

# Ciclos y periodos de la regla 169

Mario Martínez Molina  
Centro de Investigación en Computación  
Instituto Politécnico Nacional  
mmartinezb08@sagitario.cic.ipn.mx

25 de agosto de 2011

## 1. Preliminares

Un autómata celular está definido por la 4 - tupla  $A = (d, Q, N, f)$  [2], donde:

- $d \in \mathbb{Z}^+$ , es la dimensión de la lattice  $L \subseteq \mathbb{Z}^d$
- $Q$  es un conjunto finito de estados.
- $N$  es un vector de vecindad  $d$  - dimensional:

$$N = (\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_m)$$

dónde cada  $\vec{n}_i \in \mathbb{Z}^d$  y  $\vec{n}_i \neq \vec{n}_j$  para toda  $i \neq j$ . Cada elemento  $\vec{n}_i$  especifica las coordenadas relativas de los vecinos de cada célula, en particular la célula  $\vec{n} \in \mathbb{Z}^d$  tiene coordenadas  $(0, 0, \dots, 0)$ , y vecinos  $\vec{n} + \vec{n}_i$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ .

- $f : Q^m \rightarrow Q$  es una función de transición local que especifica el nuevo estado de cada célula a partir del estado previo de sus vecinos.

Una configuración de un autómata celular  $d$  - dimensional es una función  $c : \mathbb{Z}^d \rightarrow Q$  que asigna un estado a cada célula, el estado de la célula  $\vec{n} \in \mathbb{Z}^d$  es denotado por  $c(\vec{n})$ . El conjunto de todas las configuraciones está denotado por  $Q^{\mathbb{Z}^d}$ , en una dimensión este conjunto es  $Q^{\mathbb{Z}}$ , el conjunto de todas las funciones de la forma  $\mathbb{Z} \rightarrow Q$ . Cuando  $f$  es aplicada a cada célula, un cambio global en la configuración ocurre, la configuración  $c$  cambia en la configuración  $c'$ , dónde para toda  $\vec{n} \in \mathbb{Z}^d$ :

$$c'(\vec{n}) = f [c(\vec{n} + \vec{n}_1), c(\vec{n} + \vec{n}_2), \dots, c(\vec{n} + \vec{n}_m)]$$

La transformación  $c \mapsto c'$  es la función de transición global del autómata celular:

$$G : Q^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow Q^{\mathbb{Z}^d} \tag{1}$$

La iteración de la función  $G$ :

$$c \mapsto G(c) \mapsto G^2 \mapsto \dots \mapsto G^t(c)$$

representa la evolución en el tiempo del autómata celular,  $c$  es la configuración inicial del autómata, cuya órbita está dada por la secuencia:

$$orb(c) = c, G(c), G^2, \dots, G^t(c) \tag{2}$$

Ya que un autómata celular es discreto en tiempo, cada iteración de  $G$  requiere una etapa de tiempo para su aplicación, de esta manera,  $G^t(c)$  representa la configuración del autómata en el tiempo  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$

Una configuración  $c$  es

- Un *punto fijo* de  $G$  si  $G(c) = c$ .
- *Periódica* si  $G^t(c) = c$  para algun  $t \in \mathbb{Z}^+$ .
- *Eventualmente fija* si existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que:  $G^{n+1}(c) = G^n(c)$  es un punto fijo.
- *Eventualmente periódica* si existe un  $n \in \mathbb{N}$  y  $t \in \mathbb{Z}^+$  tal que:  $G^{n+t}(c) = G^n(c)$ , esto es,  $G^n(c)$  es periódica para algún  $n$ .

En algunos casos, un estado  $q \in Q$  es identificado como el estado quiescente del autómata celular, tal estado debe satisfacer la siguiente condición:

$$f(q, q, \dots, q) = q \quad (3)$$

esto es, una célula cuyos vecinos tienen todos el estado quiescente, tendrá a su vez el estado quiescente.

### 1.1. Autómatas celulares elementales

Se trata de autómatas celulares en una dimensión, dos estados y dos vecinos (a la izquierda y a la derecha), de acuerdo a lo anterior podemos definir este tipo de autómatas de acuerdo a la tupla  $(d, Q, N, f)$

- $d = 1$
- $Q = \{0, 1\}$
- $N = (-1, 0, 1)$
- $f : Q^3 \rightarrow Q$

Ya que  $|Q| = 2$  y  $|N| = 3$ , existen  $2^3 = 8$  vecindades distintas (ver Figura 1), al asignar un estado que representa la evolución de la célula central es posible construir  $2^8 = 256$  reglas de evolución distintas.

