Un primer acercamiento al Análisis Complejo con REC/C

Juan Carlos Vinagre Méndez
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
División Académica de Ciencias Básicas
Licenciatura en Ciencias Computacionales

24 de agosto de 2008

Resumen

El principal objetivo de este documento es mostrar el lenguaje de programación REC/C, principalmente presentar a detalle su forma de trabajar y las capacidades con las que cuenta para la aritmética compleja, para reafirmar un poco el entendimiento de los programas que aquí se presentan, se da una breve introducción a los números complejos y se tratan algunos temas importantes sobre análisis complejo.

Índice

1. Números Complejos

Los números complejos son una gran familia de números formada por conjuntos mas definidos y esenciales, en esta sección se verá su definición, propiedades y representación, además de una introducción a la aritmética compleja.

1.1. La gran familia de Números

Desde muy temprana edad la mayoría de las personas comenzamos a familiarizarnos con los números casi de manera desapercibida y natural, así nos encontramos que dado un conjunto de objetos cualquiera podemos asignar a cada elemento un símbolo, de manera que cada uno de ellos quede unívocamente identificado, de esta manera, asignamos a la ausencia de elementos en el conjunto un símbolo 0, a un elemento de ellos el símbolo 1, a otro el símbolo 2, y así sucesivamente, con mucha razón estos primeros números que aparecen en nuestro repertorio los llamamos **números naturales**, aprendemos también operaciones fundamentales con ellos, como la adición o la multiplicación y nos damos cuenta que es fácil operarlas, además, cualquier computación con estas operaciones siempre dara otro número natural, el problema comienza cuando damos pie a la sustracción, esta operación suele ser un poco arriesgada usarla en este momento, podemos sustraer 4 de otro número como 8, pero que pasa cuando queremos sustraer 8 de 4, nos encontramos que este número ya no se encuentra en nuestra lista de números conocidos, y por lo tanto, que existe una operación en los números naturales para la cual el resultado no se encuentra en este conjunto, es ahi donde nos vemos obligados a ampliar nuestra lista y agregar otro conjunto de números llamados **números negativos**.

La unión del conjunto de los números naturales con los números negativos, se conoce como el conjunto de los **números enteros**, cuando aplicamos las operaciones de adición, sustracción o multiplicación sobre este conjunto, el resultado seguirá siendo siempre un número entero; pero que pasa cuando realizamos el cociente de dos de estos números, como por ejemplo $\frac{3}{4}$, el resultado ya no pertenece a este conjunto, entonces dado un $m = \frac{x}{y}$, el conjunto de todos los posibles valores que pueda tomar m tal que x y y sean dos números enteros cualesquiera se les llama **números racionales**.

Con esto nuevamente volvemos a ampliar nuestra lista agregando el conjunto de los números racionales, que además, contiene al conjunto de los enteros positivos, en general todos los números racionales se pueden expresar como producto de dos cocientes enteros, incluso aquellos los cuales tienen una parte decimal periódica; otro problema que surge en nuestro encuentro con los números, es cuando queremos expresar el cociente de la circunferencia por su diámetro, este número es conocido como π y es un número irracional, lo mismo sucede en el conocido teorema de pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$, cuando b y c asumen valores unitarios, el número a es otro número irracional, entonces, todo número que no se puede representar como producto de cocientes enteros se le conoce como **número irracional**, además su parte decimal es infinita y no repetitiva.

Sin darnos cuenta hemos conocido los **números reales**, estos se forman a partir de la unión del conjunto de los números racionales con los irracionales; pero no terminamos aún, nos damos cuenta de inmediato cuando vemos ecuaciones de la forma $x^2 = a$, tal que a es un número negativo, una vez mas nos vemos obligados a ampliar nuestra lista de números conocidos, ya que no existe ningún número real x que multiplicado por el mismo de un número negativo, estos nos obliga a tener una familia de números mucho mas extensa conocida como el conjunto de los **números complejos**.

1.2. Definición

El conjunto de los números complejos no solo da una solución a las ecuaciones del tipo $x^2 = -1$, si no tambien a ecuaciones mas complicadas como:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$$

Este ultimo caso es conocido como el *Teorema fundamental del algebra* y enuncia que todo polinomio no constante de grado n tiene n raices en el conjunto de los números complejos.

Un número complejo como ya vimos, es una extensión de los números reales, esta formado por un par ordenado de números de la forma $a = \alpha + i\beta$, donde α y β son *números reales*, a α se le conoce como la *parte real* representada por $\Re(a)$ y a β como la *parte imaginaria* representada por $\Im(a)$, cuando $\beta = 0$ entonces a es un *real puro*, cuando $\alpha = 0$, a es un *imaginario puro*. En general los números complejos forman el conjunto:

$$\mathbb{C} = \{(\alpha, \beta) \quad | \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Hay dos formas de escribir un número complejo, la primera es llamada *Notación de Euler*, es la mas conocida y utilizada, se representa como $a = \alpha + i\beta$, no hay que confundir el signo de '+' con el símbolo de la adición tradicional, ni '$i\beta$' con la multiplación, solo es una manera de denotar la parte real de la parte imaginaria, mas adelante veremos que i juega un papel importante en esta notación, así el número $a = 3 + i5$, es el número complejo con parte real igual a 3 y parte imaginaria igual a 5 (es 5 no $i5$), cuando tenemos un número real como 4, este se puede representar como $4 + i0$, el número $0 + i$ se escribe solo como i. La otra notación es la *Notación de Hamilton* y se escribe como $a = (\alpha, \beta)$, esta notación tiene la característica de representar el número complejo simplemente como un par ordenado de números reales.

Dos números complejos *son iguales* si y solo si tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria, dado $a = \alpha + i\beta \wedge b = \gamma + i\delta$, entonces:

$$a = b \iff \alpha = \gamma \quad \wedge \quad \beta = \delta$$

Cabe destacar que no se puede establecer un punto de comparación entre dos números complejos, es decir, no podemos saber cuando un número complejo es mayor o menor que otro, si se da que $a < b$, entonces a y b siempre son números reales, tampoco se puede decir cuando un número complejo es positivo o negativo.

1.3. Representación y propiedades

Todos los números reales se representan en una sola dimensión y todos caen sobre una recta infinitamente larga, llamada *recta real*, cualquier número entero, racional o irracional se encuentra ubicado en un solo punto sobre esta recta, los puntos -3, $-1\dot{4}3$, π, $\sqrt{2}$, 2, se muestran en la figura 1.

Los números complejos, tienen una parte real y una parte imaginaria, que en realidad es un par de números reales, si para representar un solo número real utilizamos una línea recta, entonces para representar un par de números reales se necesitarán dos rectas creando con ello una dimensión más,

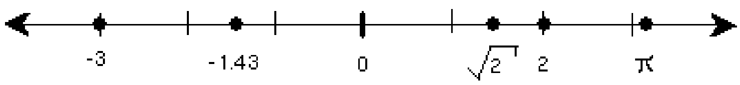

Figura 1: Recta Real

una línea recta estará ubicada horizontalmente la cual contendrá todos los reales puros $(\alpha + i0)$, y una vertical contendrá todos los imaginarios puros $(0+i\beta)$, estas líneas son llamadas *eje real* y *eje imaginario* respectivamente, el punto de encuentro entre las dos líneas es el número complejo $0 + i0$, y en general cualquier punto de encuentro en el plano será un número complejo.

El cruce de dos dimensiones genera un plano, cuando este plano se usa para representar números complejos se le llama *plano de Argand* o simplemente *plano complejo*, cualquier número complejo que se nos ocurra sera un punto en ese plano, así los números complejos $3+i0$, $0+i$, $-3+i2$, $-2+i0$, $1-i2$, $2+i2$ están sobre el, y se muestran en la figura 2.

