

Introducción a los Sistemas Dinámicos y Autómatas Celulares Verano de Investigación 2008

**Escuela Superior de Cómputo
IPN**

Paulina Anaid León Hernández
Rogelio Basurto Flores

24 de agosto de 2008

Resumen

En el presente documento se plantearan las bases de los sistemas dinámicos para poder comprender comportamientos complejos a través de ecuaciones sencillas; se dará una breve reseña historica de autómatas celulares, definicion y clasificacion. Por ultimo se relacionara lo visto de sistemas dinámicos con los autómatas celulares.

1. Sistemas Dinámicos

La teoría de los sistemas dinámicos tiene sus inicios con Newton, en el siglo XVII, y tomo un cambio radical a finales de 1800 cuando Poincaré comienza a considerar la posibilidad de caos en un sistema determinista, tambien estudio el caos en su trabajo sobre el problema de los tres cuerpos, que aunque no resolvió por completo dio lugar a un amplio estudio de lo que ahora se denomina Teoría del Caos.

Un sistema dinámico es un sistema complejo capaz de representar modelos de la naturaleza (por ejemplo el sistema solar), que tiene una evolución en el tiempo, ya sea de forma discreta o continua. La evolución se lleva a cabo en base a estados, el sistema comienza en un estado x_0 y la evolución al estado siguiente es dependiente del estado anterior; además, existe una ley que rige su evolución y si se conoce esta y el estado inicial es posible encontrar cualquier estado posterior.

La manera en que se representan en un sistema dinámico los modelos de la naturaleza se puede ver en la sección siguiente con el estudio de poblaciones.

1.1. Modelos de crecimiento poblacional, Una población

En cálculo se estudia la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = ax \quad (1)$$

donde $\dot{x} = \frac{dx}{dy}$. Esta ecuación puede representar muchos modelos diferentes, sin embargo se utiliza en particular para modelar el crecimiento poblacional cuando $a > 0$, en el supuesto de tener recursos ilimitados; pero al ser $a < 0$ esta misma ecuación puede modelar la decadencia en la radioactividad. Una solución a la ecuación (1) esta dada por:

$$x(t) = x_0 e^{at} \quad (2)$$

donde x_0 es el valor de x cuando $t = 0$. Si $a > 0$, la solución tiende a infinito así como t irá a infinito, mientras que la solución tiende a cero si $a < 0$.

Un modelo mas sofisticado involucra un factor mas: aglomeración. Para la ecuación anterior no se asume una tasa de crecimiento, \dot{x}/x , es una constante, pero esta cantidad decrementa conforme se incrementa x , $\dot{x}/x = a - bx$ con $a, b > 0$. Esta ecuación puede modelar el crecimiento poblacional cuando los recursos son limitados, entonces podemos obtener la siguiente ecuación:

$$\dot{x} = (a - bx)x \quad (3)$$

Esta ecuación suele llamarse el “Modelo logístico para crecimiento poblacional”. Utilizando separación de variables y fracciones parciales llegamos al siguiente resultado:

$$x(t) = \frac{ax_0}{bx_0 + (a - bx_0)e^{-at}} \quad (4)$$

Como se puede observar, si x_0 es igual a 0 o a a/b entonces $\dot{x} = 0$ y la solución es constante en el tiempo. Tal solución es llamada “punto fijo”. Si x_0 permanece entre 0 y a/b , entonces $\dot{x} > 0$ y la solución se sigue incrementando en el tiempo pero nunca podrá alcanzar a a/b . Gracias a esto se puede observar que de estas condiciones iniciales $x(t)$ tiende a a/b cuando t tiende a infinito, y por el otro lado, si $x_0 > a/b$, entonces $\dot{x} < 0$ y la solución $x(t)$ se vuelve monotona decreciendo hacia a/b mientras t tienda a infinito.

Así, para ecuaciones diferenciales en la línea real, la dinámica es siempre así de simple. Mientras t tiende a infinito, todas las soluciones tenderán hacia un “punto fijo” o $\pm\infty$.

