la fase 4, y rotar la fase del still-life  $s_1$  en las 2 fases que posee.

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_2(f_4) \leftrightarrow g_5(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow s_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_4$
2.  $fp_2(f_4) \leftrightarrow g_5(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow s_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_4$

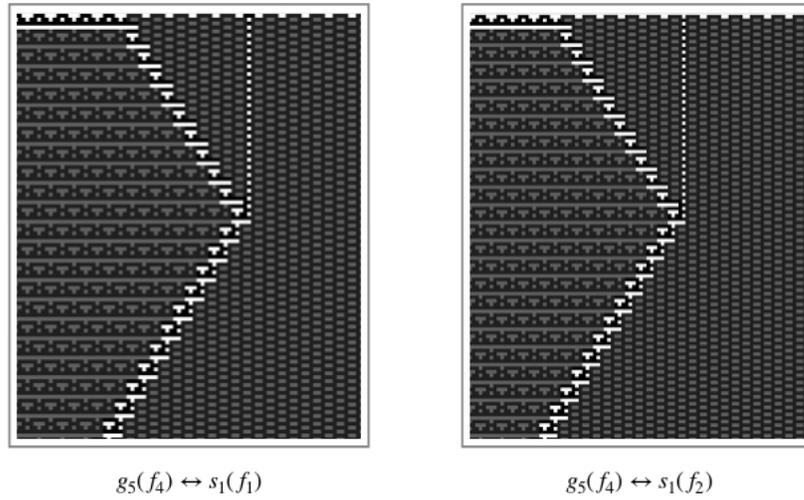


Figura B.39: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_5$  en la fase 4 y las 2 fases que posee el still-life  $s_1$

### **g5 en la fase 5**

En la figura B.40 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del glider  $g_5$  usando la fase 5, y rotar la fase del still-life  $s_1$  en las 2 fases que posee.

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_2(f_5) \leftrightarrow g_5(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow s_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_4$
2.  $fp_2(f_5) \leftrightarrow g_5(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow s_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_4$

### **B.1.11. s1 VS g2**

Para  $s_1$  contra  $g_2$ , tenemos que el still-life  $s_1$  posee 2 fases y el glider  $g_2$  posee 5, por lo que la cantidad de colisiones que podemos realizar son:

$$Colisiones = 2 * 5 = 10 \tag{B.12}$$

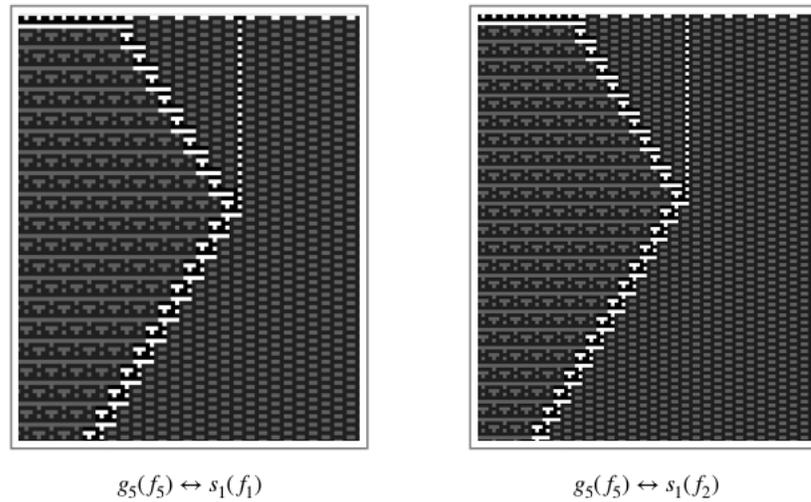


Figura B.40: Las 5 colisiones distintas entre el glider  $g_5$  en la fase 5 y las 2 fases que posee el still-life  $s_1$

### s1 en la fase 1

En la figura B.41 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del still-life  $s_1$  usando la fase 1, y rotar la fase del glider  $g_2$  en las 5 fases que posee.

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow s_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = s_1$
2.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow s_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = s_1$
3.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow s_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_2) = s_1$
4.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow s_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_1) = s_1$
5.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow s_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_2(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_2) = s_1$

### s1 en la fase 2

En la figura B.42 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del still-life  $s_1$  usando la fase 2, y rotar la fase del glider  $g_2$  en las 5 fases que posee.