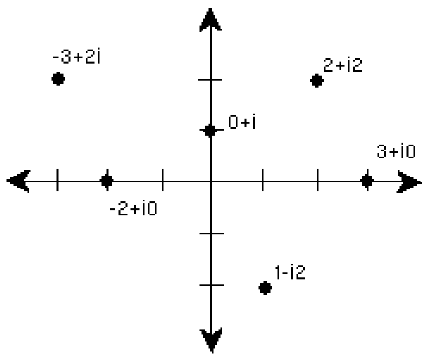

Figura 2: Plano Complejo

A todo número complejo lo podemos ver en el plano como un vector, el cual tiene componente vertical α y componente vertical β, se muestra el punto $3 + i2$ en su forma de vector en la figura 3

1.3.1. Operaciones aritméticas

El número complejo i se ideó con tal de dar solución a ecuaciones como $x^2 = -1$, tal solución es $x = i$, este artificio algebraico toma importancia en

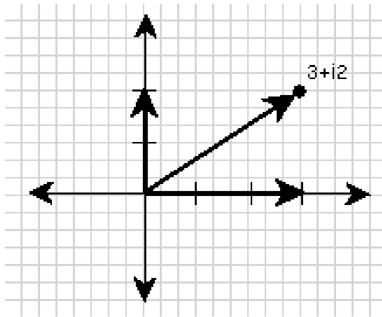

Figura 3: Representación de un número complejo como vector

las operaciones fundamentales entre números complejos, estas se muestran a continuacion.

$$\begin{aligned}
(\alpha + i\beta) + (\gamma + i\delta) &= (\alpha + \gamma) + (i\beta + i\delta) = (\alpha + \gamma) + i(\beta + \delta) \\
(\alpha + i\beta) - (\gamma + i\delta) &= (\alpha - \gamma) + (i\beta - i\delta) = (\alpha - \gamma) + i(\beta - \delta) \\
(\alpha + i\beta)(\gamma + i\delta) &= (\alpha\gamma + i^2\beta\delta) + (i\alpha\delta + i\beta\gamma) \qquad (1) \\
&= (\alpha\gamma - \beta\delta) + i(\alpha\delta + \beta\gamma)
\end{aligned}$$

En (1) se hizo uso del hecho de que $i^2 = (0 + i)(0 + i) = -1$. Sobre las notaciones de números complejos, podemos pasar de la notación de Hamilton a la notación de Euler aplicando ciertas operaciones, así el vector (α, β) representado en notación de Hamilton, se transforma a una notación de Euler de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
(\alpha, \beta) &= (\alpha, 0) + (0, \beta) \\
&= (\alpha, 0) + (0, i)(\beta, 0) \\
&= \alpha + i\beta
\end{aligned}$$

Lo anterior se fundamenta en que la operación $(\alpha, o)(\gamma, \delta) = (\alpha\gamma, \alpha\delta)$, alarga o encoge el segundo vector de acuerdo con el factor α, de hecho puede llegar a ser 0 si $\alpha = 0$, o reflejarse con respecto al origen si α es negativo, la figura 4 lo ilustra.

De la misma manera en la operación $(0, i)(\alpha, \beta) = (-\beta, \alpha)$, lo que hace i es rotar el segundo vector 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj, la figura 5 lo ilustra.

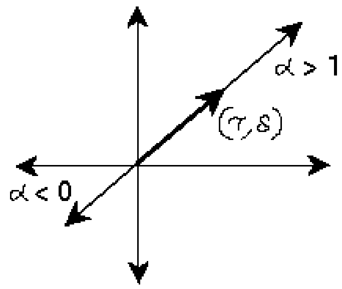

Figura 4: Representacion vectorial de la multiplicación de un número complejo por un factor α

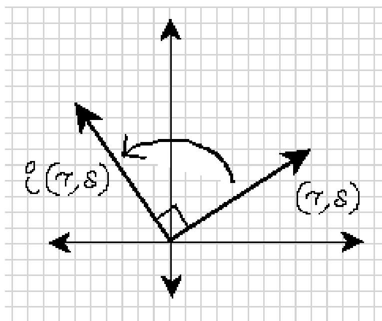

Figura 5: Multiplicación de un número complejo por i vista como vector

Las operaciones aritméticas con números complejos toman sentido cuando se presentan en el plano en forma de vectores, la adición de dos números complejos se puede ver como dos sumas de vectores, aplicando la *Ley del paralelogramo* tenemos que la componente horizontal del nuevo vector es igual a la suma de las componentes horizontales de los vectores que intervienen, lo mismo sucede con la componente vertical, la operación $(-2,3)+(2,2) = (0,5)$ se ilustra en la figura 6.

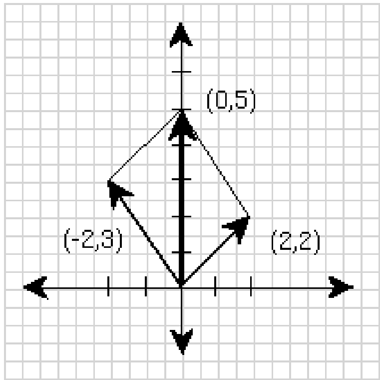

Figura 6: Suma compleja vista como vectores

Usando la igualdad $(\alpha, \beta) = (\alpha, 0) + i(\beta, 0)$, podemos expresar la multiplicación como:

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta)(\gamma,\delta) &= [(\alpha,0)+i(\beta,0)] \quad (\gamma,\delta) \\ &= (\alpha,0)(\gamma,\delta)+i(\beta,0)(\gamma,\delta) \\ &= (\alpha\gamma,\alpha\delta)+(0,i)(\beta\gamma,\beta\delta)\end{aligned}$$

Es decir que la multiplicación en realidad es una suma de el número complejo (γ, δ) multiplicado por un factor α, mas el mismo número complejo pero ahora multiplicado por un factor β y girado 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj, la operación $(-2,3)(2,2) = (-10,2)$ se ilustra en la figura 7.

Un número complejo tambien cumple con las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva bajo las operaciones de adición y multiplicación.
Dado $a = \alpha + i\beta$, $b = \gamma + i\delta$ y $c = \zeta + i\eta$ números complejos, entonces se cumple que:

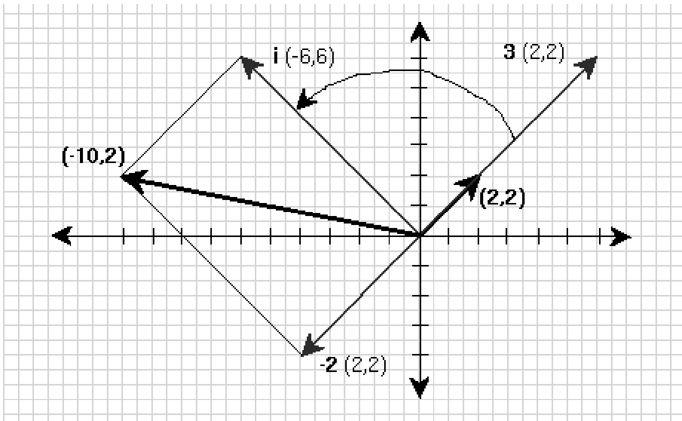

Figura 7: Multiplicación compleja vista como vectores

1. Propiedad Conmutativa
$$a + b = b + a$$
$$ab = ba$$

2. Propiedad Asociativa
$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a(bc) = (ab)c$$

3. Propiedad Distributiva
$$a(b + c) = ab + ac$$

1.3.2. Valor absoluto, argumento y conjugado

La figura 8 es muy importante para comprender los conceptos de valor absoluto, argumento y conjugado, una vez localizado un punto $a = \alpha + i\beta$ en el plano complejo, seguramente la distancia del origen (es decir, del punto puramente imaginario y real $0 + i0$) al punto a es siempre mayor o igual a cero, esta longitud, es conocida como *valor absoluto*, *modulo* o *magnitud* y se denota como $|a|$, y es equivalente a la distancia pitágorica donde α y β, representan los catetos del triángulo. Así $|a|$ queda definida como:

$$|a| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

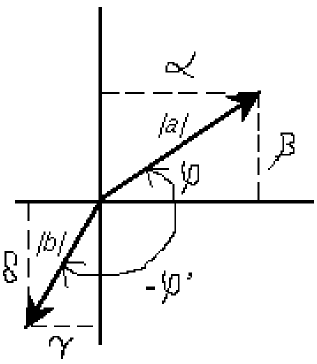

Figura 8: Valor absoluto y Argumento

El ángulo que forma el vector que representa a un número complejo $a = \alpha + i\beta$, con el eje real es llamado *argumento* de a y se representa por $arg(a)$, dado un ángulo φ este sigue siendo válido incluso si le sumamos o restamos 360° o 2π una, dos o hasta n veces, así todos los valores de φ quedan definidos en la siguiente ecuación.

$$\varphi = \varphi_0 + k2\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Un ángulo es positivo si se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj y negativo si se mueve de manera contraria. Se llama *argumento principal* si φ cumple con la restricción $-\pi < \varphi \leq \pi$.

El *conjugado* de un número complejo $a = \alpha + i\beta$ es otro número complejo $\bar{a} = \gamma + i\delta$ tal que $\alpha = \gamma$ y $\beta = -\delta$, el conjugado se representa como $\bar{a}$, por ejemplo, si tengo que $a = 5 + i3$, entonces $\bar{a} = 5 - i3$, es decir, la misma parte real y la misma parte imaginaria pero cambiada de signo. En el plano se puede ver que el conjugado de un número complejo es la proyección de el mismo sobre el eje real, la figura 9 ilustra esta situación.

Dado $a = \alpha + i\beta$, hay propiedades muy importantes entre un número y su conjugado que hay que hacer notar:

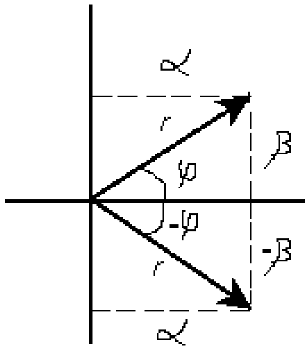

Figura 9: Conjugado de un número complejo

$$
\begin{aligned}
a + \bar{a} &= 2\Re(a) \\
a - \bar{a} &= 2i\Im(a) \\
a\bar{a} &= \alpha^2 + \beta^2
\end{aligned}
$$

Segun lo anterior, la adición de un número y su conjugado es dos veces su parte real, la diferencia dos veces su parte imaginaria por i, y la multiplicación es la suma de la parte real al cuadrado y la parte imaginaria al cuadrado. Otra observación es que un número es real si y solo si es igual a su conjugado.

