Fundamentos de sistemas dinámicos oscilatorios

Fernández Rosales Iván Yair
Instituto Politécnico Nacional
ifernandezr0500@ipn.mx

XIX Verano de la Investigación Científica
Departamento de Aplicación de Microcomputadoras
Instituto de Ciencias, Universidad Autónoma de Puebla

Agosto 2009

Resumen

Los sistemas dinámicos son conceptos matemáticos que describen un comportamiento generalmente físico con un sistema de ecuaciones diferenciales, y a su vez entregan información sobre los puntos singulares de tal sistema. La dinámica del comportamiento en los retratos de fase definen a los sistemas oscilatorios como una clasificación de sistemas dinámicos con características específicas, donde los osciladores no lineales como el oscilador de Van der Pol, se comporta como un oscilador auto-sostenible, es decir, presenta una tendencia a regular su dinámica sobre un ciclo intrínseco definido.

1. Introducción

Los oscilatores son sistemas dinámicos con un comportamiento particular pero muy común en las respuestas de los mecanismos físicos como el de un péndulo, las reacciones químicas como la reacción de Belousov-Zhabotingsky, casos biológicos como la propagación eléctrica en el tejido cardiaco descrito por Wiener y Rosenblueth, la resonancia del sonido, etc.
Antes de definir y usar el concepto de oscilador, es necesario plantear conceptos de los sistemas dinámicos que serán de utilidad para analizar a los sistemas oscilantes, a lo largo de la siguiente sección se partirá por dar una definición de sistemas dinámicos y consecutivamente se desarrollarán las herramientas e ideas necesarias para entender a los sistemas oscilatorios.

2. Sistemas Dinámicos

Un sistema dinámico es un conjunto de elementos que interactuan entre si, donde la evolución de sus estados es dada por funciones que dependen del tiempo t, tal que $t \in \mathbb{T}$.

Si $\mathbb{T}$ pertenece a todos los reales, el sistema dinámico se clasifica como continuo, por otro lado, si $\mathbb{T}$ pertenece al conjunto de números enteros, entonces el sistema dinámico se clasifica como discreto. Cuando se define que $\mathbb{T}$ pertenece a los subconjuntos positivos de los reales o los enteros, se dice que son semicontinuos o semidiscretos respectivamente, sin embargo esa es una distinción relativa al tiempo de referencia que se elija para el sistema. Es importante definir también que el incremento de la variable t, es como el flujo del tiempo, siempre positivo. Donde por lo tanto el estado presente del sistema dinámico depende del estado pasado, pero no viceversa.

El conjunto de estados presentes en el sistema, evoluciona a un conjunto de estados futuros, ésto define al sistema como dinámico y establece que el comportamiento depende de una razon de cambio de estados en un intervalo temporal, es decir, se rige por ecuaciones diferenciales en el caso continuo, y por ecuaciones iterativas en el caso discreto.

Al conjunto de todos los estados posibles que puede adquirir el sistema se le llama "espacio de estados" por ejemplo un péndulo idealizado puede ser totalmente descrito por su ángulo θ y su velocidad angular ω por lo que su espacio de estados será el conjunto de todos los posibles pares o puntos $[\theta, \omega]$ que el sistema adquiera como estados. Éstos puntos consecutivos, con respecto al tiempo, forman trayectorias que describen el comportamiento del sistema, cuando el espacio de estados es un conjunto infinito de puntos que describen una linea continua se le llama "espacio de fases" donde la trayectoria que describe es la representación del comportamiento de los sistemas dinámicos continuos.

Los espacios de fases adquieren su importancia principalmente para expresar como se comporta el sistema dinámico partiendo de un estado inicial x_0, a la trayectoria que inicia de un estado x_0 se dice que es la órbita de x_0 "$orb(x_0)$". Las órbitas se comportan de manera interesante alrededor de los puntos fijos del sistema. Aunque se clasifican analíticamente los puntos fijos conforme a como se comporta el sistema, esto puede visualizarse en el espacio de fases como la tendencia que toman las órbitas en sus puntos fijos. Si las orbitas tienen una tendencia de aproximarse al punto fijo, éste es entonces un "atractor" o un punto de estabilidad, por el contrario, si la tendencia es de alejarse entonces el punto fijo es un "repulsor" o punto de inestabilidad, por otro lado, si la órbita describe una trayectoria cerrada entonces es llamada "órbita periódica".

2.1. Dinámica por iteracción [1]

Para determinar el concepto de los sistemas dinámicos a través de la iteracción de funciones de una variable real es necesario conocer algunos conceptos esenciales que permitirán ver a la orbita de un punto como la iteracción sucesiva de la misma función: $x_n = f(x_{n-1})$ para $n \geq 0$.

Puntos críticos
Los puntos críticos son aquellos donde una función alcanza sus valores máximos y mínimos, un punto p es llamado punto crítico si siendo f una función diferenciable, $f'(p) = 0$. Hay dos tipos de puntos críticos, los no degenerativos y los degenerativos; cuando $f'(p) = 0$ y $f''(p) \neq 0$ entonces p no es un punto crítico degenerativo pero si $f'(p) = 0$ y $f''(p) = 0$, p es un punto crítico degenerativo. Por ejemplo si $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ y $F'_\mu(x) = \mu - 2\mu x$ donde $\mu \neq 0$, el punto crítico $x = \frac{1}{2}$ no es degenerativo ya que $F''_\mu(x) = -2\mu \neq 0$. Y para $f(x) = x^3$ el punto crítico $x = 0$ es degenerativo.

Teorema del valor intermedio
Tomando J como un intervalo y $f\colon J \to \mathbb{R}$ tal que $a, b \in J$, $a < b$ y z es un valor entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces hay al menos un valor $a < c < b$ tal que $f(c) = z$. Ésta propiedad indica que la función f alcanza todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$, que esencialmente significa que $f([a, b])$ es un intervalo conectado A este resultado se le llama *Teorema del valor intermedio* o *Teorema de Darboux*. Si se considera x como $a < x < b$ y $f(a) < f(x) < f(b)$ entonces el conjunto comprendido por $x \in U$, es un conjunto abierto.