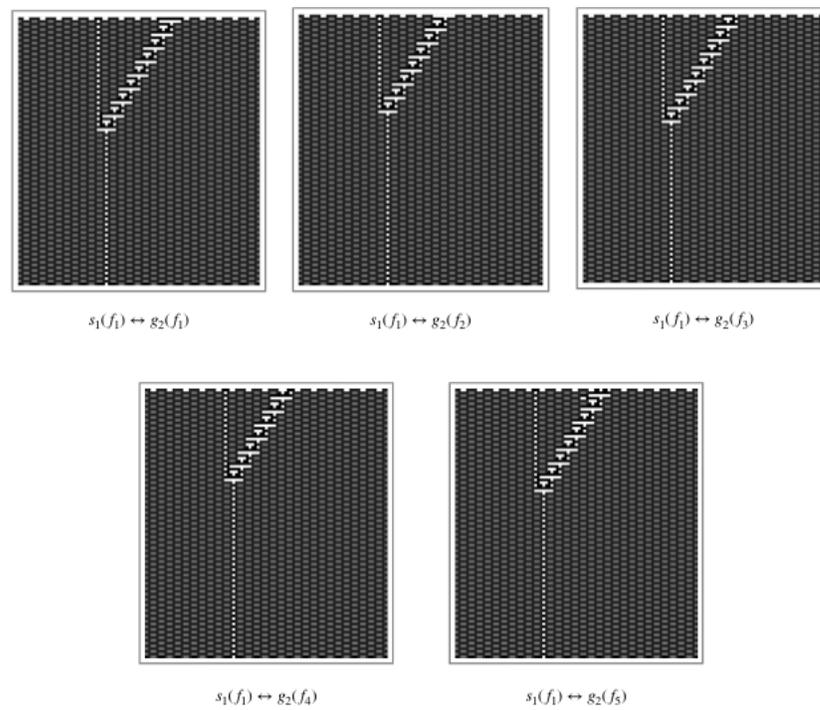


Figura B.41: Las 5 colisiones distintas entre el still-life  $s_1$  en la fase 1 y las 5 fases que posee el glider  $g_2$

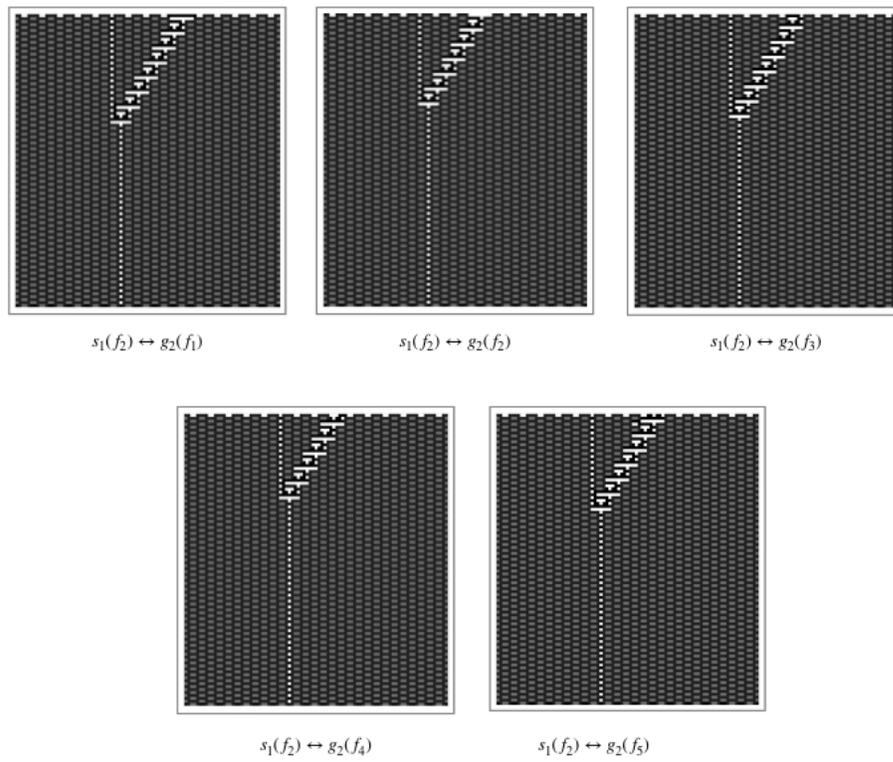


Figura B.42: Las 5 colisiones distintas entre el still-life  $s_1$  en la fase 2 y las 5 fases que posee el glider  $g_2$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow s_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = s_1$
2.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow s_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = s_1$
3.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow s_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_2) = s_1$
4.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow s_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_1) = s_1$
5.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow s_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_2(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_2) = s_1$