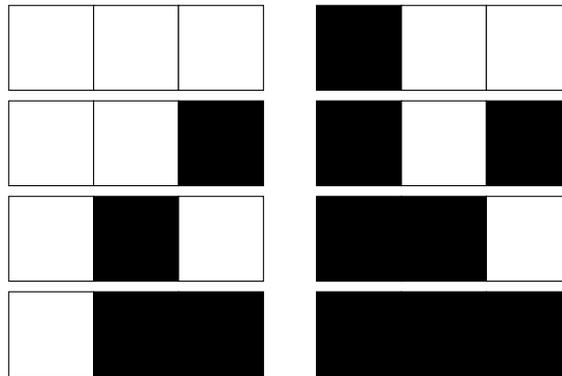


Figura 1: Vecindades para un autómata celular elemental.

La Tabla 1 muestra una posible asignación de estados, la última columna puede ser interpretada como un número binario, que al ser convertido a notación decimal identifica de manera única a dicha asignación [6]. En el caso de la Tabla 1 el decimal antes mencionado es el 169, la Figura 2 muestra la evolución de esta regla.

$c(\bar{n}) - (1)$	$c(\bar{n})$	$c(\bar{n} + 1)$	$c(\bar{n})$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Tabla 1: Regla 169

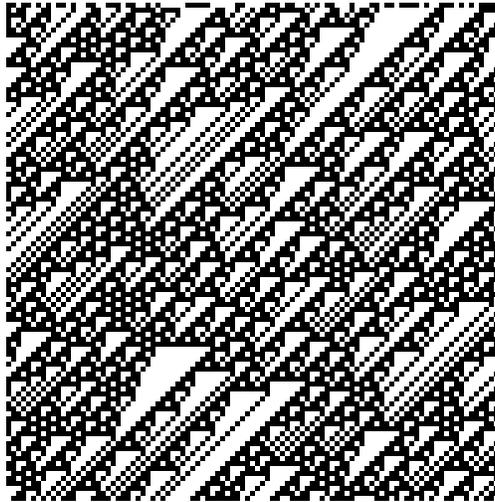


Figura 2: Evolución de la regla 169

## 2. Ciclos en la regla 169

Para facilitar el estudio de la evolución de un autómata celular es común considerar condiciones de frontera periódicas, para una dimensión, esto significa que las células en los extremos de la lattice se consideran conectadas, por lo que esta toma la forma de un anillo. La evolución de dichos anillos depende en gran medida de su longitud, e.g., anillos de longitud uno, donde una célula es su propio vecino izquierdo y derecho, pueden evolucionar de la siguiente manera [4]:

- Si el estado en el anillo es quiescente, la configuración representa un *punto fijo* y dicho estado se repetirá indefinidamente. En el caso de la regla 169, “1” es un estado quiescente ya que  $f(1, 1, 1) = 1$ :

$$1 \rightarrow 1$$

- La evolución puede ser *eventualmente fija*, el anillo evoluciona a un estado quiescente, a partir del cual dicho estado se repite. En el caso de la regla 169, tales condiciones ocurren cuando en el anillo se encuentra el estado “0”:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 1$$

- La evolución es *periódica*, el estado 0 evoluciona en 1, el cual a su vez evoluciona en 0, formando así un ciclo de periodo 2. En la regla 169 dicho proceso no ocurre, sin embargo, la regla 1 representa un buen ejemplo para estas condiciones:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$$

Conforme la longitud del anillo se incrementa, la evolución del mismo puede conducir a configuraciones con periodos más largos, o múltiples puntos fijos, etc. La Tabla 2 lista las 32 posibles evoluciones para un anillo de longitud cinco.