Teorema del valor medio
Asumiendo J nuevamente como un intervalo y $f\colon J \to \mathbb{R}$ como una función continua. Donde también $a, b \in J$, $a < b$ y f es diferenciable en el intervalo (a, b). Por lo tanto existe un valor $a < c < b$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{1}$$

A esto se le llama *Teorema de Lagrange* e indica que la pendiente de la tangente en el punto c es igual a la pendiente de la linea secante de los puntos $(a, f(a))$ $(b, f(b))$.

Regla de la cadena
La regla de la cadena consiste en la derivación de funciones compuestas. Si se tiene $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que son dos funciones expresadas como $f \circ g(x)$, en donde si para la composición de f y g ambas son diferenciables, entonces

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{2}$$

Tomando un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, queremos encontrar $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1)$ y $x_n = f(x_{n-1})$. Asi que $x_n = f \circ ... \circ f(x_0)$ donde sustituimos las composiciones, para poner x_n en terminos de $f(x_0)$. Por inducción podemos llegar a la siguiente expresión

$$f^n(x) = f \circ f^{n-1}(x) \tag{3}$$
$$\text{para} \quad n \geq 1.$$

Para varias iteraciones la regla de la cadena a la composición de una función f consigo misma n veces se escribe como

$$(f^n)'(x_0) = f'(x_{n-1})...f'(x_0) \tag{4}$$

Donde $x_j = f^j(x_0)$. Si f es invertible a f^{-1} entonces $f^{-2}(x) = (f^{-1})^2(x)$, y $f^{-n}(x) = (f^{-1})^n(x)$ para $n > 0$ en donde $f^0(x) = x$. Usando la regla de la cadena, puede ser demostrado que la derivada del inverso es el reciproco de la derivada de la función,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x_{-1})} \tag{5}$$

donde $x_{-1} = f^{-1}(x)$.

Terminología sobre el tipo de funciones
La terminología se define para las funciones según la extensión de su diferenciabilidad. Suponiendo que J es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$ (posiblemente todo $\mathbb{R}$), y $f\colon J \to \mathbb{R}$ una función. Si f es continua se dice que f es C^0. Si f es diferenciable en cada uno de los puntos de J, y f y f' son continuos, entonces se dice que f es una *función continuamente diferenciable* o *funcion* C^1. Dado $r \geq 1$, si f junto con $f^{(j)}$ son funciones continuas para $1 \geq j \geq r$, entonces f es una *función continuamente diferenciable r veces* o una *función* C^r.

2.2. Puntos periódicos [1]

Asumimos que se tiene una función continua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde también f es C^2. Un punto a es un *punto periódico* de periodo n cuando $f^n(a) = a$ y $f^j(a) \neq a$ para $0 < j < n$. Si a tiene periodo uno ($n = 1$) entonces éste es llamado *punto fijo*. La notación para describir los puntos periódicos es $Per(n, f) = \{x \colon f^n(x) = x\}$ por lo tanto un punto fijo es $Fix(f) = \{x \colon f(x) = x\} = Per(1, f)$.

A las órbitas que describen las iteraciones que generan puntos periódicos se les llama *órbitas periódicas*, ellas adquieren una gran importancia ya que son precisamente éstas las que muestran el comportamiento de los osciladores armónicos simples, las órbitas se definen de la siguiente manera. Para una función continua f, la *órbita progresiva* (forward orbit) del punto a es el conjunto $\mathcal{O}^+(a) = \{f^k(a) \colon k \geq 0\}$. Por otro lado si f es invertible entonces su *órbita regresiva* (backward orbit) es dada usando las iteraciones negativas: $\mathcal{O}^-(a) = \{f^k(a) \colon k \leq 0\}$. La órbita completa de un punto a es el conjunto $\mathcal{O}(a) = \{f^k(a) \colon -\infty \leq k \leq \infty\}$.En el caso que f no sea invertible se puede hallar f^{-1} como el mapeo $f^{-1}(y) = \{x \colon f(x) = y\}$.

Una forma para definir la convergencia a la estabilidad o inestabilidad de los puntos periódicos es apartir de los conjuntos estable e inestable. Un punto q es *asintótico progresivo* al punto p cuando

$$\lim_{j\to\infty} |f^j(q) - f^j(p)| = 0 \tag{6}$$

$$\lim_{j\to\infty} |f^{nj}(q) - p| = 0 \tag{7}$$

Donde para la ecuación 7 el punto p es un punto periódico de periodo n. Por lo tanto un *conjunto estable* se define como el conjunto de los puntos q que cumplan con (6) y en un caso interesante que cumplan con (7).

$$W^s(p) = \{q \colon q \text{ es asintotico progresivo a } p\} \tag{8}$$

Si f es invertible entonces se dice que un punto q es *asintótico regresivo* a p si se comprueba que es asintótico al evaluar f^{-1} consecutivamente, es decir,

$$\lim_{j\to-\infty} |f^j(q) - f^j(p)| = 0 \tag{9}$$

y en el caso de f no ser invertible

$$\lim_{j\to\infty} |q_{-j} - p_{-j}| = 0 \tag{10}$$

El significado de esto es tener una estabilidad mientras hay un retroceso en el tiempo o por lo tanto una equivalencia a inestabilidad mientras transcurre el flujo convencional del tiempo, así se define el *conjunto inestable* como el conjunto de los puntos q que cumplan con (9) o con (10).

$$W^u(p) = \{q \colon q \text{ es asintotico regresivo a } p\} \tag{11}$$

Un punto p es *Liapunov estable* (L-estable) si dado cualquier $\epsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que si $|x - p| < \delta$ entonces $|f^j(x) - f^j(p)| < \epsilon$ para todo $j \geq 0$. Esto dice que para x suficientemente cerca a p, la órbita de x es cercana a la órbita de p Un punto p se *asintoticamente estable* si es L-estable y si su $W^s(p)$ contiene una vecindad de p. En donde si p es también un punto periódico entonces se le llama *punto atractor periódico* o *sumidero periódico*. Si p siendo un punto periódico tiene un conjunto $W^u(p)$, entonces se le llama *punto repulsor periódico* o *fuente periódica*.