### B.1.12. s1 VS g6

Para  $s_1$  contra  $g_6$ , tenemos que el still-life  $s_1$  posee 2 fases y el glider  $g_6$  posee 5, por lo que la cantidad de colisiones que podemos realizar son:

$$Colisiones = 2 * 5 = 10 \quad (B.13)$$

#### s1 en la fase 1

En la figura B.43 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del still-life  $s_1$  usando la fase 1, y rotar la fase del glider  $g_6$  en las 5 fases que posee.

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow s_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_1) \leftrightarrow fp_2(f_1) = g_3$
2.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow s_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_2) \leftrightarrow fp_2(f_2) = g_3$
3.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow s_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_3) \leftrightarrow fp_2(f_3) = g_3$
4.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow s_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_4) \leftrightarrow fp_2(f_4) = g_3$
5.  $fp_1(f_2) \leftrightarrow s_1(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_2) \leftrightarrow g_6(f_5) \leftrightarrow fp_2(f_5) = g_3$

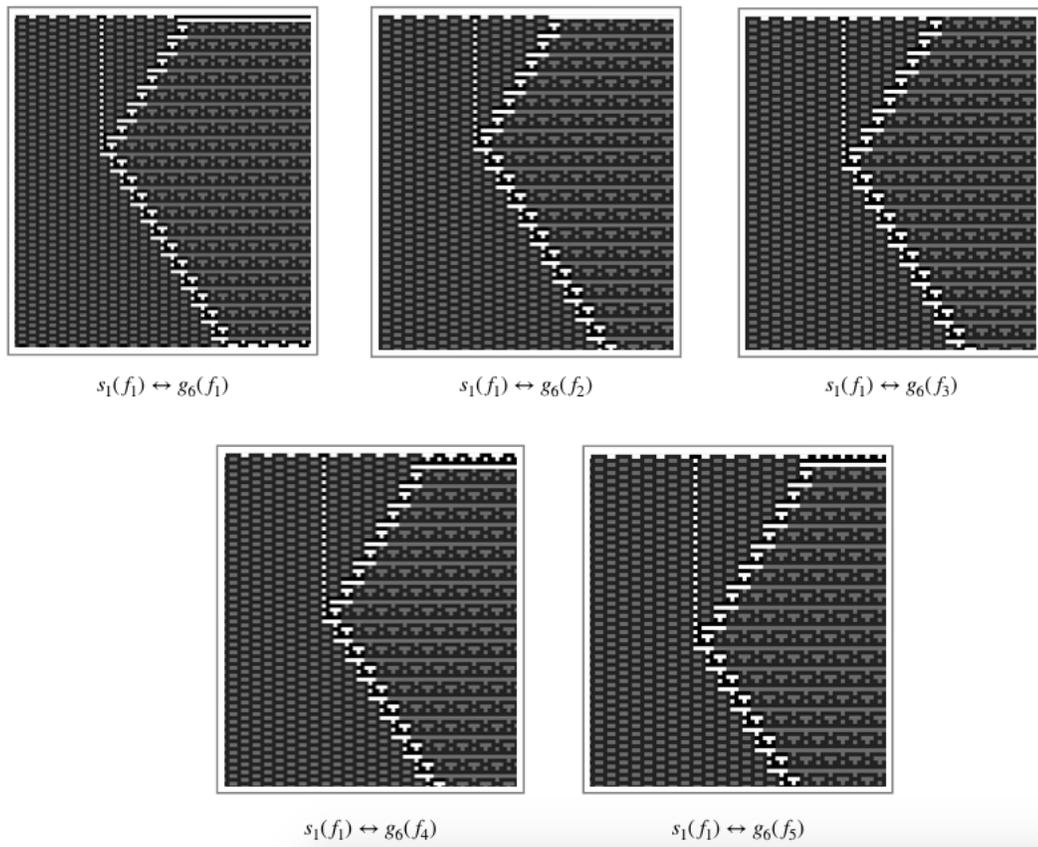


Figura B.43: Las 5 colisiones distintas entre el still-life  $s_1$  en la fase 1 y las 5 fases que posee el glider  $g_6$