$c$	$G(c)$	$c$	$G(c)$
00000	11111	10000	00110
00001	01100	10001	00101
00010	11000	10010	00001
00011	01010	10011	00011
00100	10001	10100	01000
00101	00010	10101	01011
00110	10100	10110	01101
00111	00110	10111	01111
01000	00011	11000	10010
01001	10000	11001	10001
01010	00100	11010	10101
01011	10110	11011	10111
01100	01001	11100	11000
01101	11010	11101	11011
01110	01100	11110	11101
01111	11110	11111	11111

Tabla 2: Evolución para un anillo de longitud 5

Varias de la configuraciones anteriores presentan simetría cíclica en su evolución, e.g.,  $00001 \rightarrow 01100$  y  $00010 \rightarrow 11000$ . De manera similar a como se hace con las reglas de evolución, resulta conveniente convertir cada configuración a un número decimal, y observar las secuencias de transición resultantes:

$c$	$G(c)$	$c$	$G(c)$
0	31	16	6
1	12	17	5
2	24	18	1
3	10	19	3
4	17	20	8
5	2	21	11
6	20	22	13
7	6	23	15
8	3	24	18
9	16	25	17
10	4	26	21
11	22	27	23
12	9	28	24
13	26	29	27
14	12	30	29
15	30	31	31

Tabla 3: Configuraciones en notación decimal.

A partir de la información presente en la Table 3 es posible construir un diagrama de ciclos (Figura 3) donde se ilustra la evolución de un anillo de cinco células para la regla 169. El resultado de esta

construcción es una colección de árboles “enraizados” en ciclos, donde es aparente la existencia de grupos de configuraciones denominados *clases de simetría* [4].

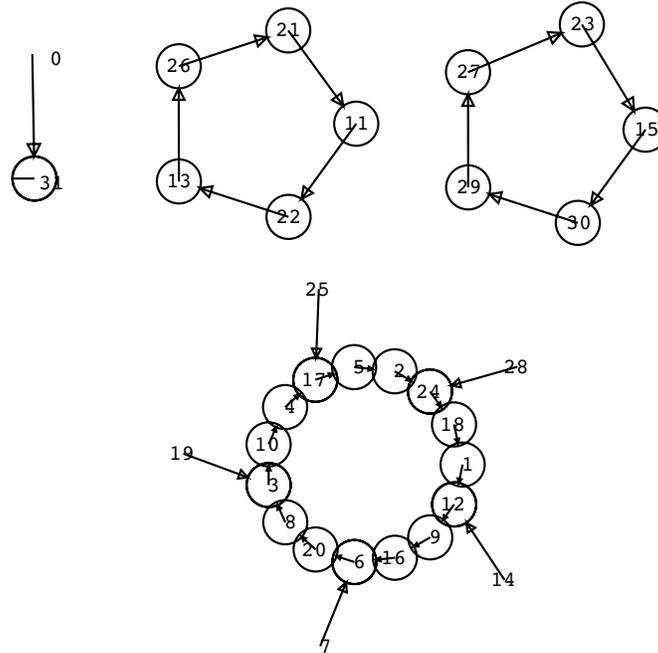


Figura 3: Diagrama de ciclos para un anillo de cinco células.

Del análisis de la Figura 3 podemos concluir lo siguiente.

- La configuración 31 es un punto fijo.
- La configuración 0 es eventualmente fija al evolucionar en el anillo 31.
- Existen 2 ciclos de periodo cinco, el primero de ellos formado por las configuraciones 26, 21, 11, 22, y 13; el segundo formado por las configuraciones 27, 23, 15, 30 y 29.
- Existe un ciclo de periodo 15 formado por las configuraciones 1, 12, 9, 16, 6, 20, 8, 2, 10, 4, 17, 5, 2, 24 y 18.
- Las configuraciones 19, 25, 28, 14 y 7 son eventualmente periódicas al evolucionar en el ciclo anterior.

### 3. Diagramas de de Bruijn

Originalmente los diagramas de de Bruijn fueron utilizados en la teoría de registros de corrimiento para analizar secuencias de símbolos de un alfabeto, en este sentido, este tipo de diagramas proveen una manera conveniente para describir la evolución de las configuraciones de un autómata celular [5].