2.3. Clasificación de puntos fijos [2]

Como es mencionado en la sección 2.2 un punto fijo es un punto periódico de periodo uno y por lo tanto al igual como a los puntos periódicos se analizan y clasifican según el comportamiento de colecciones de órbitas a sus alrededores. Así que ésta clasificación, como será mencionado, será igualmente valida para puntos fijos y generalmente para puntos periódicos haciendo las consideraciones analíticas pertinentes.

Asumiendo tener una función C^1 $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si p es un punto fijo tal que $|f'(p)| < 1$, entonces p is un *punto fijo atractor* (o asintóticamente estable o un sumidero) esto es que $W^s(p)$ contiene una vecindad de p. Para generalizar éste concepto consideramos al punto p como un punto periódico de periodo n en donde con $|(f^n)'(p)| < 1$, significa que p es un *punto periódico atractor*. Por la regla de la cadena (4) se puede calcular

$$|(f^n)'(p)| = |f'(p_{n-1})|...|f'(p_1)||f'(p_0)|. \tag{12}$$

Al igual como se definió el punto atractor, se pueden hacer 2 clasificaciones más las cuales dependen también de los intervalos en los que se encuentra la primera derivada de la función evaluada en el punto tanto los puntos fijos como los periódicos se clasifican de la siguiente manera, la cual se trata a más a detalle en [2]:

- *Atractor:* Cuando $|(f^n)'(p)| < 1$;
  Si $|(f^n)'(p)| = 0$ es un *superatractor*.
- *Repulsor:* Siempre que $|(f^n)'(p)| > 1$.
- *Neutro:* Con $|(f^n)'(p)| = 1$.

2.4. Retrato de fase y puntos singulares [3]

Los sistemas dinámicos para su estudio, se pueden representar como una construcción del modelo dinámico correspondiente, es decir, un sistema de ecuaciones. La forma general para tal modelo matemático es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{13}$$

Donde x_j son las variables características del sistema, n corresponde al orden de la ecuación diferencial general y f_j son las funciones no lineales en el caso general. Físicamente uno de los sistemas dinámicos más comunes son los oscilantes. La ecuación diferencial representativa es

$$a(x)\ddot{x} + b(x)\dot{x} + c(x)x = g(t) \tag{14}$$

la ecuación 14 esta muy generalizada como para un análisis, por lo que se facilitará este termino como una ecuación lineal de segundo orden del tipo

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = g(t) \tag{15}$$

Con $g(t) = 0$ y $a = 1$ para simplificarla, se puede llegar a un sistema de ecuaciones del tipo (13), introduciendo una segunda variable y, entonces se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -by - cx \end{aligned} \tag{16}$$

Ambas ecuaciones son lineales y provienen de (13) por lo tanto comparten la solución $x = C_1e^{m_1t} + C_2e^{m_2t}$ donde m_1 y m_2 son las raíces de la expresión cuadrática $m^2 + bm + c = 0$. Para $b^2 > 4c$ las raíces son reales y por lo tanto el sistema tiene un carácter amortiguador aperiódico[1] y para $b^2 < 4c$ las raíces son complejas por lo que el sistema tiene un comportamiento oscilaciones amortiguadas.

2.4.1. Retrato fásico

El *retrato fásico* o *retrato de fase* es el conjunto de todas las órbitas posibles de un sistema dinámico en un espacio de fase o llamado *plano de fase* para el caso de ser solo dos variables. Aunque el retrato se define como un número infinito de órbitas, esto no resulta práctico por lo que simplemente se trazan las órbitas completas que sean representativas al comportamiento del sistema.

En el plano fásico el punto se mueve sobre la trayectoria de fase y con una velocidad de fase. Donde para obtener la *trayectoria de fase* para (15) se divide la segunda entre la primera ecuación de (16) y entonces por regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{by + cx}{y} \tag{17}$$

Esta ecuación describe *curvas integrales* (órbitas completas) en cada uno de sus puntos donde la pendiente de su tangente es $\frac{dy}{dx}$. Para determinar mas caracteristicas así como facilitar su procesamiento, se puede determinar la solución de (17), como la parametrización $Z(x, y)$ de las soluciones de (16) $Z(x, y) = \langle x(t), y(t)\rangle$, con

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1e^{m_1t} + C_2e^{m_2t} \\ \dot{x}(t) = y(t) &= C_1m_1e^{m_1t} + C_2m_2e^{m_2t} \end{aligned} \tag{18}$$

o bien cuando $b^2 < 4c$ (raíces complejas), como

$$y^2 + bxy + cx^2 = C\ exp\left(\frac{b}{\sqrt{c}} \tan^{-1} \frac{2y + bx}{2x\sqrt{c}}\right). \tag{19}$$

Ésta solución, con C dependiente a las condiciones iniciales, forma parte de la familia de espirales logarítmicas con formula canónica $\phi = e^{a\theta}$, donde se expresa en coordenadas polares.

Graficando las ecuaciones 18 se puede apreciar el comportamiento de todas las órbitas en el plano de fase para cualquier punto inicial $(x(0), y(0))$, donde se pueden observar algunos ejemplos en todas los gráficos de la sección 2.4.2. El espacio vectorial correspondiente al sistema se le llama *velocidad de fase*, este espacio vectorial directamente se determina como el conjunto de vectores que cumplen con $\vec{v} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath}$.