1.3.3. Representación con coordenadas rectangulares y polares

Hay dos formas de ver la representación de un número complejo en el plano de Argand, la primera es con *coordenadas rectangulares*, y simplemente se representa por la pareja de números (α, β) como en el plano cartesiano, α es la distancia recorrida en el eje real y β es la distancia recorrida en el eje complejo, ambas con respecto al origen, se escriben de la forma $a = \alpha + i\beta$.

Observando de nuevo la figura 8 y tomando en cuenta que $Sen(\varphi) = \frac{\beta}{|a|}$ y $Cos(\varphi) = \frac{\alpha}{|a|}$ se pueden obtener las *coordenadas polares*, a partir de las siguientes igualdades:

$$\alpha = |a|Cos(\varphi)$$
$$\beta = |a|Sen(\varphi)$$

Si $a = \alpha + i\beta$, sustituyendo...

$$\begin{aligned} a &= |a|Cos(\varphi) + i|a|Sen(\varphi) \\ a &= |a|(Cos\varphi + iSen\varphi) \end{aligned}$$

Esta última forma es conocida como *forma polar de un número complejo*, observa que $|a|$ en realidad es el radio del circulo que circunscribe al vector y se denota por r, en resumen, podemos expresar a como $a = (r, \varphi)$.

1.4. Proyección estereográfica

Un número complejo lo ubicamos con un punto en el plano de Argand, pero que pasa si queremos localizar el ∞, ningun número complejo que se nos ocurra tal que su valor absoluto crezca sin límite hacia las fronteras cumplirá con este objetivo. Ahora si seguimos las ideas de Riemman, podemos pensar en un nuevo eje ξ, creando una tercera dimensión y ubicar una esfera de diametro uno, sobre la superficie del plano ya existente, tal que el polo sur sea tangente al punto $(0, 0, 0)$ sobre el plano, el centro se ubicara en las coordenadas $(0, 0, \frac{1}{2})$ y el polo norte en $(0, 0, 1)$, tal esfera es llamada *esfera de Riemman*, ahora cualquier punto sobre la superficie será de la forma (α, β, ξ).

Tomemos de nuevo cualquier punto en el plano complejo $(\alpha, \beta, 0)$ y trazemos una linea recta hasta el polo norte de la esfera correspondiente al punto $(0, 0, 1)$, esta linea recta atravezará la superficie de la esfera sobre uno y un solo punto (x, y, z) esto se observa en la figura 10, en general cualquier punto sobre el plano de Argand se correspondera con un unico punto sobre la esfera excepto en el punto $(0, 0, 1)$, e inversamente, esta correspondencia es llamada *proyección estereográfica*. A manera que tomemos puntos sobre el plano cada vez mas alejados del origen, estos tomaran puntos (x, y, z) sobre la esfera que se irán acercando cada vez mas a la cima, así el ∞ lo encontraremos ubicado exactamente en el polo norte de la esfera, por lo tanto, la esfera de Riemman contiene todos los puntos del plano complejo ademas del ∞, este conjunto se denota como $\hat{\mathbb{C}}$ y es llamado *plano complejo extendido* y se define como:

$$\hat{\mathbb{C}} = \{\mathbb{C} \cup \{\infty\}\}$$

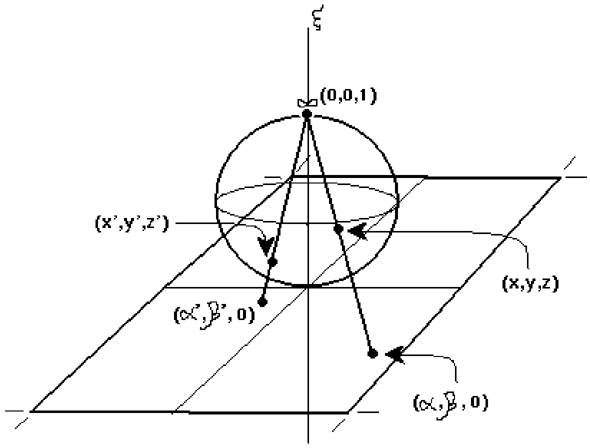

Figura 10: Esfera de Riemman

2. Análisis Complejo

El análisis complejo estudia el comportamiento de funciones de variable compleja, haciendo que la diferenciación y la integración adquieran un nuevo significado en el dominio complejo. Antes de ver que es una función de variable compleja se ven aspectos básicos de una función de una variable real, despues, se introduce a la derivada de una función compleja y se explica que son las *Funciones Analiticas.*

Antes de comenzar conviene mencionar que una función es una correspondencia entre dos conjuntos donde a cada elemento del primer conjunto (*dominio*), le corresponde uno y solo un elemento del segundo conjunto (*codominio*).

2.1. Función de una variable real y su representación

En una función de variable real, tanto el dominio como el codominio son números reales, así la función se dice que transforma o mapea un número real x en otro y, esto se representa por $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lo cual representa una función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, $f(x)$ entonces representa el valor y asociado a la entrada x, cualquier función de este tipo genera una colección de pares ordenados (x,y). La unión de puntos (x,y) en el plano es llamada gráfica de la función. Si $f(x) = x^2+1$, entonces la gráfica de la función se mira como en la figura 11

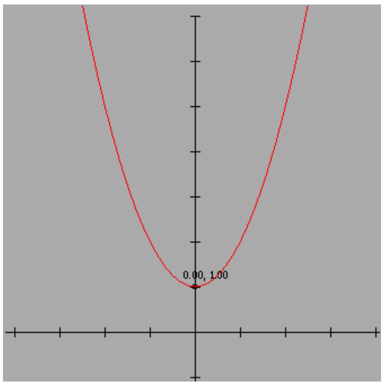

Figura 11: Grafica de una función de variable real

2.2. Funcion de una variable compleja y su representación

En una función de variable compleja, tanto el dominio (el cual toma forma de areas en el plano) como la imagen son números complejos, así la función se dice que transforma o mapea un número complejo z, en otro w. Esto se representa por $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, z es la variable independiente y w la variable dependiente. A diferencia de las funciones de variable real, la gráfica de una función de variable compleja no es tan fácil de ver, en el caso de los reales se nesecitaron dos dimensiones, ya que cada real cae en una dimensión, pero en este caso se necesitan *cuatro dimensiones*, algo que para un ser humano común y corriente es muy dificil de apreciar, esto se deve a que cada número complejo es representado en dos dimensiones, dos reales para la variable $z = (x, y)$ y dos para $w = (u, v)$.

Existen diferentes técnicas para estudiar una función de variable compleja a través de una gráfica, por ahora solo nos restringiremos, a mirar dos planos uno para la variable independiente y otro para la variable dependiente, en el primer plano se dibujan los puntos pertencientes al dominio de la función, luego en el segundo plano se dibujan los puntos correspondiente a la tranformación que produjo la función con cada punto de la variable independiente z, el cuadro 1 nos muestra algunos puntos para el caso en que $w = f(z) = z^2$, y la figura 12 nos muestra los dos planos y la correspondencia entre los puntos.

$z = x + iy$	$w = u + iv$
$-1+1$	$i2$
$-i$	-1
$1-i$	$-i2$
-1	1
0	0
1	1
$-1+i$	$-i2$
i	-1
$1+i$	$i2$

Cuadro 1: Algunos puntos de la función $f(z) = z^2$

2.3. Derivada de una función compleja

Antes de dar la definición de la derivada de una función compleja, es necesario entender dos conceptos, uno es el límite de una función y otro es el de continuidad, para aclararlos se hara una analogia con respecto a las funciones de variable real.

2.3.1. Límite

La definición de *límite* es la misma para el caso de las funciones reales, solo que ahora aplicado al plano complejo. El límite de una función $f(z)$ en el punto z_0 es f_0, si el valor absoluto de su diferencia, se puede hacer tan pequeño como queramos, a medida que z se vaya acercando mas a z_0. Es decir dado un $\epsilon > 0$ y $\delta = \delta(\epsilon)$, entonces:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f_0$$
$$|f(z) - f_0| < \epsilon \quad 0 < |z - z_0| < \delta \tag{2}$$

En particular ϵ esta relacionado estrictamente con δ, si ϵ se hace mas pequeño, entonces δ tambien lo hace, esto hara que la función este acotada

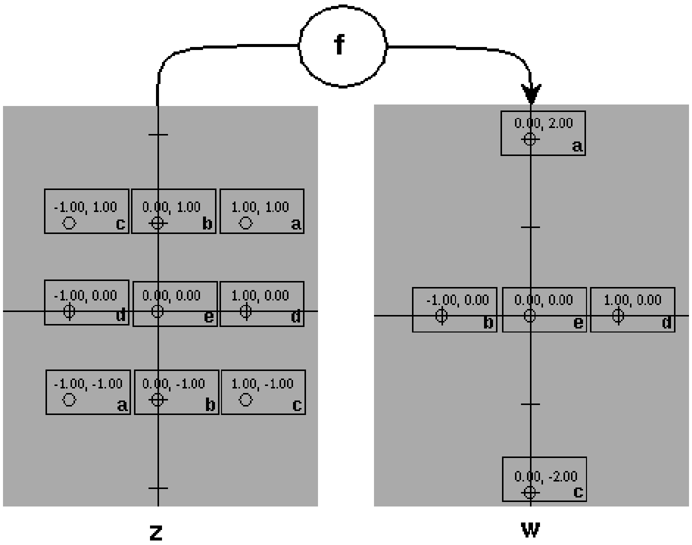

Figura 12: Correspondencia entre puntos de una función de variable compleja

en todo momento, tanto en el dominio como en el codominio, es claro ver que z es siempre mayor que z_0 y que no es necesario que la función este definida en z_0, este concepto se ilustra en la figura 13.