1.1.1. Sistemas Dinámicos Superiores

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales no pueden mostrar un caos como se usa regulamente el termino. Así si $x \in \mathbb{R}$ y $f(x)$ esta dada por una función con valores en \mathbb{R}^2 entonces:

$$\dot{x} = f(x) \quad (5)$$

es una ecuación diferencial ordinaria de dos variables. El teorema de Poincaré-Bendixon, establece que si $x(t)$ es una solución la cual esta en los límites en los

cuales t tiende a infinito, entonces pueden bien ocurrir cualquiera de las siguientes opciones: (1) que x tienda a una solución periódica, o bien, (2) que $x(t)$ pase repetitivamente cerca del mismo punto fijo. En realidad el segundo caso propone que $x(t)$ no puede ser aun muy complicada. Así, el caos no puede existir en ecuaciones diferenciales en el plano.

La existencia de un comportamiento caótico por mismo es algunas veces interesante. Un ejemplo donde se puede mostrar una solución periodica atractora es en las ecuaciones de Van der Pol:

$$\dot{x} = y - x^3 + x\dot{y} = -x \quad (6)$$

Estas ecuaciones introducen originalmente un modelo de circuito eléctrico “auto-exitable”. Si tenemos las condiciones iniciales, (x_0, y_0) obtendremos el siguiente resultado: $(x(t), y(t))$ que tiende a un movimiento periódico. Así, el sistema se excita a si mismo para este movimiento periódico, y entonces otros efectos transitorios, el movimiento natural para una solución es un movimiento periódico sencillo.

Iteraciones de funciones desde \mathbb{R}^2 hasta \mathbb{R}^2 pueden ser usadas para modelar poblaciones con mas de una generación o etapas en su tiempo vida. Las iteraciones de tales funciones pueden exhibir todas las complejidades de del mapa cuadrático en la recta real. En dos variables, el mapa puede ser invertible, y aun exhibir caos. La forma algebraica mas simple de mostrar un mapa es el mapa de Hénon:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = F_{A,B} \begin{pmatrix} A - By - x^2 \\ x \end{pmatrix} \quad (7)$$

Este mapa tiene dos parametros, A y B . Hénon observó que su mapa exhibia una “herradura” y “atractor extraño” para diferentes valores paramétricos. Por ejemplo, si ajustamos los valores en $A = 5$ y $B = 0,3$ este mapa presenta un conjunto de Cantor invariante en el plano, una “herradura” y las dinámicas de iteración de los puntos en el conjunto de Cantor son caóticas. Ahora supongamos que colocamos los valores de 1,4 y $-0,3$ para A y B respectivamente, esto generaría una región de captura en la cual los puntos que comienzan en la región de captura van siendo limitados para todas las iteraciones siguientes. Existe entonces un “conjunto invariante”, Λ , de puntos, los cuales van a la región de captura en ambas iteraciones, anteriores y posteriores. Simulaciones computacionales muestran que este mapa es caótico en Λ , y que Λ no puede ser roto dentro de las pequeñas piezas dinamicamente independientes. Por esta razón el conjunto invariante es llamado atractor extraño.

1.2. Puntos Periódicos

Para poder comprender mejor los modelos antes presentados son necesarias varias definiciones, entre ellas las de puntos periódicos. Antes de comenzar con el capítulo deberémos definir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, función que usaremos en adelante y que

además es continua.

En sistemas dinámicos el conjunto límite es aquel que puede llegar a definir puntos periódicos, fijos, atractores, órbitas periódicas o ciclos límite, estos temas son abordados en profundidad en [2]. Los conjuntos límite se definen como las órbitas de la función f , y así dan lugar a los puntos periódicos, que se definen a continuación.

Un punto a es un punto periódico de periodo n , siempre y cuando $f^n(a) = a$ y $f^j(a) \neq a$ para $0 < j < n$; notar que n es el periodo mínimo.

- Si a tiene periodo 1 entonces será llamado *punto fijo*.
- Si es un punto de periodo n entonces la siguiente órbita de a , $\mathcal{O}^+(a)$ es llamada una órbita periódica. La notación utilizada para todos los puntos fijos dados por f^n es:

$$\begin{aligned} Per(n, f) &= \{x: f^n(x) = x\} \\ Fix(f) &= Per(1, f) \end{aligned} \tag{8}$$

Ejemplo: Sea $f(x) = x^3 - x$. El punto fijo está dado por $f(x)=x$, por lo tanto

$$\begin{aligned} x^3 - x &= x \\ x^3 - 2x &= 0 \\ x^2 - 2 &= 0 \quad \therefore \\ x_{PF1} &= 0; \\ x_{PF2,3} &= \pm\sqrt{2} \end{aligned} \tag{9}$$

Sin embargo no son los únicos puntos fijos, pues calculando su primera derivada e igualando con cero obtenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x \\ f'(x) &= 3x^2 - 1 \\ 3x^2 - 1 &= 0 \\ x &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{10}$$

Los únicos puntos críticos son $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Calculamos la segunda derivada para saber si son puntos degenerativos o no:

$$f''(x) = 6x \tag{11}$$

y evaluando $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ en $f''(x)$ se puede ver que: $f''(x) \neq 0 \quad \therefore$ son puntos no-degenerativos.