2.4.2. Puntos singulares

Los puntos singulares son puntos fijos que se definen por el comportamiento que adquiere las curvas en el retrato fásico, por lo que hay distintos puntos singulares. En un oscilador armónico sin rozamiento todas las curvas fásicas son cerradas con forma de elipse, ellas rodean un punto singular llamado *centro*, para las oscilaciones amortiguadas un punto singular llamado *foco* es el punto asintótico de todas las curvas, durante la amortiguación aperiódica todas las curvas convergen a un punto singular llamada *nodo* y por último cuando las curvas trazan hipérbolas asintóticas a dos líneas, la intersección de estas líneas definen un punto singular nombrado como *silla*.

Continuando con el análisis de los puntos singulares, se pueden definir resolviendo un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1x + a_2y + X(x, y) \\ \dot{y} &= b_1x + b_2y + Y(x, y) \end{aligned}$$

donde X y Y son polinomios de grado superior con relación a x o y, para linealizar se hace la consideración que $X(0, 0) = 0$ y $Y(0, 0) = 0$ también que $\dot{x} >> X$ y $\dot{y} >> Y$ entorno muy cercano al origen. Por lo tanto tenemos la aproximación lineal como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1x + a_2y \\ \dot{y} &= b_1x + b_2y. \end{aligned} \tag{20}$$

[1] Éste concepto de periodicidad es diferente al de puntos fijos periódicos, *véase sección 3*

Usando el mismo método con el que se obtuvo la ecuación de la curva integral (17) resulta la curva integral de (20) como la expresión

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_1 x + b_2 y}{a_1 x + a_2 y}.$$

Si se pone en forma matricial el sistema de ecuaciones (20) tenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{21}$$

Esto tiene la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Para hallar la solución a este sistema se tienen que obtener las raíces del determinante $det(\lambda I - \mathbf{A}) = \mathbf{0}$, donde por ser $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de 2x2 entonces hay dos raíces λ_1, λ_2 y un sistema de soluciones de la forma siguiente:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix} e^{\left[\begin{smallmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{smallmatrix}\right] t}$$

o bien, se puede expresar también como la ecuación 22, donde λ hace referencia a los eigenvalores de la matriz $\mathbf{A}$ y $\mathbf{v}$ son los eigenvectores de la misma matriz, entonces siendo la ecuación 22 es la solución general para el sistema de ecuaciones de dos variables.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} C_1 \mathbf{v_1} & C_2 \mathbf{v_2} \end{bmatrix} e^{\left[\begin{smallmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{smallmatrix}\right] t} \tag{22}$$

Los valores C_1 y C_2 se determinan por las condiciones iniciales, $x(0)$, $y(0)$, $\dot{x}(0)$ y $\dot{y}(0)$. Considerando como ejemplo (21) para el caso especifico de un oscilador con amortiguamiento sería $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $b_1 = -\omega^2$ y $b_2 = -2\alpha$.
La clasificación general de Poincaré para puntos singulares, se basa en el comportamiento de las curvas integrales en los contornos más próximos a estos puntos, donde los comportamientos pueden ser descritos por la naturaleza del discriminante D de la matriz $\mathbf{A}$ en la ecuación 21 llamada también *ecuación caracteristica*.

Si $D = (a_1 - b_2)^2 - 4a_2 b_1 \geq 0$ entonces ambas raíces α_1 y α_2 son reales y si con esto $det(\mathbf{A}) > \mathbf{0}$ entonces sus signos son iguales. Se tiene entonces:

- $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. La solución tiene la forma de exponente decreciente, es decir el sistema tiende asintóticamente a un punto singular que por esto es llamado *nodo estable*.
- $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. El sistema se aleja exponencialmnte del punto singular por lo que es un *nodo inestable*.
- Si $D \geq 0$ y $|\mathbf{A}| < \mathbf{0}$ entonces λ_1, λ_2 tienen signos diferentes por lo que el punto singular es inestable y se le denomina *silla*. Cruzando por él pasan dos curvas integrales llamadas *separatrices*, las restantes trayectorias se alejan y separan de la silla en forma de hipérbola.
- Si $D > 0$ y $|\mathbf{A}| = \mathbf{0}$ entonces $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = a_1 + b_2$. Para (21) se obtiene una recta que corresponde a los estados estacionarios donde la dirección de movimiento se da por λ_2.

Si $D < 0$ entonces λ_1, λ_2 son complejos conjugados. Entonces se define:

- Si $a_1 + b_2 < 0$ entonces la partes real de los eigenvalores son negativas y por lo tanto ocurren oscilaciones en el sistema en espirales que convergen a un *foco estable*.
- Si $a_1 + b_2 > 0$ entonces la parte real de los eigenvalores es positivo y por lo tanto ocurren oscilaciones que se alejan como espirales del punto *foco inestable*.
- Las raíces o eigen valores son imaginarios, es decir, $a_1 + b_2 = 0$ por lo que el sistema ocurre en oscilaciones sin amortiguamiento y por lo tanto describe trayectorias en forma de elipse alrededor de un punto singular llamado *centro*.

Los gráficos a cerca de los retratos de fase donde se muestren los comportamientos de los sistemas a causa de cada uno de estos puntos singulares se muestran en el apéndice A.

3. Sistemas Oscilatorios

Los sistemas oscilatorios o simplemente *osciladores* se pueden definir como un sistema dinámico con un comportamiento descrito por una ecuacion diferencial de orden n, tal que tiene una solución

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} C_1 \mathbf{v_1} & C_2 \mathbf{v_2} & \ldots & C_n \mathbf{v_3} \end{bmatrix} e^{\lambda' \mathbf{t}} \tag{23}$$
$$\text{con } \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

donde λ_1, λ_2,...λ_n son números complejos. En el caso de un oscilador linear de segundo orden

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = g(t), \tag{24}$$

la solución es de la forma (22). Los osciladores se pueden clasificar a su vez en osciladores periódicos y no periódicos, concepto que es diferente al de puntos periódicos de la sección 2.2.