En el caso unidimensional, un diagrama de de Bruijn es un grafo dirigido compuesto por  $k^{2r}$  nodos y  $k^{2r+1}$  aristas [1], donde  $r$  está dado por:

$$r = \frac{|N| - 1}{2}$$

Cada nodo es una secuencia de  $2r$  símbolos del conjunto de estados  $Q$ , dos nodos estarán unidos por un arco si los  $2r - 1$  símbolos finales del nodo inicial son los mismos que los  $2r - 1$  símbolos iniciales del nodo final. Cada arista en el grafo representa entonces una vecindad completa en el autómata celular,

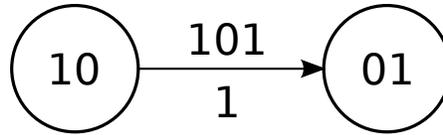


Figura 4: Conexión entre dos nodos en un diagrama de de Bruijn.

en algunos casos la arista es etiquetada por esta vecindad, en otros la arista es etiquetada por el estado al que evoluciona la vecindad que resulta del traslape de ambos nodos (Figura 4).

Los nodos en un diagrama de de Bruijn son secuencias de símbolos de algún alfabeto, las aristas describen la manera en que dichas secuencias se traslapan. La Figura 5 muestra el diagrama de de Bruijn para la regla 169.

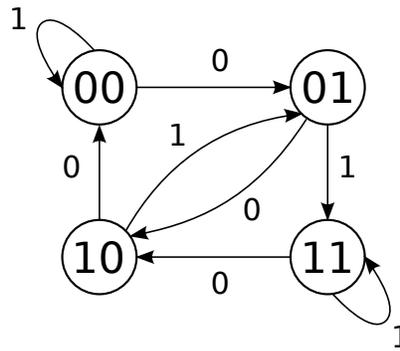


Figura 5: Diagrama de de Bruijn para la regla 169

Recorridos en el diagrama pueden representar cadenas, configuraciones o clases de configuraciones relacionadas con la evolución del autómata. Si existiera algún criterio para eliminar ciertas aristas, el sub-diagrama resultante consiste de las vecindades que pueden ser utilizadas para construir configuraciones que cumplen con el criterio original de eliminación.

### 3.1. Formas de vida estáticas

Este tipo de configuraciones tienen la propiedad de ser invariantes a la evolución de un autómata celular, es decir, representan patrones que no cambian de una generación a otra. Es posible hallar estas configuraciones a través del diagrama de de Bruijn, para esto, solo es necesario descartar aquellas aristas que no representan una vecindad donde el estado de la célula central se conserva en la siguiente generación [4]. El diagrama resultante (6) describe las configuraciones invariantes a la evolución.

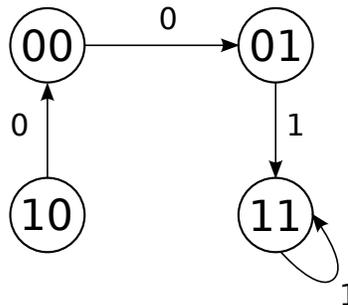


Figura 6: Diagrama de de Bruijn para las configuraciones invariantes en la regla 169.

Existen entonces dos configuraciones invariantes en la regla 169, la primera representada por las cadenas en  $1^*$ , y la segunda por las cadenas en  $00(1^*)$ .

### 3.2. Configuraciones periódicas

Sea  $\vec{u} \in \mathbb{Z}^d$ , la traslación  $\tau_{\vec{u}}$  determinada por  $\vec{u}$  es la función de transición global del autómata celular cuyo vector de vecindad  $N$  contiene solo a  $\vec{u}$ , y cuya función de transición global es la función identidad, es decir,

$$\tau_{\vec{u}} : Q^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow Q^{\mathbb{Z}^d}$$

es una función que mapea  $c \mapsto c'$  donde  $c'(\vec{n}) = c(\vec{n} + \vec{u})$  para todo  $\vec{n} \in Q^{\mathbb{Z}^d}$ , como consecuencia tenemos:

$$\begin{aligned} \tau_{\vec{u}} \circ \tau_{\vec{s}} &= \tau_{\vec{u} + \vec{s}} \\ \tau_{\vec{u}}^k &= \tau_{k\vec{u}} \end{aligned} \quad (4)$$

Para una lattice  $d$ -dimensional donde cada dimensión es indexada por un entero  $i = 1, 2, \dots, d$ , la traslación por una célula en la dimensión  $i$  es llamada *corrimiento* y es denotada por  $\sigma_i$ . Si  $\vec{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  denota el  $i$ -ésimo vector unitario en la dirección del vector  $i$ , entonces  $\sigma_i = \tau_{\vec{e}_i}$ . De la ecuación 4, cada traslación es una composición de corrimientos. Para el caso unidimensional el único corrimiento  $\sigma_i$  es llamado “corrimiento a la izquierda” y se denota simplemente por  $\sigma$  [2].