**s1 en la fase 2**

En la figura B.44 podemos observar las 5 colisiones posibles al mantener fija la fase del still-life  $s_1$  usando la fase 2, y rotar la fase del glider  $g_6$  en las 5 fases que posee.

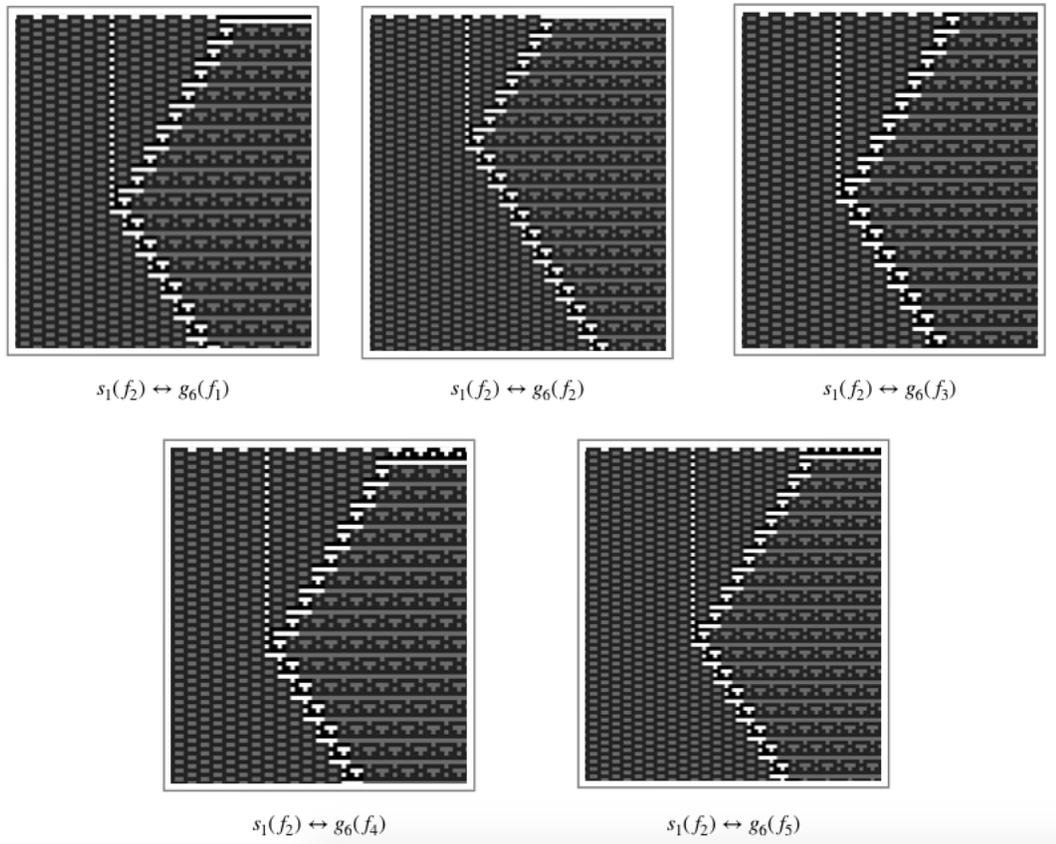


Figura B.44: Las 5 colisiones distintas entre el still-life  $s_1$  en la fase 2 y las 5 fases que posee el glider  $g_6$

Entonces las ecuaciones que tenemos como resultado son:

1.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow s_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_1) \leftrightarrow fp_2(f_1) = g_3$
2.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow s_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_2) \leftrightarrow fp_2(f_2) = g_3$
3.  $fp_1(f_1) \leftrightarrow s_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_3) \leftrightarrow fp_2(f_3) = g_3$

$$4. fp_1(f_1) \leftrightarrow s_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_4) \leftrightarrow fp_2(f_4) = g_3$$

$$5. fp_1(f_1) \leftrightarrow s_1(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_1) \leftrightarrow g_6(f_5) \leftrightarrow fp_2(f_5) = g_3$$