Se define una función periódica como aquella que siendo $f \colon X \to Y$, tiene una contra-imagen que cumple con ser de la forma $X = \{[a, b) \cup [a+T, b+T) \cdots \cup [a+jT, b+jT) \ldots\}$, con $T = b-a$ y donde cada subconjunto $X_j = [a+jT, b+jT)$ mapea a la misma imagen Y, es decir, $f \colon X_j \to Y$ para $j \in \mathbb{Z}$. Otra manera de escribir lo mismo es dado $Y = f(X_j)$ y $Y = f(X_j + T)$, asi que $f(X_j) = f(X_j + T)$ o simplemente evaluado en un punto $x \in X$ como $f(x) = f(x + T)$.

Asumiendo que en la solución de (24) hay una $\lambda = -\alpha + i\beta$ que genera una función no periódica $g(t) = e^{-\alpha t}$ y una función periódica $f(t) = e^{i\beta t}$, entonces

$$\begin{aligned} \text{si} \quad x(t) &= g(t)f(t) \\ x(t) &= x(t+T) \end{aligned} \tag{25}$$

Los osciladores no periodicos pueden provenir de *osciladores no lineales* como $\ddot{x} + b\dot{x} + c\sin x$ y también de *osciladores lineales* como los comportados por un movimiento armónico complejo el cual puede ser analizado como una serie de Fourier o como la superposición de osciladores armónicos simples.

3.1. Osciladores Lineales [4]

Los osciladores lineales tal como menciona su nombre son aquellos que llevan un comportamiento dado por la ecuación diferencial lineal de segundo orden (24) donde según el valor de a, b, c y $g(t)$ se clasifican por el comportamiento que describen, a los osciladores lineales se les llama también *osciladores armónicos* por que su solución se expresa como funciones senocosoidales, lo cual siendo $a, b, c \in \mathbb{R}$, la frecuencia es una constante y por lo tanto los osciladores armónicos son siempre periódicos (25).

Armónico Simple

El *oscilador armónico simple* se da cuando $a > 0$, $b = 0$, $c > 0$ y $g(t) = 0$, es decir,

$$a\ddot{x} + cx = 0 \tag{26}$$

el comportamiento descrito por esta ecuación diferencial se trata de una oscilación libre de amortigumiento, es decir el sistema nunca disipa energía, simplemente ésta se transforma continuamente a energía potencial o cinética. El oscilador armónico simple es el caso utópico de osciladores ya que en la realidad todos presentan perdidas de energía y por lo tanto un efecto amortiguado.

Haciendo la consideración de que $x(0) = A$ (Amplitud) y que $\frac{c}{a} = \omega^2$ entonces la solución a la ecuación 26 es $x(t) = A\cos\omega t$ y su comportamiento mientras transcurre el tiempo se muestra en la figura 1.

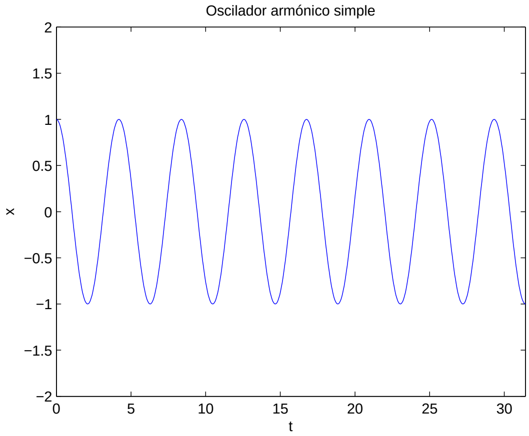

Fig. 1. Respuesta en el tiempo de un oscilador armónico simple con $A = 1$ y $\omega = 1{,}5$. [a]

[a] Todas las imágenes en este reporte fueron generadas en el programa MATLAB 2007a.

Retomando los conceptos mencionados en la sección 2.2, la órbita del oscilador armónico simple puede ser parametrizada en un plano de fase por dos variables $x(t)$ y el equivalente a su velocidad angular $\dot{x}(t)$.

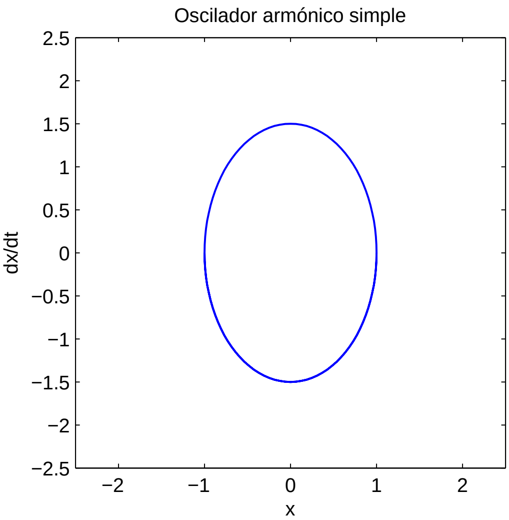

Fig. 2. Plano de fase de un oscilador armónico simple con $A = 1$ y $\omega = 1{,}5$. El tiempo queda implicito como el sentido horario de la órbita girando sobre un punto singular *centro*.

La órbita de este oscilador es una órbita periódica ya que el conjunto de puntos que la forman, siempre trazan sobre una misma linea mostrada como una elipse donde la magnitud del eje vertical es proporcional a ω y la del eje horizontal lo es con la amplitud A (*véase figura 2*).