En teoría es posible el cálculo de los puntos periódicos de cualquier periodo, sin embargo es muy pesado debido a la magnitud de operaciones que se puede llegar a tener, es por eso que es recomendable buscar los puntos periódicos de forma analítica solamente cuando el periodo sea < 4 . Sin embargo, es posible la localización de los puntos periódicos de forma gráfica, trazando la gráfica correspondiente al periodo, y una recta de 45° ; la intersección que tenga la recta con la curva serán puntos periódicos. En otros casos también es posible encontrarlos con ayuda de programas especializados [5].

Ya teniendo una definición formal de un punto periódico pasaremos a la clasificación de estos. Tomando como referencia $\lambda = f'(x_0)$ podemos clasificar los puntos periódicos en 4 categorías, las cuales se ven en detalle en [2]:

- *Atractor*: Cuando $\lambda < 1$; Si $\lambda = 0$ le llamaremos punto fijo *superatractor*.
- *Repulsor*: Siempre que $\lambda > 1$
- *Neutro Racional*: Con $\lambda = 1$ y algún entero n tal que $\lambda^n = 0$
- *Neutro Irracional*: Con $\lambda = 1$ pero solo cuando $\lambda^n \neq 1$

Tal clasificación se hace efectiva solo si se comprende el concepto de órbita, pues los puntos periódicos son atractores, repulsores y neutros con respecto a las órbitas, para ello daremos la siguiente definición:

Para una función continua f la siguiente órbita de un punto a es el conjunto $\mathcal{O}^+(a) = \{f^k(a) : k \geq 0\}$; si f es invertible, entonces la órbita anterior se calcula con iteraciones negativas $\mathcal{O}^-(a) = \{f^k(a) : k \leq 0\}$. Así podemos formar la órbita completa como sigue: $\mathcal{O}^+(a) = \{f^k(a) : -\infty \leq k \leq \infty\}$. Una definición menos formal sería: La secuencia de puntos dados por $\{x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), f^3(x_0) \dots f^k(x_0)\}$, tal que $x_0 \in \mathbb{R}$. Es importante mencionar que x_0 es llamado semilla de la órbita.

2. Introducción a los Autómatas Celulares

Autómata Celular es la idealización de un sistema físico en el cual el tiempo y el espacio son discretos y las cantidades físicas toman solo un valor finito.

Pese a que los Autómatas Celulares han sido reinventados muchas veces, el concepto data de 1940.

La teoría de Autómata Celular inicia con su precursor John Von Neumann con su libro "Theory of self-reproducing".

2.1. Self-reproducing systems

El pionero es ciertamente John Von Neumann quien a los finales de los 1940's fue involucrado en el diseño de las primeras computadoras digitales.

Aunque el nombre de Von Neumann es definitivamente asociado con la arquitectura de las computadoras secuenciales, su concepto de Autómata Celular constituye el primer modelo aplicable de la computación paralela masiva.

Von Neumann trató de definir las propiedades de un sistema el cual tuviera que ser replicado por si mismo. Él fue mostrando interés en encontrar una abstracción logica de un mecanismo de reproducción por sí mismo sin involucrar un proceso biológico.

Siguiendo la sugerencia de S. Ulam, Von Neumann direccionó esta cuestión en una estructura de una estructura de un universo totalmente discreto constituido por celulas.

Cada celula es caracterizada por un estado interno el cual consiste tipicamente en un numero finito de información de bits. Von Neumann sugirió que ese sistema de celulas evolucionaran, en pasos de tiempo discretos, como Autómata simple el cual solo conoce una receta simple para calcular su nuevo estado interno. La regla determina que la evolución de estos sistemas es la misma para todas las celulas y es una función de los estados de las celulas vecinas. De manera similar a lo que pasa en los sistemas biológicos, la actividad de las celulas toma lugar simultaneamente.