El dominio de cualquier función de variable real cae sobre una recta infinita, es posible entonces calcular el límite en punto x_0 de este dominio solo en dos direcciones, una si nos acercamos al punto por la izquierda y otra si nos acercamos por la derecha, esto se muestra en la figura **??**.

Sin embargo, el dominio de una función de variable compleja cae sobre un plano, originando que el límite en un punto z_0 pueda ser aproximado no solo por dos direcciones, si no por un numero infinito de curvas que se aproximan a ese punto, la figura **??** ilustra este caso.

2.3.2. Continuidad

Cuando saber que una función es continua? En una función de variable real, de manera informal se nos dice que si no levantamos el lápiz del papel para dibujar su gráfica entonces es continua. En una función de variable compleja, no es tan fácil dibujar su grafica, es mejor apeguarse a la siguiente definición de continuidad, dado $f(z)$ una función de variable compleja se

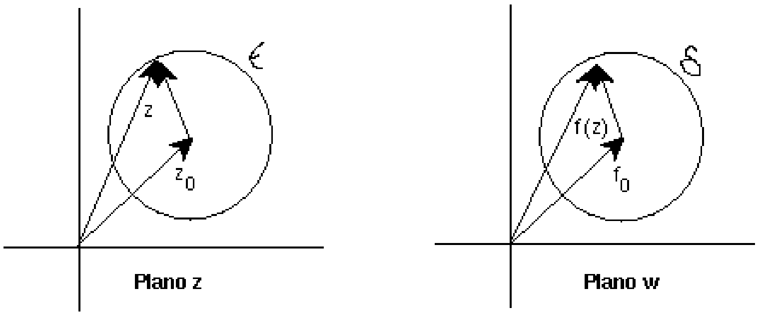

Figura 13: Limite de una función de variable compleja

Figura 14: Aproximandose al límite de una función de variable real

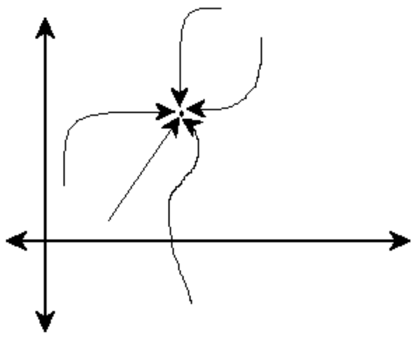

Figura 15: Aproximandose al límite de una función de variable compleja

dice que es continua en un punto z_0 de su dominio, si se cumple con tres condiciones:

1. z_0 este definido en la función, es decir que exista $f(z_0)$.
2. Existe y es finito, el
$$\lim_{z \to z_0} f(z)$$
3. Este límite cumple con
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Cabe aclarar la tercera condición, y es que lo único que nos dice es que no importa por donde aproximarse al punto, los limites deben ser siempre los mismos, y son iguales a $f(z_0)$, la misma definición se aplica a una función de variable real, antes de analizar una función de variable compleja, analizemos la continuidad en $x = 0$ de una función de variable real definida como

$$f(x) = 0 \quad si \quad x < 0, \quad f(x) = 1 \quad si \quad x \geq 0$$

Pongamos atención en la figura 16, es claro ver que f(0)=1, se cumple el primer criterio, pero el $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe, ya que aplicando la ecuación 2 encontramos que por la izquierda esta es igual a $|f_0|$ y por la derecha $|1 - f_0|$, acotandolo con $\epsilon = \frac{1}{2}$, entonces nunca se cumplira que $|f_0| < \frac{1}{2} \quad \bigwedge \quad |1 - f_0| < \frac{1}{2}$, para cualquier valor de f_0, violando entonces la segunda condición.

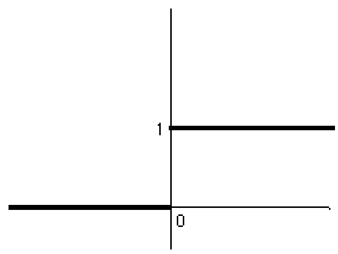

Figura 16: Estudiando la continuidad en una grafica de funciń real

Ahora veamos una función de variable real, definida como $f(z) = arg(z)$ de la misma forma que en el ejemplo anterior, esta función no cumple con la segunda condición, supongamos que comenzando con un número complejo puramente real positivo z_0, nos acercamos a otro número complejo puramente real negativo z_1, en dos distintas direcciones, una pasando por el primer cuadrante y luego por el segundo, y otra pasando por el cuarto cuadrante y luego por el tercero, como se muestra en la figura 17, a medida que nos aproximemos a cualquier punto z_1 ubicado en la recta real negativa, estas dos curvas se aproximaran a numeros distintos, lo que implica que el límite en ese punto no existe y por lo tanto la función no es continua.

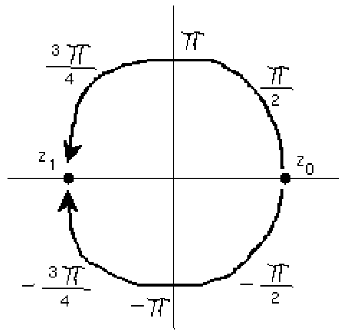

Figura 17: Límite en la función $f(z) = arg(z)$

2.3.3. La derivada compleja

La derivada de una función nos muestra el comportamiento de la función en cualquier punto donde este definida, la definicíon de derivada es la misma que en el caso de los reales, solo con algunas diferencias sutiles. Se define de la siguiente manera

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{3}$$

En una funcion de variable real, como vimos hace un momento, solo hay dos formas de aproximarnos a este límite, en una funcion compleja Δz puede hacerse cada vez mas pequeño por un numero infinito de trayectorias, para que la derivada exista, este límite deve existir, y para que este límite exista todas las trayectorias deven llevar al mismo punto, este punto es un numero complejo y es igual al valor de su derivada. Que una función sea continua no implica que tenga derivada en ese punto.

Dado que $z = x + iy$ y $w = u + iv$, entonces cualquier función compleja $w = f(z)$ ó $u+iv = f(x+iy)$ se puede reescribir en un par de funciones, dado el argumento (x, y), tengo que una función lo transforma en u, y otra función la cual lo transforma en v, correspondiente a la parte real e imaginaria de w, respectivamente. Si las funciones son $g(z)$ y $h(z)$ entonces una función compleja se puede escribir de la siguiente manera

$$f(x, y) = g(x, y) + ih(x, y) \tag{4}$$

Por ejemplo, $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$, asi la función correspondiente a la parte real es $g(x, y) = x^2 - y^2$ y la correspondiente a la parte imaginaria es $f(x, y) = 2xy$.

Ahora Δz esta dado por dos componentes a los que llamaremos Δx y Δy, como se muestra en la figura 18, entonces $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, dijimos que Δz puede hacerse tan pequeño como queramos por un numero infinito de trayectorias, en particular si $\Delta y = 0$, tenemos que $\Delta z = \Delta x$ recorre una trayectoria horizontal, entonces la ecuación 3 y 4 se pueden escribir como

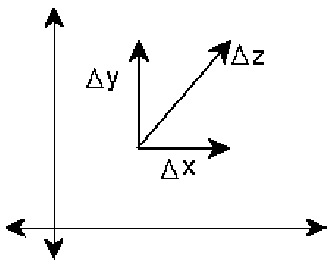

Figura 18: Δz como una suma de Δx y $i\Delta y$

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{z\to\Delta x} \frac{g(x+\Delta x,y)+ih(x+\Delta x,y)-(g(x,y)+ih(x,y))}{\Delta x} \\
&= \lim_{z\to\Delta x} \frac{g(x+\Delta x,y)+ih(x+\Delta x,y)-g(x,y)-ih(x,y)}{\Delta x} \\
&= \lim_{z\to\Delta x} \frac{g(x+\Delta x,y)-g(x,y)+i(h(x+\Delta x,y)-h(x,y))}{\Delta x} \\
&= \lim_{z\to\Delta x} \left[\frac{g(x+\Delta x,y)-g(x,y)}{\Delta x}+i\frac{h(x+\Delta x,y)-h(x,y)}{\Delta x}\right]
\end{aligned}
$$