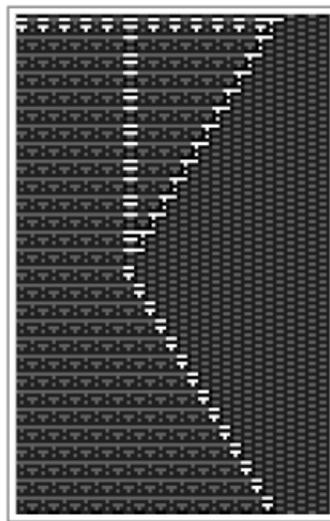
### B.1.13. s2 VS g4

Para  $s_2$  contra  $g_4$ , tenemos que el still-life  $s_2$  posee 10 fases y el glider  $g_4$  posee 5, pero requerimos aplicar la restricción número 1 citada en B.1.2 para el glider  $g_4$ , por lo que solo podemos colisionarlo en un punto, obteniendo como totales:

$$Colisiones = 10 * 1 = 10 \tag{B.14}$$

#### s2 en la fase 1

En la figura B.45 podemos observar la colisión posible al mantener fija la fase del still-life  $s_2$  usando la fase 1, y el glider  $g_4$  en la fase 1.



$s_2(f_1) \leftrightarrow g_4(p_1)$

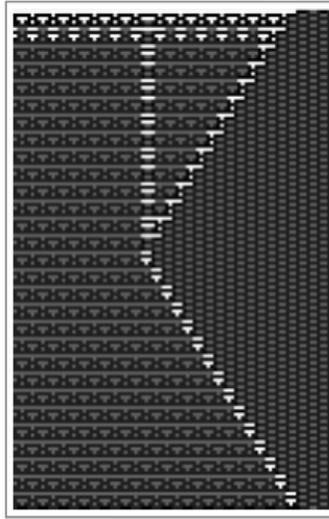
Figura B.45: La colisión entre el still-life  $s_2$  en la fase 1 y el glider  $g_4$  en la fase 1

Entonces la ecuación que tenemos como resultado es:

$$1. fp_2(f_1) \leftrightarrow s_2(f_1) \leftrightarrow fp_2(f_1) \leftrightarrow g_4(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_5$$

**s2 en la fase 2**

En la figura B.46 podemos observar la colisión posible al mantener fija la fase del still-life  $s_2$  usando la fase 2, y el glider  $g_4$  en la fase 2.



$s_2(f_2) \leftrightarrow g_4(p_2)$

Figura B.46: La colisión entre el still-life  $s_2$  en la fase 2 y el glider  $g_4$  en la fase 2

Entonces la ecuación que tenemos como resultado es:

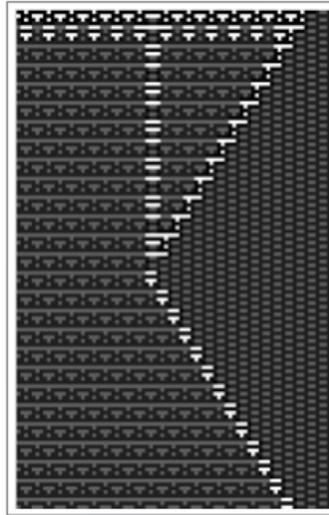
$$1. fp_2(f_2) \leftrightarrow s_2(f_2) \leftrightarrow fp_2(f_2) \leftrightarrow g_4(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_5$$

**s2 en la fase 3**

En la figura B.47 podemos observar la colisión posible al mantener fija la fase del still-life  $s_2$  usando la fase 3, y el glider  $g_4$  en la fase 3.

Entonces la ecuación que tenemos como resultado es:

$$1. fp_2(f_3) \leftrightarrow s_2(f_3) \leftrightarrow fp_2(f_3) \leftrightarrow g_4(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_5$$



$$s_2(f_3) \leftrightarrow g_4(p_3)$$

Figura B.47: La colisión entre el still-life  $s_2$  en la fase 3 y el glider  $g_4$  en la fase 3

#### **s2 en la fase 4**

En la figura B.48 podemos observar la colisión posible al mantener fija la fase del still-life  $s_2$  usando la fase 4, y el glider  $g_4$  en la fase 4.