Armónico Amortiguado

El *oscilador armónico amotiguado* es el caso generalizado de los osciladores armónicos libres ya que su comportamiento contempla la disipación de energía pero no la intervención de fuerzas externas. Su comportamiento está dado por (24) tal que $a > 0$, $b \neq 0$, $c > 0$ y $g(t) = 0$. Considerando que $\frac{b}{a} = 2\alpha$ y $\frac{c}{a} = \omega^2$ entonces

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Tal que $x(0) = A$ la solución queda como la siguiente expresión:

$$w' = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$$
$$x(t) = Ae^{-\alpha t}\cos w't \tag{27}$$

Observese que la respuesta del sistema en el tiempo es una señal cosenosoidal en una envolvente exponencial con una caida negativa de α, el oscilador se comportará como amortiguado siempre que $\alpha > 0$, cuando $\alpha = 0$ la ecuación diferencial se reduce al caso de un oscilador armónico simple, por otro lado, si $\alpha < 0$ entonces el sistema se comporta de una manera inestable.

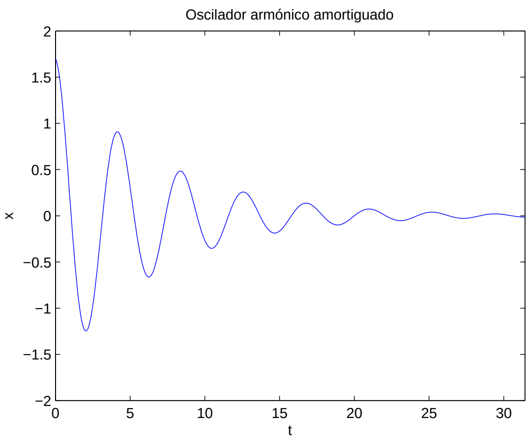

Fig. 3. Respuesta en el tiempo de un oscilador armónico amortiguado con $A = 1{,}7$, $\omega = 1{,}5$ y $\alpha = 0{,}15$

La órbita del oscilador amortiguado puede observarse como una espiral que reduce su radio mientras el tiempo transcurre, haciendo tender al sistema a una estabilidad focal cuando $t \to \infty$ entonces $x \to 0$, para el plano de fase con variables x y $\dot{x}$ la dirección de la orbita siempre es en sentido horario, puede observarse en la órbita (*véase figura 4*) que progresivamente tanto la amplitud $|x|$ como un proporcional de la velocidad angular del oscilador $|\dot{x}|$, se reducen asintoticamente al punto $(x = 0, \dot{x} = 0)$.

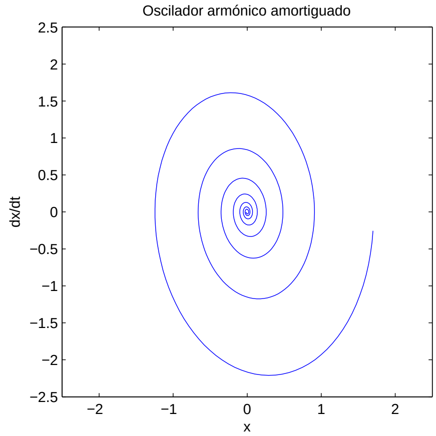

Fig. 4. Plano de fase de un oscilador armónico amortiguado con $A = 1{,}7$, $\omega = 1{,}5$ y $\alpha = 0{,}15$. La propagación de la órbita aproxima el estado del oscilador a la estabilidad focal.

Como ya se mencionó cuando $\alpha < 0$ el oscilador se comporta con una órbita asintóticamente inestable, si se compara la órbita de la figura 4 con la órbita de la figura 5 se puede deducir que éstas difieren en el sentido de giro, i.e. que mientras ambas siguen la trayectoria según un sentido horario, una de ellas (*figura 4*) cumple con el comportamiento de la ecuación 6 y por lo tanto la órbita es un *conjunto estable* y la otra órbita (*figura 5*) es un *conjunto inestable* por comportarse como la ecuación 9.

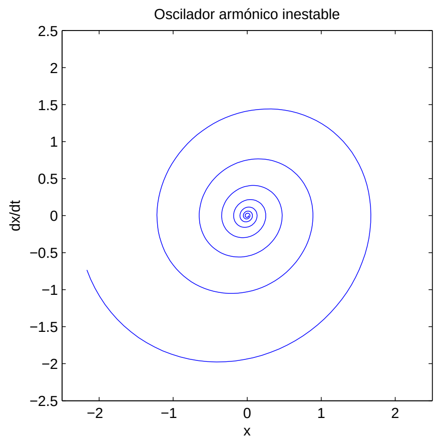

Fig. 5. Plano de fase de un oscilador armónico inestable con $A = 0{,}05$, $\omega = 1{,}5$ y $\alpha = -0{,}15$.

Armónico Forzado

Un *oscilador armónico forzado* es la generalización de los osciladores armónicos, su comportamiento se rige por la ecuación 24 con $a > 0$, $b \neq 0$, $c > 0$ y $g(t) = F\cos w_e t$ (una función dependiente de t), es el caso de (24) no homogénea, la ecuación expresará el comportamiento de un oscilador armónico amortiguado, el significado físico de un oscilador armónico forzado se puede ejemplificar como el sistema formado por un niño en un columpio, cuando el niño a una frecuencia w_e se balancea, aplica una fuerza que mantiene al columpio en un movimiento oscilatorio, cuando esta fuerza se deja de aplicar el columpio se comporta como un oscilador amortiguado. Éste comportamiento de oscilación se da por la siguiente ecuación diferencial y su solución:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x &= F\cos w_e t \\ x(t) &= \frac{F}{G}\sin(w_e t - \delta) \\ G &= \sqrt{(w_e^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha w_e)^2} \\ \delta &= \cos^{-1}\frac{2\alpha w_e}{G} \end{aligned} \tag{28}$$

La característica interesante en los osciladores forzados es un fenómeno que se da por la combinación de la frecuencia intrínseca con la frecuencia externa, el caso más simplificado es cuando no hay amortiguamiento, donde el valor de G depende de la diferencia de los cuadrados de ambas frecuencias, véase que con $w_e \to \omega$, $G \to 0$ y por lo tanto $\frac{F}{G} \to \infty$ esto por que el oscilador recibe energía externa y nunca la disipa tendiendo el sistema a la inestabilidad, a éste fenómeno se le llama *resonancia*.