Una configuración  $c \in Q^{\mathbb{Z}^d}$  es llamada  $\vec{u}$ -periódica si:

$$c(\vec{n}) = c(\vec{n} + \vec{u}) \text{ para todo } \vec{n} \in \mathbb{Z}^d \quad (5)$$

Es posible describir las configuraciones periódicas a través de un diagrama de de Bruijn, por ejemplo, podemos describir las configuraciones que se mueven más rápido que  $r$  en cada generación, tales configuraciones son conocidas como *superluminales*. Por ejemplo, considere la regla 169 y un corrimiento de dos células a la derecha en una generación, para determinar las configuraciones que cumplen con este criterio, se sigue el siguiente procedimiento:

1. Considere una vecindad inicial de tres células denotadas por  $abc$  (Figura 7)
2. Sea  $x$  la célula resultado de la evolución de  $abc$ , ya que  $x$  es el resultado de un corrimiento de dos células a la derecha, existe una célula a la izquierda de la vecindad original con el mismo estado que  $x$ .
3.  $a$  corre para determinar el estado de la célula a la que evoluciona la vecindad  $b, c, d$ , sea esta célula  $y$ . Hasta este punto el estado de la célula  $d$  es desconocido.
4. Para determinar el estado  $d$ , es necesario recurrir a la función de transición local de la regla 169 (Tabla 1), la vecindad parcial  $bc$  y el estado de la célula  $y$  proporcionan suficiente información para determinar el estado de la célula  $d$ . Dada la vecindad parcial izquierda  $bc$  y el estado de la célula en la que se evoluciona  $y$  solo existe un estado posible para la célula  $d$ , note que esto puede no ser cierto para otras reglas.
5. Una vez determinado el estado de la célula  $d$ , se tiene una vecindad de cinco células que resulta del traslape de dos vecindades parciales de cuatro células, cada una de estas vecindades representa un nodo en el diagrama de de Bruijn para un corrimiento de dos células a la derecha en una generación, el nodo  $abc$  esta unido al nodo  $abcd$ . Ya que la vecindad inicial  $abc$  puede elegirse de ocho maneras distintas (debido a que  $|Q| = 2$ ), el diagrama de de Bruijn tendrá 8 nodos en total.

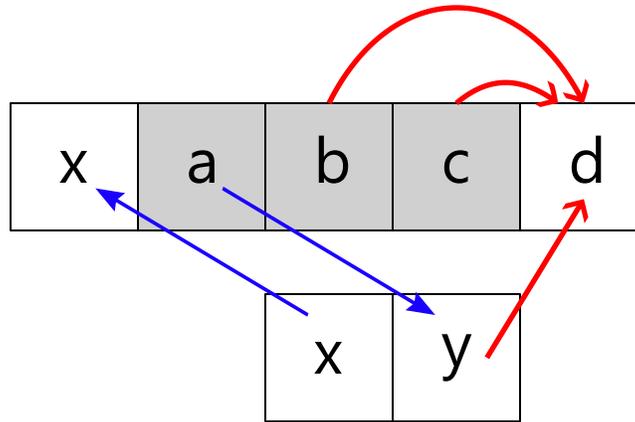


Figura 7: Corrimiento de dos células a la derecha en una generación.

La figura 8 muestra el diagrama de de Bruijn para un corrimiento de dos células a la derecha en una generación correspondiente a la regla 169, en dicho diagrama se han asignado colores a los nodos, estos colores corresponden al estado de la célula más a la derecha en la vecindad parcial representada por el nodo. De esta manera al recorrer el grafo es posible construir las configuraciones presentan el corrimiento deseado. A partir de este análisis se obtienen los siguientes resultados:

- La configuración  $1^*$  representa un corrimiento trivial, ya que cualquier grupo de unos evolucionará necesariamente en otro grupo de unos.
- Existe un ciclo de longitud tres que representa la configuración  $(110)^*$ , la evolución de dicha configuración se ilustra en la figura 9.
- Existe un ciclo de longitud cuatro correspondiente a la configuración  $(1000)^*$ , la evolución de la misma aparece en la Figura 10.