Entonces la ecuación que tenemos como resultado es:

1.  $fp_2(f_4) \leftrightarrow s_2(f_4) \leftrightarrow fp_2(f_4) \leftrightarrow g_4(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_5$

#### **s2 en la fase 5**

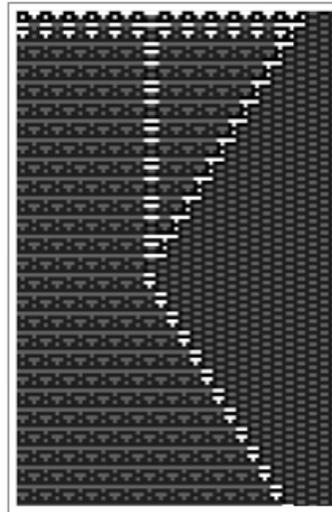
En la figura B.49 podemos observar la colisión posible al mantener fija la fase del still-life  $s_2$  usando la fase 5, y el glider  $g_4$  en la fase 5.

Entonces la ecuación que tenemos como resultado es:

1.  $fp_2(f_5) \leftrightarrow s_2(f_5) \leftrightarrow fp_2(f_5) \leftrightarrow g_4(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_5$

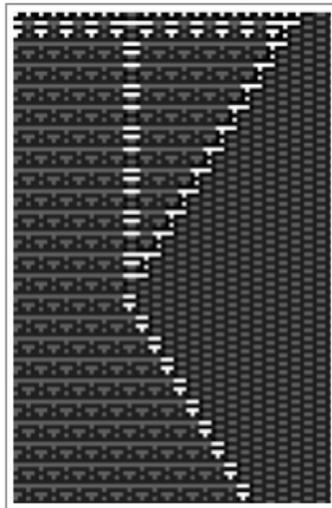
#### **s2 en la fase 6**

En la figura B.50 podemos observar la colisión posible al mantener fija la fase del still-life  $s_2$  usando la fase 6, y el glider  $g_4$  en la fase 1.



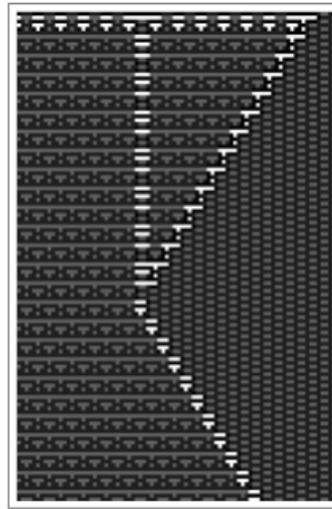
$s_2(f_4) \leftrightarrow g_4(p_4)$

Figura B.48: La colisión entre el still-life  $s_2$  en la fase 4 y el glider  $g_4$  en la fase 4



$s_2(f_5) \leftrightarrow g_4(p_5)$

Figura B.49: La colisión entre el still-life  $s_2$  en la fase 5 y el glider  $g_4$  en la fase 5



$s_2(f_6) \leftrightarrow g_4(p_1)$

Figura B.50: La colisión entre el still-life  $s_2$  en la fase 6 y el glider  $g_4$  en la fase 1

Entonces la ecuación que tenemos como resultado es:

1.  $fp_2(f_1) \leftrightarrow s_2(f_6) \leftrightarrow fp_2(f_1) \leftrightarrow g_4(f_1) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_5$

### **s2 en la fase 7**

En la figura B.51 podemos observar la colisión posible al mantener fija la fase del still-life  $s_2$  usando la fase 7, y el glider  $g_4$  en la fase 2.