El efecto de la resonancia radica en aumentar la amplitud de las oscilaciones, en la realidad los sistemas son amortiguados asi que siempre existe un límite de amplitud dependiende de su factor de amortiguamento α, en la figura 6 se muestran 7 curvas con diferentes valores siendo $\alpha = 0$ la curva con tendencia a infinito. Observese que los máximos están cercanos a $\frac{w_e}{\omega} = 1$.

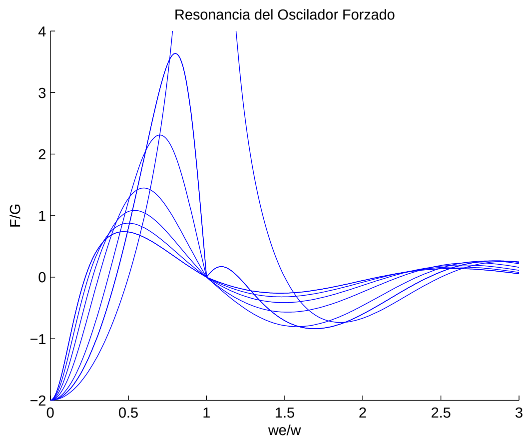

Fig. 6. Curvas de resonancia de un oscilador armónico forzado con valores de $\alpha = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

[2] Para revisar más acerca de, consultar el capítulo 5,5 de [1]

3.2. Osciladores no-Lineales

Los *sistemas oscilatorios no-lineales* se rigen precisamente por ecuaciones diferenciales no-lineales, esto es, ecuaciones que no cumplen con la forma $a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t)$ tal que sus eigenvalores son complejos (3). Los osciladores no-lineales pueden presentar comportamientos muy diferentes a los osciladores armónicos y que no existen físicamente pero también comportamientos que si lo esten como e.g. los impulsos en un electrocardiograma. Especificamente no hay una forma canónica de representar a los osciladores no-lineales sin que esta ecuación sea tan generalizada como para no tener caracteristicas interesantes. Por éste motivo se delimitará a tratar el caso de oscilador no-lineal de la forma

$$\ddot{x} + g(x)\dot{x} + cx = 0 \tag{29}$$

ya que tiene un comportamiento no-lineal de oscilador autosostenido, éste tipo de oscilador se explicará con más detalle posteriormente, pero para ello se tiene que poner la ecuación 29 en una forma que facilite el cálculo. Asi que podemos expresar el comportamiento de éste oscilador no-lineal como un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden y dos variables

$$\dot{x} = y - f(x) \tag{30}$$

$$\dot{y} = -cx \tag{31}$$

A estas expresiones se le conocen como *ecuaciones de Lienard*. Si derivamos la ecuación 30 se obtiene $\ddot{x} = \dot{y} - f'(x)\dot{x}$ que al sustituir (31) resulta $\ddot{x} + f'(x)\dot{x} + cx = 0$, de aqui si se asume $f'(x) = g(x)$ entonces las ecuaciones de Lienard son equivalentes a la ecuación 29.

Un sistema de ecuaciones tiene propiedades que no se presentan por el comportamiento que describen los elementos individualmente, es por ello que es util expresar las ecuaciones de Lienard como matrices que devuelvan propiedades importantes del sistema de ecuaciones y por lo tanto del sistema oscilatorio. Entonces el sistema de ecuaciones se puede expresar como la siguiente ecuación matricial.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - f(x) \\ -cx \end{bmatrix} \tag{32}$$

3.2.1. Puntos fijos para sistema no-lineales

Para los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, la estabilidad asintótica is determinada por la parte real de los eigenvalores. Para un punto fijo de un sistema no lineal, la parte real de los eigenvalores de la derivada también determinar la estabilidad, pero considerando que en la cercanía del punto fijo el sistema se comporta linealmente, esto haciendo una discriminación de las componentes no lineales del flujo del sistema[2].

Asumiendo un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales del tipo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$. El punto $\mathbf{p}$ es un punto fijo si $f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$, para linealizar el flujo del sistema cerca de $\mathbf{p}$, tenemos a Df_p como la matriz de las derivadas parciales de f, evualada en p. Entonces la *ecuación diferencial linealizada* esta dada por $\dot{x} = Df_p(\mathbf{x} - \mathbf{p})$.

Se le llama al punto fijo p *hiperbólico* si $Re(\lambda) \neq 0$ para todos los eigenvalores λ de la matriz Df_p. Hay muchos casos de especiales de puntos fijos.

- Un punto fijo hiperbólico es llamado *sumidero* o *atractor* siendo que todas $Re(\lambda) < 0$.

- Un punto fijo hiperbólico es llamado *fuente* o *repulsor* siendo que toda $Re(\lambda) > 0$.

- Un punto fijo hiperbólico es un punto *silla* si la parte real de los eigenvalores conjugados cumplen con $Re(\lambda_+) > 0$ y $Re(\lambda_-) < 0$.

Un punto fijo *no hiperbólico* se dice que es un*centro*, es decir, el sistema es una familia de órbitas rodeando el centro ocurriendo como un pendulo sin amortiguamiento.

3.2.2. Oscilador de Van der Pol

El *oscilador de Van der Pol* es un oscilador característico de los sistemas oscilatorios no lineales, ya que éste presenta un comportamiento auto-sostenible, es decir, un comportamiento que lo lleva a siempre a una *órbita periódica atractora*, esto es importante ya que los osciladores biológicos como el marcapasos cardiaco (Nodo sinoatrial) que genera por si solo una oscilación, que se dice autosostenida por que al aplicarle ruido o condiciones iniciales fuera de la órbita periódica, el sistema se dirige a ésta por ser estable.