Sin embargo, el mismo reloj dirige la evolución de cada célula y actualiza el estado interno de cada célula que ocurre sincronizadamente. Este sistema dinámico discreto inventado por Von Neumann es referenciado como **Autómata Celular**.

La primera replica de Autómata propuesto por Von Neumann fue compuesta por un arreglo bidimensional y la estructura de la replica fue hecha por miles de celulas elementales. Cada una de las celulas obtiene veintinueve estados posibles. La regla de evolución requiere conocer los estados de cada una de las celulas, además de la de las celulas vecinas localizadas al Norte, Sur, Este y Oeste. Debido a la complejidad, la regla de Von Neumann solo se ha implementado en una computadora.

El trabajo de Von Neumann fue llamado "*propiedad universal de la computación*". Esto significa que existe una configuración universal de Autómata Celular con la cual se puede dirigir y solucionar cualquier algoritmo computacional.

Después del trabajo de Von Neumann E. F. Codd en 1968 y mucho después C. G. Langton y Byl propusieron una regla más sencilla para autómata capaz de auto - replicarse usando solamente 8 estados. Esta simplificación fue posible gracias a la propiedad de computo universal, mientras conservan la idea de tener una secuencia distribuida de instrucciones (como el ADN) la cual es llevado a crear una nueva estructura y entera copia en esa nueva estructura.

2.2. Sistemas dinámicos simples

En 1970, el matemático John Conway propuso, el ahora famoso, "*Juego de la vida*". Su motivación fue el encontrar una regla simple del comportamiento complejo.

Él imaginó un arreglo de dos dimensiones, como un tablero de ajedrez en el cual cada célula puede estar viva (en estado 1), o puede estar muerta (estado 0).

La regla es la siguiente:

- Una célula muerta, puede volver a la vida con 3 células vivas a su alrededor.
- Si tiene menos de 2 o más de 3 células vivas a su alrededor, muere por aislamiento o sobrepoblación.
- El contorno de las células corresponde a las 4 células de su alrededor, más las diagonales.

Estas estructuras complejas emergen de una "sopa" primitiva, (primer estado) y evolucionan a través del tiempo.

Por instantes los objetos se llaman "*Gliders*". Los *Gliders* corresponde a un arreglo de partículas de células adyacentes que tienen la propiedad de moverse a través del espacio.

Los Autómatas Celulares fueron usados en los años de 1950's para procesamiento de imagen. Al comenzar los años 1980's S. Wolfram estudio en detalle una familia de una dimensión simple de reglas de A. C., las ahora llamadas reglas de Wolfram.

Él había notado que los Autómatas son sistemas dinámicos simples, como tal, muestra muchos de los comportamientos encontrados en un sistema continuo, todavía dentro de una estructura simple.

2.3. Un universo sintético

Las propiedades de las reglas de A.C son una computadora universal hecha bajos los autores que piensan que el mundo físico es un gran Autómata Celular.

Tommaso Toffoli, compara los Autómatas con un modelo sintético de el universo, en el cual las leyes de la física son expresados en terminos de reglas simples locales en una estructura discreta de espacio - tiempo.

T. Toffoli, N. H. Margolis y E. Fredkin reconocen la importancia de A.C. como un ambiente modelado por sistemas físicos. Ellos estuvieron muy interesados en la analogía que existía entre la teoría de la

información como es usada para describir procesos numericos en una computadora y las leyes de la física.

Además mostrarón como contruir una logica de tiempo - reversible de cualquier operación numérica que puede ser implementada sin ninguna perdida de información. Un ejemplo de ello son las llamdas "*bolas de billar*".

La posibilidad de desplegar en la pantalla de una computadora el tiempo de evolución de un sistema de Autómata Celular largo, a razón de varias actualizaciones por segundo del arreglo competo ofrece un modo de ralizar experimentos vivos sobre un universo artificial en donde las reglas de evolución son puestas por el observador.

Por construir su primer maquina de proposito general de Autómata Celular (CAM-6) a mediados de 80´s, Toffoli y Margolus poveyerón un ambiente con la capacidad de una supercomputadora de ese tiempo. Esta maquina ha simulado muchos descubrimientos de técnicas de Autómatas Celulares y ha contribuido a extender las principales ideas a una audiencia de científicos.