Entonces la ecuación que tenemos como resultado es:

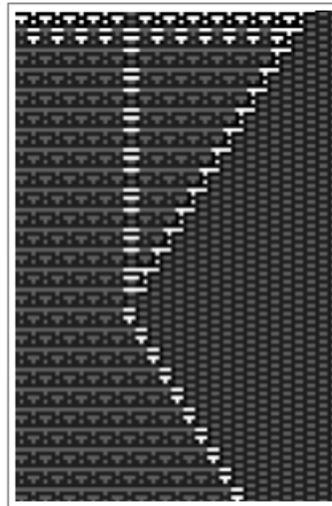
1.  $fp_2(f_2) \leftrightarrow s_2(f_7) \leftrightarrow fp_2(f_2) \leftrightarrow g_4(f_2) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_5$

### **s2 en la fase 8**

En la figura B.52 podemos observar la colisión posible al mantener fija la fase del still-life  $s_2$  usando la fase 8, y el glider  $g_4$  en la fase 3.

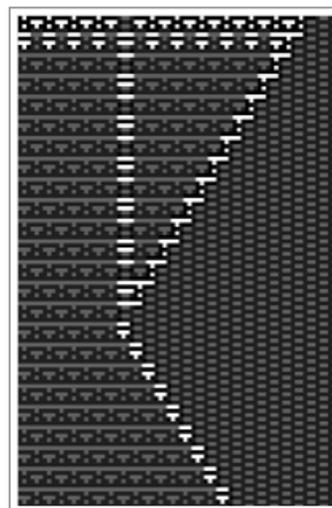
Entonces la ecuación que tenemos como resultado es:

1.  $fp_2(f_3) \leftrightarrow s_2(f_8) \leftrightarrow fp_2(f_3) \leftrightarrow g_4(f_3) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_5$



$s_2(f_7) \leftrightarrow g_4(p_2)$

Figura B.51: La colisión entre el still-life  $s_2$  en la fase 7 y el glider  $g_4$  en la fase 2

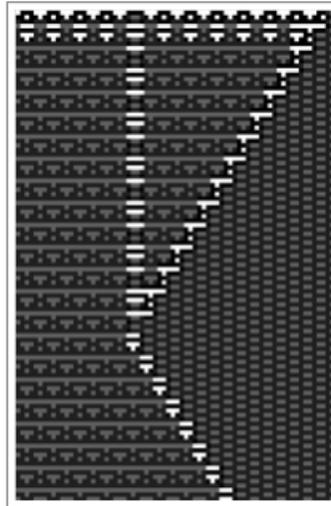


$s_2(f_8) \leftrightarrow g_4(p_3)$

Figura B.52: La colisión entre el still-life  $s_2$  en la fase 8 y el glider  $g_4$  en la fase 3

**s2 en la fase 9**

En la figura B.53 podemos observar la colisión posible al mantener fija la fase del still-life  $s_2$  usando la fase 9, y el glider  $g_4$  en la fase 4.



$s_2(f_9) \leftrightarrow g_4(p_4)$

Figura B.53: La colisión entre el still-life  $s_2$  en la fase 9 y el glider  $g_4$  en la fase 4

Entonces la ecuación que tenemos como resultado es:

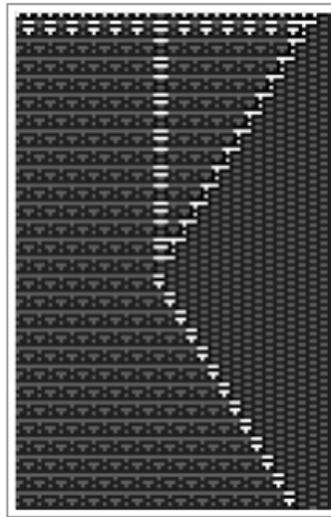
1.  $fp_2(f_4) \leftrightarrow s_2(f_9) \leftrightarrow fp_2(f_4) \leftrightarrow g_4(f_4) \leftrightarrow fp_1(f_1) = g_5$

**s2 en la fase 10**

En la figura B.54 podemos observar la colisión posible al mantener fija la fase del still-life  $s_2$  usando la fase 10, y el glider  $g_4$  en la fase 5.

Entonces la ecuación que tenemos como resultado es:

1.  $fp_2(f_5) \leftrightarrow s_2(f_{10}) \leftrightarrow fp_2(f_5) \leftrightarrow g_4(f_5) \leftrightarrow fp_1(f_2) = g_5$



$s_2(f_{10}) \leftrightarrow g_4(p_5)$

Figura B.54: La colisión entre el still-life  $s_2$  en la fase 10 y el glider  $g_4$  en la fase 5