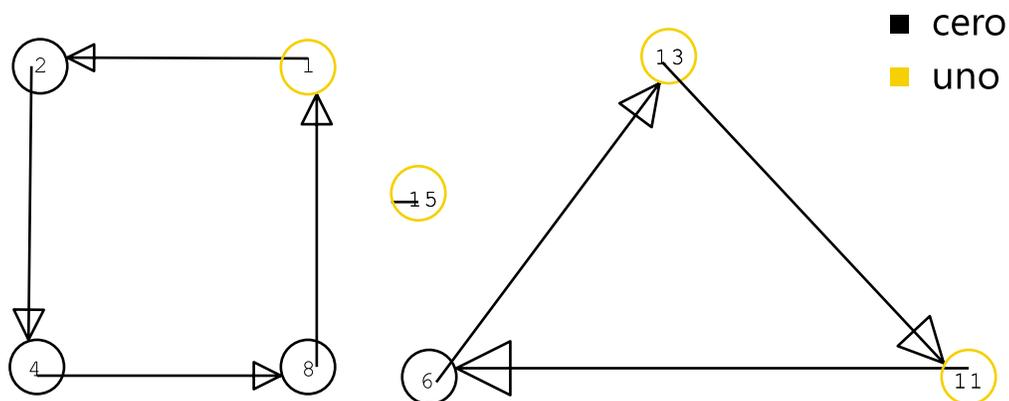


Figura 8: Diagrama de de Bruijn generado con el programa nxlcau21 desarrollado por el Dr. Harold V. McIntosh [3].

Es posible utilizar un procedimiento similar para hayar corrimientos más largos con periodos mayores. La Figura 14 muestra el diagrama de de Bruijn para un corrimiento de tres células a la derecha en dos generaciones. El análisis de dicho diagrama muestra lo siguiente:

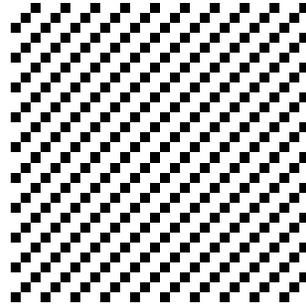


Figura 9: Evolución en un anillo de 30 células de la configuración  $(110)^*$  mediante la regla 169.

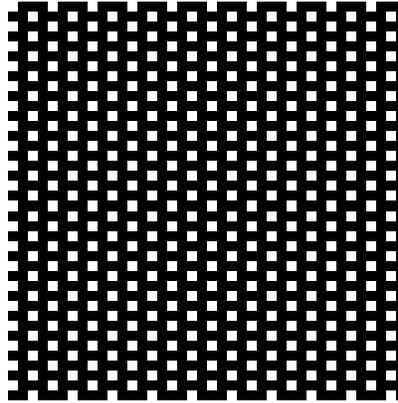


Figura 10: Evolución en un anillo de 40 células de la configuración  $(1000)^*$  mediante la regla 169.

- Existe un primer ciclo de longitud 5, que representa configuraciones en  $(01011)^*$ , la evolución correspondiente se ilustra en la figura 11.

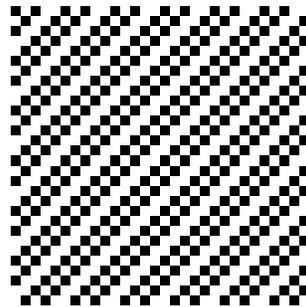


Figura 11: Evolución de la configuración  $(01011)^*$  en un anillo de treinta células.

- Un segundo ciclo de longitud 5, que representa configuraciones en  $(11110)^*$ , la evolución correspondiente se muestra en la figura 12.
- Finalmente existe un ciclo de longitud 21 que representa configuraciones en  $(010011100100011000001)^*$ , la evolución se muestra en la Figura 13.

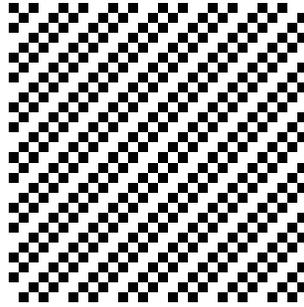


Figura 12: Evolución de la configuración  $(11110)^*$  en un anillo de 30 células.