Recientemente Toffoli, Marglus y colaboradores diseñaron CAM-8, un ambiente más poderoso, una arquitectura escalable, uniforme para una experimentación de A.C.

2.4. Modelado de sistemas físicos

Fue en los años 80´s que un importante paso de los Autómatas fue completado. Fue Reconocido como el llamado HPP, modelos gaseosos de enrejados desarrollados en los 70´s por Hardly Pomeau y Pazzis y fue inmediatamente un A.C. Este modelo consiste en un simple, modelo dinámico y discreto moviendose y colisionandose en un arreglo de dos dimensiones, tal que se conserven el momentum y la partícula.

La dinámica HPP fue planeada inicialmente como un modelo teórico de estudio fundamental estadístico de las propiedades de un gas de partículas interactivas.

La actual implementación de este modelo como regla de Autómata Celular y la vizualización rapida del movimiento cubre una luz diferente en la posibilidad de cada moedelo: no es posible la simulación del comportamiento de un sistema real de partículas (como un fluido o un gas) como regla de Autómata Celular.

Después de todo es bueno saber que el flujo de los fluidos o gases son similares en una escala macroscopica a pesar de su naturaleza microscopica diferente. Una dinámica molecular discreta y simple puede trabajar también en una escala apropiada. Por supuesto la idea de usar un sistema discreto como un modelo de fenómenos ha sido usado en vario problemas.

Un Autómata Celular provee un nuevo entorno de trabajo conceptual tan bueno como una herramienta numérica efectiva, el cual retiene importantes aspectos de las leyes microscópicas de la física tal como localización de las interacciones y tiempos reversibles.

La regla de Autómata Celular es vista como una forma alternativa de la realidad microscópica que lleva el comportamiento macroscópico esperado. Como un punto de vista numérico, en los finales de los 80's un tunel aerodinámico puede ser remplazado por un modelo discreto computacional.

El primer modelo de A.C que dio credito a esta posibilidad fue el famoso FHP, modelo propuesto en 1986 por U. Frisch, B. Hasslacher y Y. Pomeau y simultaneamente por S. Wolfram; este último mostró que su modelo tenía una dinámica discreta seguido por sus límites apropiados, el comportamiento prescrito por las ecuaciones de hidrodinámica.

Claramente desde un punto de vista matemático, un gas autónomo enrejado es un A.C. pero la manera de pasar las instancias del juego de la vida son diferentes. Contrariamente a las primeras expectativas los modelos de gas no han sido viables para los métodos numéricos tradicionales de hidrodinámica y cómputo. Su relatividad alta en viscosidad, la cual es determinada por las reglas de A.C. es un factor limitante de la practica del estudio de muchas reglas. La resolución espacial finita de los A.C es una limitante en el modelo de los estudios y modelados del desarrollo de las turbulencias. Sin embargo, un gas autónomo ha sido mucho más exitoso en modelado de situaciones complejas por el cual técnicas computacionales tradicionales no son aplicables.

2.5. Más allá de la dinámica de los autómatas celulares: método de Boltzman y el modelo de multiparticulas

Muchas veces, las ventajas de los A.C. son mas apreciadas cuando condiciones complejas se presentan. Porque la interpretación dinámica microscópica de la dinámica, las condiciones pueden ser tomadas dentro de un modelo mas natural que en una descripción continua en el cual nuestra intuición natural del fenómeno se puede perder. De otra manera los modelos de A.C. tienen debilidades en su naturaleza discreta: una pequeña flexibilidad que se ajusta a los parámetros de la regla para describir un rango de situaciones físicas. A finales de los 80's McNamara y Zanetti, Higuera, Jimenez y Succi mostraron la ventaja de extender la dinámica de booleana de los autómatas directamente trabajados en representaciones numéricas reales y la probabilidad de una célula en torno a un estado dado.

Esta propiedad llamada "Método del enrejado de Boltzmann"(LBM) es numericamente más eficiente que la dinámica Booleana y provee un modelo computacional situado en las simulaciones de Reynolds y muchas otras aplicaciones

referentes.

El modelo del Enrejado de Boltzmann conserva el nivel microscópico de la interpretación de los A.C.