Obteniendo los límites entonces

$$
f'(z) = (\frac{\partial g}{\partial x}+i\frac{\partial h}{\partial x})_{x,y} \tag{5}
$$

Ahora si $\Delta x = 0$, tenemos que $\Delta z = i\Delta y$ que ahora recorre una trayectoria completamente vertical, entonces

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{z\to\Delta y} \frac{g(x,y+\Delta y)+ih(x,y+\Delta y)-(g(x,y)+ih(x,y))}{i\Delta y} \\
&= \lim_{z\to\Delta y} \frac{g(x,y+\Delta y)+ih(x,y+\Delta y)-g(x,y)-ih(x,y)}{i\Delta y} \\
&= \lim_{z\to\Delta y} \frac{g(x,y+\Delta z)-g(x,y)+i(h(x,y+\Delta z)-h(x,y))}{i\Delta y} \\
&= \lim_{z\to\Delta y} \left[\frac{g(x,y+\Delta y)-g(x,y)}{i\Delta y}+i\frac{h(x,y+\Delta y)-h(x,y)}{i\Delta y}\right] \\
&= \lim_{z\to\Delta y} \left[\frac{1}{i}\frac{g(x,y+\Delta y)-g(x,y)}{\Delta y}+\frac{h(x,y+\Delta y)-h(x,y)}{\Delta y}\right]
\end{aligned}
$$

Obteniendo los límites y tomando encuenta que $\frac{1}{i} = -i$, entonces

$$
f'(z) = (-i\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial y})_{x,y} \tag{6}
$$

Igualando las ecuaciones 5 y 6, es decir, igualando las parte reales y las partes imaginarias

$$
(\frac{\partial g}{\partial x}+i\frac{\partial h}{\partial x}) = (-i\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial y})
$$

Obtenemos las **Ecuaciones de Cauchy-Riemman**

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial h}{\partial y}\\ \frac{\partial h}{\partial x} &= -\frac{\partial g}{\partial y}\end{aligned}$$

2.4. Funciones Analíticas

Una funcion es analítica (holomorfa o regular) en una region G, del plano complejo complejo si tiene derivada en cada punto que pertenece a esta región, en particular, una *función entera* es tal que la región cubre todo el plano complejo. A veces tambien se habla que la función es analitica en un punto z_0 no solo si existe la derivada en ese punto, si no en todo punto que esta dentro de una vecindad de radio r perteneciente a z_0, esta vecindad es un conjunto de números complejos encerrados en un circulo de radio r, con centro en z_0.

3. REC/C

REC/C es uno de varios programas especializados **REC**, en especial diseñado para la aritmetica compleja, en el podemos evaluar complicadas expresiones solo con ayuda de una pila y la notacion postfija, ademas de elaborar graficas de variable compleja.

3.1. REC

REC es un lenguaje de programación que agrupa secuencias de instrucciones usando para ello un par de **parentesis** (- - - - - -), podemos tener patrones de este tipo tantas veces como queramos encerrados todos entre un par de **llaves** { }, las secuencias de instrucciones encerradas entre parentesis pueden a su vez agrupar otras secuencia de instrucciones (- (- - -) (- - -) -).

El flujo de instrucciones puede ser alterado haciendo uso de dos símbolos de puntuación el **punto y coma** y los **dos puntos**, el primero indica *terminación* y un salto al proximo parentesis derecho, asi para indicarle a REC que nuestra rutina ha acabado pondremos un punto y coma previo a cualquier parentesis que cierra (- - - - ;), el segundo indica *iteración* y hace un salto al parentesis previo izquierdo en el mismo nivel por cada iteración, los dos puntos son auxiliados por el símbolo !n!, donde n indica el numero de iteraciones, por ejemplo si queremos iterar cinco veces una secuencia de instrucciones pondremos (!5! - - - :;), !n! se coloca siempre seguido de un parentesis que abre.

REC permite que una secuencia de instrucciones se ejecute mas de una vez, solo con escribir un espacio y una letra seguido de (- - - ;), esta es la forma de definir una subrutina la cual podemos llamar una y otra vez, solo anteponiendole a la letra el símbolo '@', e invocandola desde cualquier punto de otra subrutina o de ella misma, si nuestro programa contiene solo un patrón de la forma (- - - ;) entonces no son necesarias las llaves, pero si contiene mas de una subrutina entonces si las necesitará, ademas todas deveran estar nombradas a excepción de la ultima que es donde comienza a ejecutarse el programa.

Asi un típico programa REC tendria la siguiente forma:

```
{
(@b        ;)  a
(          ;)  b
(@a        ;)  c
(@a(!n!@b           :;)@c;)
}
```

Las instrucciones son predicados que pueden tomar el valor de verdadero o falso, un predicado que siempre es verdad es un operador, los operadores y predicados no forman parte de la estructura de control, esto permite tener programas REC especializados, solo con definir sus propios operadores. En pocas palabras, si pudieramos abstraer un programa REC encontrariamos siempre la siguiente cadena de símbolos

$$\{(!n! :;)\}@$$

.

3.2. La pila y la notación postfija

Sin duda la pila y la notación postfija son la pieza clave de cualquier programa REC/C, la pila es una estructura de datos, basada en el principio primero en entrar, ultimo en salir, en el caso de REC/C la pila unicamente guarda números complejos, ya implementada podemos verla como un simple arreglo de n filas y dos columnas de la forma *double stack[n][2]*, donde cada fila es un elemento de la pila y las dos columnas son las parte real y la parte imaginaria de un número complejo, podemos sacar o meter tantos elementos como queramos en la pila, siempre y cuando no este vacia, la figura 19 lo ilustra.

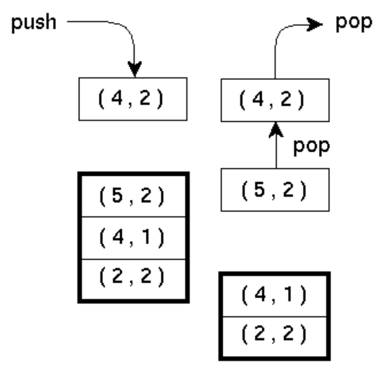

Figura 19: La pila de REC/C

Existen tres maneras conocidas de escribir una expresión aritmetica o algebraica:

- *Notación Prefija o polaca*

  Operador — 1erOperando — 2doOperando

- *Notación Entrefija*

  1erOperando — **Operador** — 2doOperando

- *Notación Postfija o polaca inversa*

  1erOperando — 2doOperando — **Operador**

La figura 20 nos muestra un ejemplo entre la notación entrefija y la notación postfija, en la primera parte evaluamos la expresión $6 + 5 - 4 * 3$ 2 siguiendo la precedencia de operadores, en la segunda parte se convierte a una notación postfija.

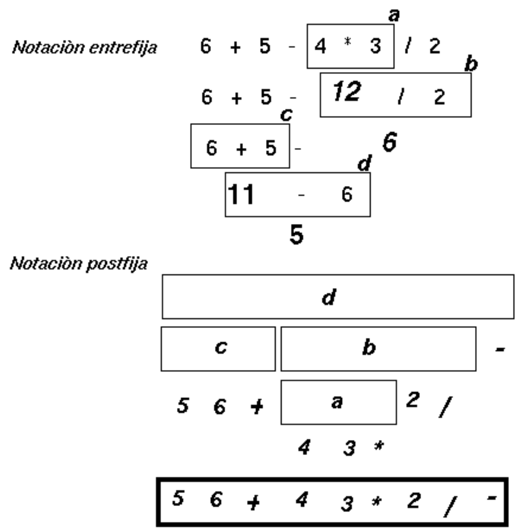

Figura 20: Notación entrefija y postfija

Cada una de ellas varia solo en el orden de sus operandos y operadores, ademas a diferencia de la notación entrefija, las otras dos notaciones no necesitan el uso de parentesis para denotar la precedencia de los operadores esta es una gran ventaja que es usada por los programas de computadora para evaluar expresiones algebraicas con apoyo de una pila, como un ejemplo claro REC/C

3.3. Operandos y operadores

REC/C para lograr su objetivo define sus propios operadores haciendo que cada uno de ellos cumpla una función en especifica, denotando con z el ultimo y con w el penultimo número complejo empilado, los podemos clasificar de la siguiente manera:

- Aritmeticos Unarios

j Conjugado complejo de z

f Multiplica z por un factor real

n Negativo de z

r Raiz cuadrada de z

D Multiplica z por 2

d Divide z por 2

- Aritmeticos Binarios

  + Adición $(w + z)$ dejando su suma

  - Diferencia $(w - z)$ dejando su resta

  ***** Multiplicación $(w * z)$ dejando el producto

  / División (w/z) dejando el cociente

  & Intercambia las posiciones entre w y z, ahora w esta en la cima.