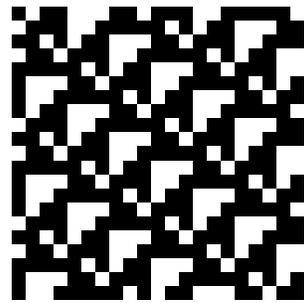


Figura 13: Evolución de la configuración  $(11110)^*$  en un anillo de 21 células.

## 4. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado un breve análisis de la evolución de la regla 169, regla cuya evolución presenta una curiosa afinidad por el fenómeno de *auto-similaridad*. El uso de diagramas de de Bruijn es de particular importancia para describir las configuraciones que representan corrimientos a través de esta regla, no obstante es necesario realizar un estudio más profundo si se ha de caracterizar la afinidad por la *auto-similaridad* presente en esta regla.

Deseo expresar mi más profundo agradecimiento al Dr. Harold V. McIntosh por su extraordinaria labor a lo largo de varios veranos de investigación, los cuales han sido de un gran impacto en la formación de nuevos investigadores.

## Referencias

- [1] Genaro Juárez Martínez y col. “Determining a regular language by glider-based structures called *phases*  $f_{i-1}$  in Rule 110”. En: *Journal of Cellular Automata* 3.3 (2007), págs. 231-270.
- [2] Jarkko Kari. “Theory of Cellular automata: A survey”. En: *Theoretical Computer Science* 334 (2005), págs. 3-33.
- [3] Harold V. McIntosh. *nxcav21*. URL: <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/cellularautomata/SOFTWARE.html>.
- [4] Harold V. McIntosh. *One Dimensional Cellular Automata*. Lunivier Press, 2009. ISBN: 9781905986200.
- [5] Juan Carlos Seck Tuoh Mora y col. *Gliders en autómatas celulares de una dimensión*. 2001. URL: <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/comun/working/year2001/04dic2001/04dic2001.html>.
- [6] Stephen Wolfram. *A New Kind of Science*. Wolfram Media, 2002. ISBN: 9781579550080.

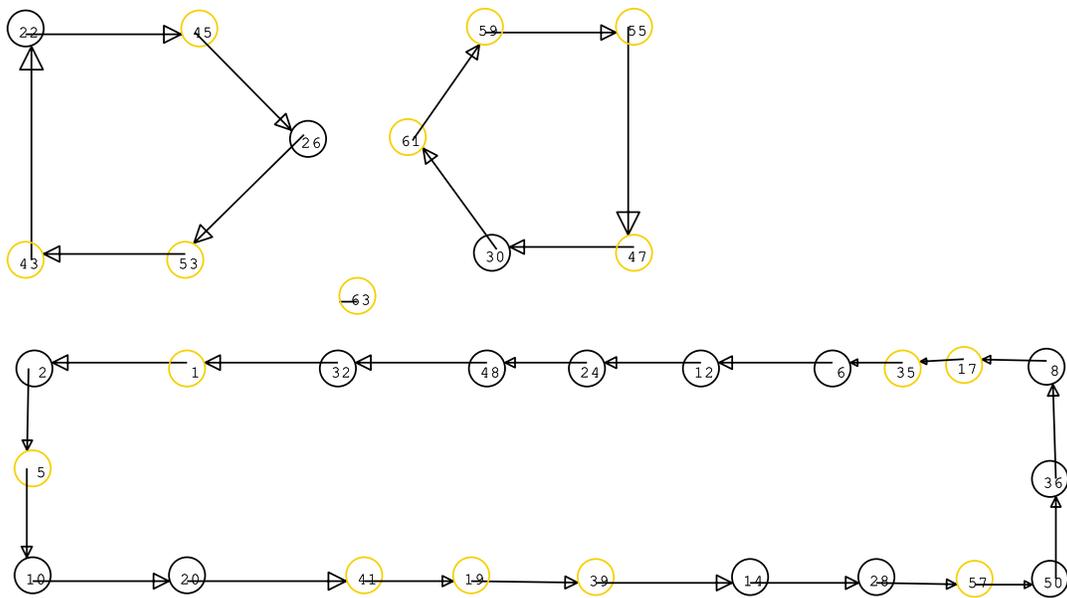


Figura 14: Diagrama de de Bruijn para un corrimiento de tres células en dos generaciones.