Entre la propiedad estricta de los A.C y la flexibilidad del método de Boltzmann hay un cuadro de una descripción intermedia: los modelos de multipartículas el cual es utilizado luego del descubrimiento del tiempo presente. Este modelo preserva el concepto de un estado cuantificado pero con una infinidad de valores aceptados. Por consecuencia la estabilidad numérica es garantizada y muchas de las relaciones toman lugar. El largo numero de posibilidades ofrece una mayor flexibilidad cuando se modelan sistemas físicos.

Pero la dinámica de multipartículas es más difícil de advertir y numericamente mas lenta que el comportamiento de Boltzmann.

2.6. Un autómata simple: "Parity Rule"

La regla fue propuesta por Edward Fredkin en los años 70's y es definida en dos dimensiones.

Cada sitio del arreglo es una célula y es nombrada por su posición $\vec{r} = (i, j)$ donde i y j son los índices de las filas y las columnas respectivamente.

Una función $\psi_t(\vec{r})$ es asociada a la descripción del estado de cada célula en la iteración t . Esta cantidad puede ser 0 o 1.

La regla especifica como los estados ψ_{t+1} , son computados por los estados de la iteración t . Se comienza desde una condición inicial en el tiempo $t = 0$ con una configuración dada de los valores $\psi_0(\vec{r})$ en el arreglo.

El estado en el tiempo $t = 1$ se obtiene de la siguiente manera:

- Cada sitio \vec{r} calcula la suma de los valores $\psi_0(\vec{r}')$ en los cuatro vecinos cercanos de los sitios \vec{r}' al norte, al este, al sur y al oeste. Los sistemas son periódicos en las direcciones i y j por lo que el calculo es bien definido en todos los sitios.
- Si la suma es igual, el nuevo estado $\psi_1(\vec{r})$ es 0, de lo contrario es 1.

La misma regla es repetida para encontrar los estados del tiempo $t = 2, 3, 4, \dots$

3. Definición

Los autómatas celulares son modelos de sistemas complejos en los cuales en un arreglo infinito de una maquina de estados finitos se actualizan por sí mismos en paralelo, a través de una regla local isotrópica de evolución.

La dinámica de los autómatas celulares son basadas en las siguientes observaciones de los sistemas físicos.

- La información viaja a través de una distancia finita en un tiempo infinito
- Las leyes de la física son independientes del observador.

A esta lista Von Neumann agregó el simplificar con tiempos y espacios discretos. Esta definición se puede extender hasta cualquier número de dimensiones. ([3]).

Con esto queremos decir que los autómatas celulares se conforman de tres partes: [5]

- Una lattice discreta, o un arreglo finito de celdas de una porción de un espacio d-dimencional
- Una vecindad que da el estado local de cada celda en un tiempo t
- Una regla de evolución o una tabla de transición de estados, la cual especifica el tiempo de evolución de los estados.

Definamos con mayor detalle las partes anteriormente mencionadas.

Regla de evolución. Una regla de evolución es aquella en la cual tomando en cuenta los estados de las celulas vecinas, la celula central "evolucionará" a un estado en el siguiente tiempo $t + 1$.

Vecindad. Nosotros conocemos que una regla de evolución es local por definición. La "evolución" de una celula dada requiere conocer el estado de las celulas que estan a su alrededor. Por lo que, la región espacial en el cual una celula necesita conocer sus estados se le llama "vecindad".

En principio no existen restricciones para el tamaño de una vecindad, excepto que tiene que ser del mismo radio en toda la lattice, el cual se define como la cantidad de celulas que se toman en cuenta a partir de la celula central hacia alguna de las direcciones que pueda tomar el espacio ; es decir, si digo que mi número de vecinos será de radio 1 significa que una vecindad en un espacio unidimensional, de una celula la comprenderán una celula a su izquierda, y una a la derecha.

Para mayores dimensiones se han considerado varias vecindades a continuación mencionaremos las más importantes.

Tipos de vecindades

Vecindad de Von Neumann. Consiste en una celula central y considera sus 4 vecinos geográficos próximo, (norte, sur, este y oeste), (Fig. 1).

Vecindad de Moore. Moore toma la vecindad de Von Neumann y agrega los vecinos del nor-este, nor-oeste, sur-este y sur-oeste y en total la vecindad tiene 9 celulas, (Fig. 2).

Lo descrito anteriormente se puede definir formalmente de las siguientes formas.