- Funciones especiales

  C Coseno hiperbolico $Cosh(z)$

  T Tangente hiperbolica $Tanh(z)$

  L Logaritmo complejo $Log(z)$

  E Exponencial compleja e^z

  F Transformación de fracciones lineales $\frac{z+1}{z-1}$

- Manipulación de pila

  x,y Empila el complejo $x + iy$

  P Inserta de nuevo z

  p Descarta z de la pila.

  Sn Salva el número complejo z en el registro n

  Rn Empila el número complejo del registro n, previamente guardado

- Constantes sobre la pila

  Z Empila $0 + i0$

  X Empila $1 + i0$

Y Empila $0 + i$

u Empila 0.1+i0

v Empila $0 + i0.1$

x Empila 0.025+i0

v Empila $0 + i0.025$

- Manipulación del plano

  G Marca el punto inicial de una linea a dibujar en z

  g Traza una linea desde el punto marcado por G o por el mismo hasta z

  z Dibuja un pequeo circulo

  s Dibuja un pequeo

  k Dibuja un circulo de radio $\Re(z)$ centrado en w

  ? Dibuja una etiqueta rotulada con z ubicada en w

  QK, **QB**, **QR**, **QY** Cambia el color de dibujado a negro, azul, rojo y amarillo, respectivamente.

  q Dibuja un cuadrado de tamaño configurado por m

  M Multiplicador grafico dado $\Re(z)$ (zoom), 10.0 por default

  m Configura a $\Re(z)$ el tamaño del cuadrado dibujado por q, 1.25 por default

  c Umbral de compresion

Entre los predicados tenemos:

- **A** Es ángulo un multiplo de 90°?
- **I** La parte real es un entero?
- **i** La parte real es multiplo de 0.1?
- **lx** Verifica profundidad en la recursividad.

Para colocar un comentario solo hay que encerrar el segmento de código entre corchetes '[' ']'. Todos los operadores actuan solo sobre el primero o los dos primeros elementos de la cima de la pila, dejando un elemento o en su caso dejando intacta la pila, la figura 21 muestra el flujo de datos de los distintos operadores sobre la pila REC/C.

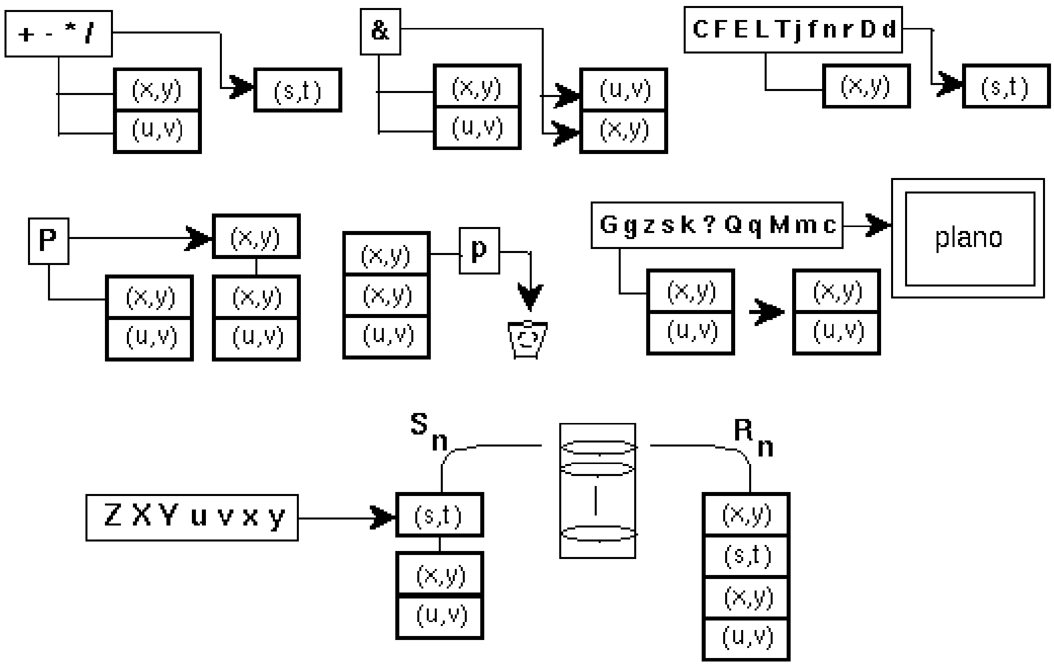

Figura 21: Flujo de datos sobre la pila REC/C

3.4. Mi primer programa en REC/C

REC/C cuenta con dos ventanas principales, una es el editor y otra es el plano mostradas en la figura 22, el editor cuenta con tres botones, dos son para compilar y ejecutar el programa y otro para importar codigo ya elaborado.

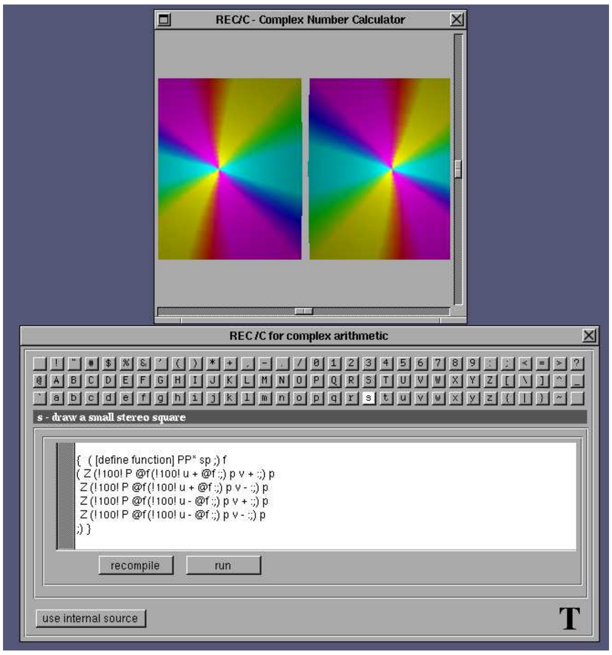

Figura 22: Plano y Editor de REC/C

Ya aprendimos los conceptos básicos de REC, y conocemos los operadores y predicados básicos que define REC/C, ahora comenzemos con un sencillo "Hola Mundo" el cual consiste en dibujar puntos discretos en el plano complejo en forma de una cuadricula, no hay que olvidar que tenemos que hacer uso de la notación postfija y pensar en terminos de la pila.

Una vez ejecutado el programa el plano se verá como en la figura 23, el programa deverá recorrer de izquierda a derecha cada renglón, asi pensaremos en una estructura con dos ciclos uno mas interno que me haga los movimientos en horizontal, y uno mas externo que los realice en vertical, ademas al comienzo de nuestro programa pondremos nuestro punto inicial en $(0, 0)$ para comenzar a recorrer la cuadricula, a si mismo, podemos cambiar nuestro punto inicial a cualquier punto del plano, por ejemplo podemos ubicarlos en un punto correspondiente al tercer cuadrante, y que los incrementos cruzen sobre los demas cuadrantes.

```
{
(Z (!10! (!10!:;) :;) ;)
}
```

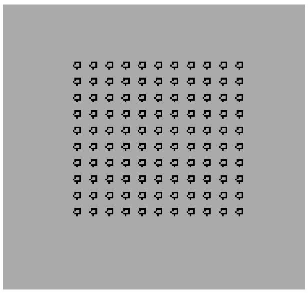

Figura 23: Puntos discretos sobre el Plano

Ahora pensemos en terminos de la pila para resolver este problema (ver figura r̃effig:pilarejilla), para recorrer en horizontal solo empilamos el incremento y lo sumamos a lo que se encuentre en la cima de la pila, al terminar de recorrer el renglon sacamos la suma, esto corresponde al ciclo mas interno de nuestro programa.

```
{
(Z (!10! (!10!X+:p;) :;) ;)
}
```

Ahora al salir de cada ciclo interno la pila esta vacia, en ese caso antes de entrar al ciclo devemos duplicar la cima, ahora si, al salir del ciclo mas interno, tenemos un elemento en la pila que será el punto inicial de cada renglon, a este punto le sumaremos el incremento vertical, en la siguiente iteración el ciclo mas interno trabajará sobre el siguiente renglon, al finalizar el ciclo mas interno solo nos queda sacar el elemento restante de la pila, el programa luce ahora de la siguiente manera.

```
{
(Z (!10!P (!10!X+:p;)Y+ :p;) ;)
}
```

Lo unico que nos queda es que cada vez que el programa pase sobre un punto marcarlo, dibujando un pequeõ circulo con 'z', esto es despues de cada