Dado un conjunto finito de S y una dimensión d podemos considerar una lattice d -dimensional en el cual cada punto tiene un valor del conjunto S . Formalmente la lattice es el conjunto de $L = Z^d$. Entonces podemos definir a los autómatas celulares como un mapa continuo de $G: S^L \rightarrow S^L$ el cual cambia por una $\sigma_i (1 \leq i \leq d)$.

Sin embargo, esta definición no es muy utilizada para fines computacionales.

Otra definición de autómata celular es: Un autómata celular es determinado por una cuatrupla $A = (S, d, N, f)$ donde
 S es un conjunto finito de estados
 d es un entero positivo que representa la dimensión
 $N \subset Z^d$ que es un conjunto de estados en un $t = 0$

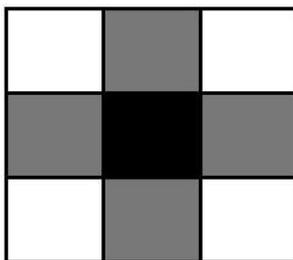


Figura 1: Vecindad de Von Neumann

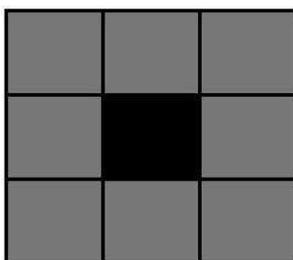


Figura 2: Vecindad de Moore

$f: S^N \rightarrow S$ es una función de transición local.

Por lo que la función global de transición se representada la siguiente manera: $G_f: S^L \rightarrow S^L$ está definida como $G_f(c)_v = f(c_{v+N})$.

4. Primeros pasos para jugar con los autómatas celulares

Antes de comenzar a jugar con los autómatas es adecuado mencionar como que se determinan las reglas dentro de los autómatas unidimensionales.

El número de estados de un autómata celular se llamará k , y el radio de la vecindad será denominado como r . De acuerdo a la notación de Wolfram, se especifica un autómata celular de estados k y radio r como (k, r) ; por ejemplo, para un autómata de $k = 2$ y un $r = 1$ se escribirá $(2, 1)$. Teniendo estos datos, podemos conocer que, el número de vecinos es de $2r$ por lo tanto la vecindad está conformada de $2r + 1$ células. Por ejemplo, para el caso de $(2, 1)$ el número de vecinos es de $2(1) = 2$ y la vecindad está conformada de $2(1) + 1 = 3$ células. El número de vecindades posibles que tiene un autómata es k^{2r+1} . Y finalmente el número de reglas está dado por $k^{k^{2r+1}}$. En nuestro ejemplo, tendría $2^{2(1)+1} = 8$ vecindades diferentes y $2^{2^{2(1)+1}} = 256$ reglas de evolución.

Para poder entender de mejor manera todo lo descrito, veamos un ejemplo práctico.

Nuestro autómata será de dimensión $d = 1$ y de $(2, 1)$, nuestra regla de evolución será la regla 30. Para poder determinar como serán las transiciones, se escribe el número en binario, en este caso sería 11110. Nuestra notación debe de tener k^{2r+1} bits, si hacen falta se rellena con ceros, por lo que el número queda 00011110, en una tabla se escriben las combinaciones de las vecindades posibles, en orden ascendente binario comenzando por el 0, terminando en $k^{2r+1} - 1$, y se acomodan los bits del menos significativo al más significativo, correspondiendo así el bit menos significativo a 0 binario y el más significativo a $k^{2r+1} - 1$ como se muestra en la tabla 1 a continuación:

Con esto, ya conocemos todo lo que necesitamos para determinar la evolución de un autómata.

Siguiendo con nuestro ejemplo de la regla 30, y con un estado inicial:

Tomaremos una célula central y sus respectivos vecinos, por ejemplo el primer 1 de nuestro estado inicial:

0	0	0	→	0
0	0	1	→	1
0	1	0	→	1
0	1	1	→	1
1	0	0	→	1
1	0	1	→	0
1	1	0	→	0
1	1	1	→	0

Tabla 1: Tabla de transición de estados

$$t = 0 \quad \longrightarrow \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0$$

$$t = 0 \quad \longrightarrow \quad 0 \quad 1 \quad 1$$

Esto lo comparamos con nuestra tabla de transiciones y encontramos el estado siguiente para la célula central

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad \longrightarrow \quad 1$$