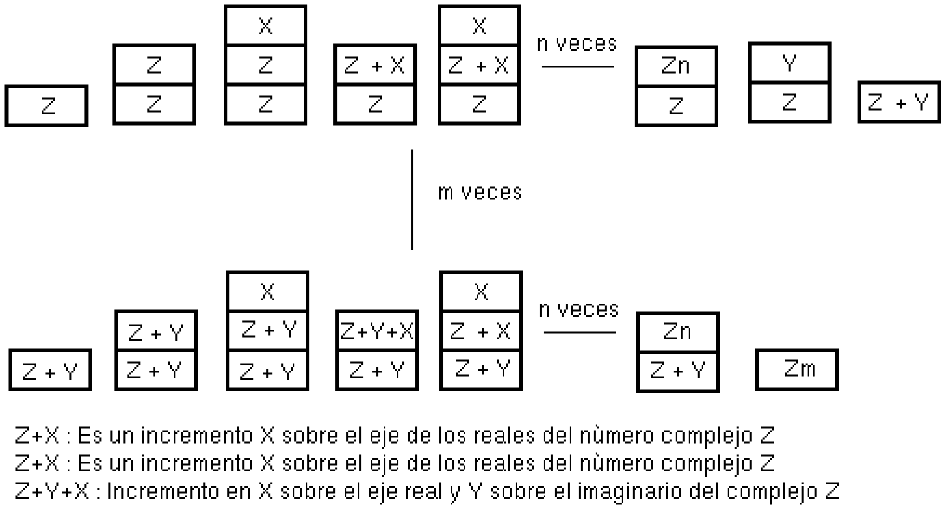

Figura 24: Comportamiento de la pila

incremento en el ciclo mas interno y antes de entrar a el, ahora el programa finalmente se mira como sigue.

```
{
(Z  (!10!Pz  (!10!X+z:p;)Y+  :p;)  ;)
}
```

Esto fue extremadamente detallado, ya que es nuestro primer programa, ahora modificaremos el programa anterior para crear una rejilla trazada con lineas horizontales y verticales que se forman uniendo los pequeos circulos del programa anterior, para ello copiaremos la subrutina dos veces, en la primera, antes de entrar al ciclo mas interno marcaremos el punto inicial de una linea con 'G', y despues de cada iteración en el ciclo mas aninado, trazaremos una linea con 'g', hasta aqui hemos creado lineas horizontales, pero aun faltan las verticales, eso lo hara la segunda subrutina que copiamos, solo hay que cambiar los incrementos, ahora el ciclo mas interno incrementara verticalmente y el mas externo horizontalmente, a estas tres subrutinas las nombramos con una letra y las llamamos desde una rutina principal colocada al final del programa, ademas ya no es necesario trazar circulos en las rutinas que copiamos, el plano se mira como en la figura 25 y el programa luce de la siguiente manera.

```
{
(Z (!10!Pz (!10!X+z:p;)Y+ :p;) ;) a
(Z (!10!PG (!10!X+g:p;)Y+ :p;) ;) b
(Z (!10!PG (!10!Y+g:p;)X+ :p;) ;) c
(@a@b@c ;)
}
```

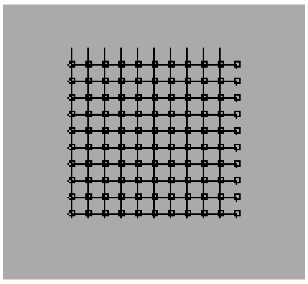

Figura 25: Rejilla

3.5. Representación por las imagenes de las lineas

En las secciones anteriores dijimos que es muy dificil poder trazar una gráfica de una función de variable compleja, ya que implica el uso de cuatro dimensiones, ahora veremos una técnica que es muy fácil de aplicar con la cual podemos observar la transformación que sufre cada linea al ser aplicada la función. Observemos de nuevo la figura 25 y la figura **??**, tomemos a nuestra rejilla como el dominio de puntos, que pasa si en lugar de dibujar los pequeños circulos y trazar las lineas sobre los puntos del dominio, hacemos esto pero con los puntos del codominio, esto implica que antes de trazar cada circulo en un punto del plano z, hay que evaluar la función y dibujar el circulo correspondiente en el plano w, ahora veremos solamente las lineas que se formaron en el codominio, vease figura 26.

Ahora solo consiste en engaar a nuestro programa anterior, antes de llegar a una 'G', 'g' o 'z', hay que llamar a una función que me evalue ese punto del dominio que iba ser dibujado, cuando ese punto este evaluado ahora si dibujar y luego retirar el punto (vease siguiente programa), el programa seguirá ejecutandose igual que antes, pero ahora con las curvas deformadas de

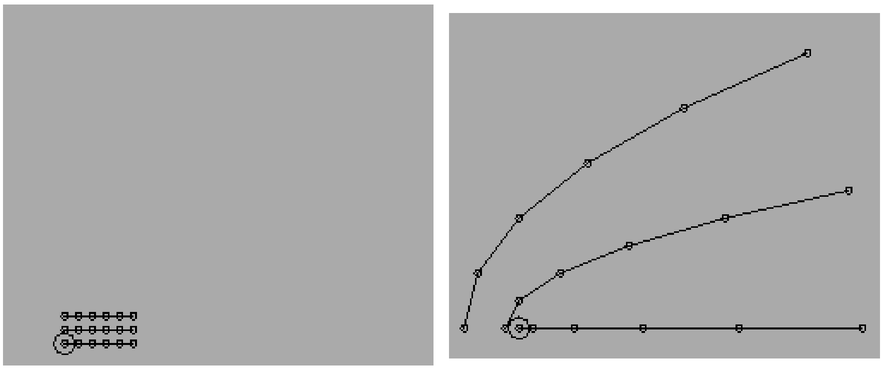

Figura 26: Transformación de las lineas

acuerdo a la función que evaluemos en la subrutina f.

```
{
([funcion evaluada] PP* ;) f
(Z (!10!P@fzp (!10!X+@fzp:p;)Y+ :p;) ;) a
(Z (!10!P@fGp (!10!X+@fgp:p;)Y+ :p;) ;) b
(Z (!10!P@fGp (!10!Y+@fgp:p;)X+ :p;) ;) c
(@a@b@c ;)
}
```

En este programa evaluamos la función z^2 el plano queda como en la figura 27, quizas al ejecutar tu programa las rectas sean muy largas y no se alcanzen a ver, esto es por que la función crece muy rapido, esto se puede ajustar con \$x\$Mp donde x es el aumento. En la figura 28 vemos ejemplos de esta técnica aplicada con algunas funciones conocidas.

Es importante mencionar que todas las funciones analiticas tienen la propiedad de *conformalidad*, o dicho de otra manera sus mapeos son conformes, en cualquier parte del plano donde sean definidas, excepto donde la derivada no existe. Dicho de otra manera, si dos curvas se encuentran en un punto en el dominio, sus tangantes formaran un ángulo con cierta magnitud y sentido, entonces un mapeo se dice que es conforme, si las tangentes de las imagenes de las curvas conservan la misma magnitud y el mismo sentido , si solo

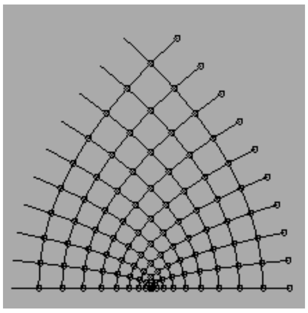

Figura 27: Transformación de las lineas

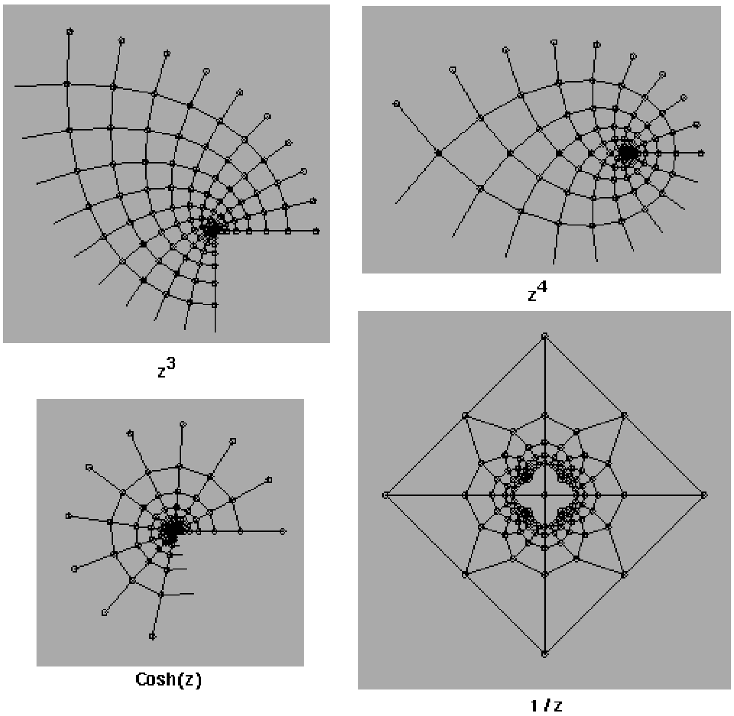

Figura 28: Transformación de las lineas con $f(z) = z^2$

conservan su magnitud pero no su sentido, entonces se llama *mapeo isogonal.*

3.6. Dominio de Colores

Otra forma de representar una función compleja es usando colores, veamos de nuevo la figura 2, ahora coloreamos el plano w (codominio) tal que quede totalmente cubierto de colores aleatorios. Supongamos que los puntos del plano w, hayan quedados con los colores que se muestran en la figura 29, ahora a cada punto que evaluemos en el plano 'z' (dominio) lo pintaremos con el color asignado al punto de su imagen en el plano 'w', ahora el plano 'z' quedara como en la figura 30.