Así el estado en el tiempo $t = t + 1$ será

$$t = 1 \quad \longrightarrow \quad ? \quad 1 \quad ?$$

Así se realiza con cada una de las células, por lo que nuestro espacio de evolución quedará de la siguiente forma en el tiempo $t = t + 1$.

$$t = 1 \quad \longrightarrow \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

Para nuestra siguiente evolución se tomara a $t = t + 1$ por lo tanto $t + 1 = (t + 1) + 1$ y siguiendo los mismos pasos de la primera evolución nuestro espacio queda de la siguiente forma:

$$t = 2 \quad \longrightarrow \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Y así se hará en cada evolución:

$$t = 3 \quad \longrightarrow \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$t = 4 \quad \longrightarrow \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0$$

5. Clasificación de los autómatas celulares

5.1. Clasificación de los autómatas lineales (Clasificación de Wolfram)

Wolfram sugiere una clasificación de los autómatas celulares por las características cualitativas de su evolución. Él observó que su comportamiento cae dentro de las siguientes cuatro clases [4]:

1. El comportamiento es simple y todas las condiciones iniciales llegarán a un estado homogéneo.
2. Existen muchos posibles estados finales, pero todos ellos pertenecen a un cierto conjunto de estructuras simples que o son los mismos siempre o se repiten en pocas iteraciones.
3. El comportamiento es más complicado, y se puede ver en varios aspectos aleatorios. A esta clase se dice que tiene comportamiento caótico.
4. Esta muestra períodos de ciclos caóticos.

Para los autómatas celulares unidimensionales, con 2 estados y con dos vecinos, existen en total de 256 reglas de evolución, dichas reglas, Wolfram las estudió y algunas de ellas según la clasificación descrita anteriormente quedaron de la siguiente manera:

- *Clase 1:* 0, 4, 16, 32, 36, 48, 54, 60, 62
- *Clase 2:* 8, 24, 40, 56, 58
- *Clase 3:* 2, 6, 10, 12, 14, 18, 22, 26, 28, 30, 34, 38, 42, 44, 46, 50
- *Clase 4:* 20, 52

6. Una especificación de los Sistemas Dinámicos: Autómatas Celulares

Como se ha visto hasta ahora los sistemas dinámicos pueden representar modelos de población a través de ecuaciones diferenciales sencillas, y los autómatas celulares pueden hacer lo mismo, un ejemplo de esto es el famoso y antes mencionado “Game of life”, que con tres simples reglas puede mostrar como una población evoluciona sobre tiempos discretos con una regla que rige la evolución, si se recuerda anteriormente hemos dado una definición de sistema dinámico que

puede cumplir con estas reglas, por lo que se puede pensar que los autómatas celulares tiene una relación con los sistemas dinámicos. Dicha relación existe dado que un autómata celular puede ser considerado una función continua en un espacio métrico compacto. También se puede ver en la teoría de autómatas celulares como una especificación de un sistema dinámico discreto.

El conjunto límite en un A.C., $\Gamma(G)$, sería la interacción de todos los estados siguientes:

$$\Gamma(G) = \bigcap_{i=0}^{\infty} G^i(S^Z) \quad (12)$$

Donde G es la función de transición global y S^Z es el conjunto finito de estados para un AC unidimensional, sin embargo esto se puede extender para n dimensiones. El conjunto límite $\Gamma(G)$ es el conjunto de todas las celdas con estado c tal que $c \in S^Z$ el cual tiene una secuencia infinita de pre-estados.

Un conjunto de estados Y tal que $Y \subseteq S^Z$ es invariante si y solo si $G(Y) = Y$; es decir, dados un conjunto de celdas con un estado dado por S^Z será invariante si después de aplicar la función de transición global $G(Y)$ el conjunto de estados sigue siendo Y .

Referencias

- [1] Clark Robinson, *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press (1995).
- [2] Lennart Carleson and Theodore W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer (1993).
- [3] Howard Gutowitz, *Cellular Automata, Theory and Experiment*, The MIT Press (1991).
- [4] Stephen Wolfram, *A New Kind of Science*, Wolfram Media Inc. (2002).
- [5] Andrew I. Adamatzky, *Identification of Cellular Automata*, Taylor & Francis (1994).
- [6] Robert M. May, *Simple mathematical models with very complicated dynamics* Nature vol. 261 Junio 10, (1976).