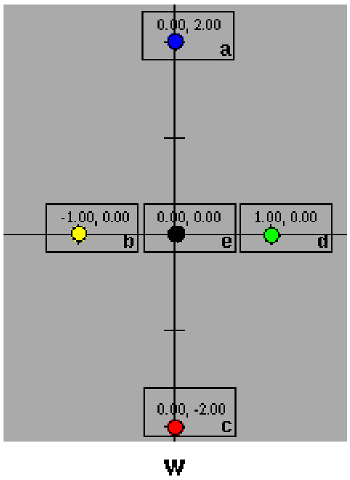

Figura 29: Codominio con puntos coloreados aleatoriamente

Así podemos mapear tantos puntos en el dominio, y asignarles un color de acuerdo al punto del codominio, en esto consiste la técnica *dominio de color*

3.7. Mapeo por Contornos

Aunque en la técnica anterior pudimos ver como se deforma una curva de acuerdo a la función que apliquemos, es muy dificil estudiar aspectos importantes de una función como los polos, singularidades o las raices de un polinomio, como se comporta los argumentos o en su caso los modulos de los

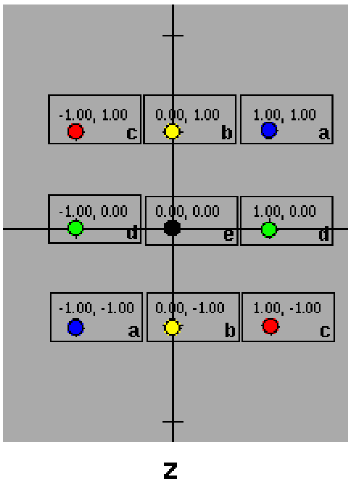

Figura 30: Dominio de Color

número complejo, el mapeo por contornos nos lo permite.

El mapeo por contornos usa los colores para iluminar el plano, los colores asignados al codominio dependen de lo que se quiere conocer de la función, supongamos que queremos conocer como se comportan los ángulos o argumentos $(arg(z))$, para ello el codominio se pintara con tonalidades de colores o gradientes de color, las tonalidades de colores son usadas ya que ambas tanto los argumentos como ellas mismas son medidas en ángulos, por ejemplo podemos aplicar un gradiente especifico de rojo a negro, haciendo que todos los puntos sobre el eje real positivo sean completamente rojos, ahora barremos todo el plano en sentido contrario a las manecillas del reloj aplicandole en cada movimiento color negro, asi el rojo se va obscureciendo hasta aproximarse a 360° donde es completamente negro, la tonalidad de color es arbitraria, pero casi siempre es usada la *rueda de color*, y es la que usa el programa REC/C, mostrada en la figura 31. Esta tecnica en particular es llamada *contornos de fase*.

Ahora si nuestro interes es el comportamiento del modulo $|z|$, son usadas las intensidades de color, entonces el codominio se pintarąn colores que cambien de acuerdo a la distancia de un punto al origen, por ejemplo, del origen a una cierta distancia color rojo, a partir de es punto a otra distancia otro

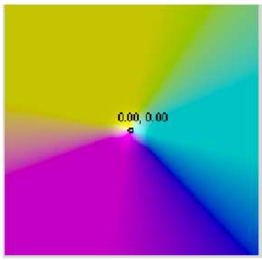

Figura 31: Contornos de fase

color, y asi sucesivamente, a veces se asignan diferentes colores, otras veces dos colores intercalados, o a veces un solo color intercalado con un espacio de ausencia de color. Para este caso REC/C ve el codominio como en la figura 32. Esta tecnica es llamada *contornos de valor absoluto*.

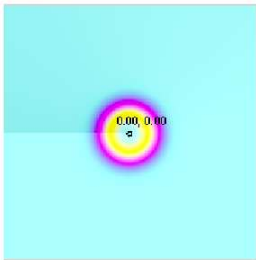

Figura 32: Contornos de valor absoluto

Veamos de nuevo los circulos que dibujamos en la figura 23, pero ahora nos conviene colocar el punto inicial en el tercer cuadrante, tal que los circulos cruzen los cuatro cuadrantes, modificando el mismo programa ahora tenemos.

```
{
($-5,-5$  (!10!Pz  (!10!X+z:p;)Y+  :p;)  ;)
}
```

Una vez que tenemos el punto del dominio a mapear lo que hay que hacer es llamar a una subrutina que evalue la función de tal forma que la pila quede como se ve en la figura 33. Ahora en lugar de circulos, vamos a pintar cuadrados de un color de acuerdo al valor de la función evaluada $f(x)$, este mapeo irá tomando puntos de colores ya sea de la figura 31 usando contornos de fase o de la figura 32 usando contornos de valor absoluto, y los pondra en el dominio, para asignar estos colores se usa 'Qa' y Qv' respectivamente. Solo quedan dos cosas por hacer una es sacar el punto $f(x)$ y luego pintar el cuadrado con 'q'. El programa finalmente queda asi.

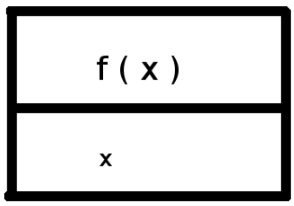

Figura 33: Estado de la pila

```
{
(PP* [f(x) en la cima]
 Qa [Color tomado de acuerdo a contornos de fase]
 p [f(x) retirado de la pila]
 q [pintar un cuadrado en el punto x del dominio]
;)
($−5,−5$ (!10!P@f (!10!X+@f :p;)Y+ :p;) ;)
}
```

Hay que aclarar que los cuadrados pintados por 'q' tienen un tamao por omisión, en el ejemplo anterior los incrementos son de 1 unidad, entonces cada cuadro pintado deve llevar al menos esa medida, si no quedaran espacios vacios entre cada cuadro, por ejemplo 'ump' hace que el lado de cada cuadro sea de 0,1 unidades

3.7.1. Contornos de fase

Usando los contornos de fase es fácil ver en que puntos la función $f(x)$ es igual a cero, observemos de nuevo la figura 31, este plano es en todo momento la imagen de cualquier función que se mapea, entonces cuando la función tienda a cero, se va ir acercando cada vez más al origen, haciendo que ese punto cubra cada vez más y más colores, asi en nuestra grafica los puntos del dominio donde existe una aconglomeración de color son los puntos donde la función es igual a cero.

3.7.2. Contornos de valor absoluto

Los contornos de valor absoluto muchas veces sirven para observar los polos y singularidades, se dice que función compleja tiene un polo en un punto a, la función tiende a infinito, con x suficientemente cercano a a.

Por ejemplo la función $f(z) = \frac{1}{z}$ tiene una singularidad en $z = 0$, quiere decir que mientras nos acercamos mas a 0 en el dominio, el mapeo trae colores de puntos en el codominio cada vez mas alejados del origen.

3.8. Recursividad

La recursividad tambien es posible en REC/C, aunque con algunas limitaciones, la recursividad termina cuando encuentra un caso base a partir del cual pueda regresar, en REC/C en lugar de ello hacemos uso del predicado lx, donde x puede tomar un numero entre 0 y 9, cada número significa la profundidad donde se encuentra la función,en la mayoria de los casos la función tendra la siguiente estructura.

```
{
( lx [lx se cumple]; l+ [lx no se cumple] @f ;) f
( lz @f ;)
}
```

'lz' establece la profundidad en 0, supongamos que x vale 6, entonces al entrar a la funcion compara, como la profundidad no es igual a 6, ejecuta lo que hay despues de la primera coma, sube un nivel con 'l+' y se vuelve a llamar ella misma, asi el fragmento despues de la coma se ejecutara 5 veces y se terminará el programa. Un ejemplo que pinta en el plano lo primeros numeros de la serie de fibonacci, se muestra a continuación.

```
{
(l5 ; l+ S0 & S1 & R0R1+ @f QRq Qk P? p;) f
(XX lz @f ;)
}
```

Referencias

[1] A. David Wunsch. *Variable Compleja con Aplicaciones*
Pearson education.

[2] Tristan Needham. *Visual Complex Analysis*
CLARENDON PRESS OXFORD. *1997*

[3] Liang Shin Hahn & Bernard Epstein. *Classical Complex Analysis*
Jones and Bartklett publishers. *1996*

[4] Lars V. Ahlfors. *Complex Analysis*. Tercera Edición
McGraw-Hill Book Company. *1979*

[5] William R Derrick. *Variable Compleja con Aplicaciones*
Grupo Editorial Iberoameticana.

[6] Harold V. Mcintosh. *Complex Analysis*
delta.cs.cinvestav.mx/∼mcintosh//comun/complex/complex.html. *2001*

[7] Harold V. Mcintosh. *REC/C for Complex Arithmetic*
delta.cs.cinvestav.mx/∼mcintosh//comun/complex/complex.html. *2001*