El sistema de ecuaciones ligado a este oscilador esta dado por las ecuaciones de Lienard y se puede notar en forma matricial como en (32) donde la matriz cárácteristica tiene como solución un punto trivial en (0,0), donde por lo tanto no es posible obtener la solución analítica al sistema, pero se puede probar que este punto, es un punto singular rodeado por órbitas periódicas. La comprobación de la existencia de órbitas periódicas estables en el oscilador de Van der Pol se puede consultar en el capítulo 5,8,2 de [1].

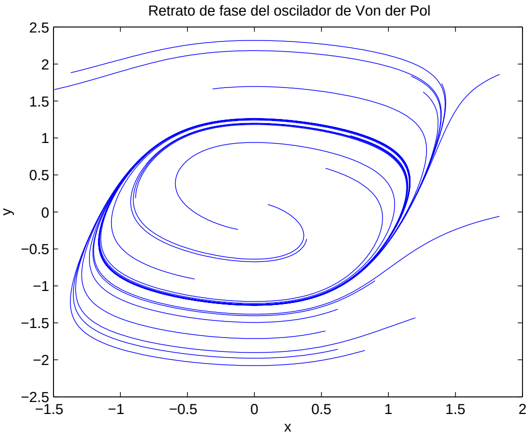

Fig. 7. Retrato de fase de un oscilador de Van der Pol, implementado el *método de Runge-Kutta* de cuarto orden para obtener sus respuesta parametrizada de las funciones iterativas de cada variable.

4. Conclusiones

Los sistemas oscilatorios poseen características muy particulares que los definen desde dinámicas simples y regulares como los osciladores armónicos, hasta dinámicas complejas que pueden beneficiar incluso al sistema, esto aparentemente como un mecanismo de regulación observado en los osciladores no lineales auto-sostenibles; estos mecanismos de regulación son una tendencia a órbitas periódicas estables o ciclos funcionales que pueden significar para la biología, el comportamiento de un sistema para mantenerse en homeostasis. Para trabajo posterior se buscará estudiar más a los sistemas oscilatorios auto-sostenibles y encontrar tal vez una variación del modelo Van der Pol para el caso de mecanismos de regulación y funcionamiento biológico.

Referencias

[1] Robinson, Clark. *Dynamical Systems. Stability, Symbolic Dynamics and Chaos* (CRC Press, 1994)

[2] Carleson, L. Gamelin, T. W. *Complex Dynamics*(Springer, LA, 1993)

[3] Volkenshtein, M. V. *Biofísica* (Ed. Mir, Moscú, 1985)

[4] Resnick, R. Halliday, D. *Física (parte I)* (Ed. Continental, 1977)

[5] Quintero, Ocampo, Millán, Aragón y Naumis. *Oscilaciones, armonía y simpatía* (Revista Mexicana de Física E 53 (1) 67-81, Junio 2007)

[6] Burden, R. L. Faires, J. D. *Análisis numérico* (International Thomson Editores, 1998)

[7] Basurto F., R. León H., P. A. *Introducción a los Sistemas Dinámicos y Autómatas Celulares* (Escuela Superio de Cómputo, IPN, 2008)

[8] Cárdenas, H. Lluis, E. Raggi, F. Tomás, F. *Álgebra Superior* (Ed. Trillas, 1976)

A. Apéndice de gráficos para puntos singulares

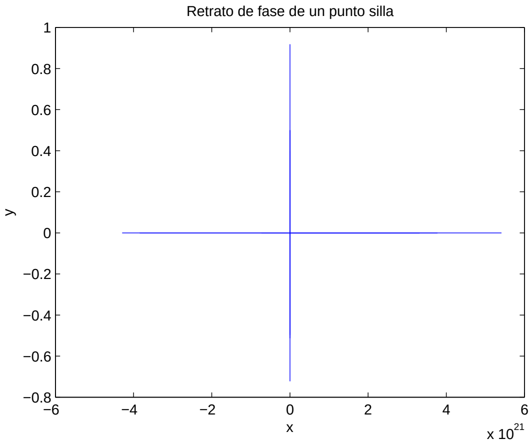

Fig. A. Retrato de fase de un punto singular *silla*.

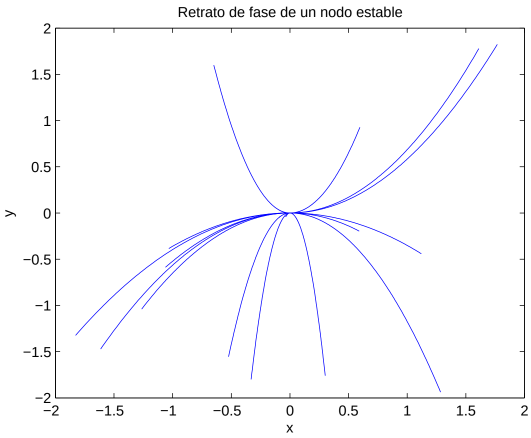

Fig. B. Retrato de fase de un punto singular *nodo estable*.

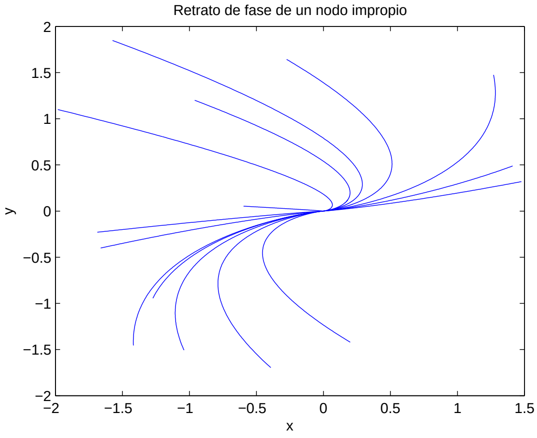

Fig. C. Retrato de fase de un punto singular *nodo estable impropio*.

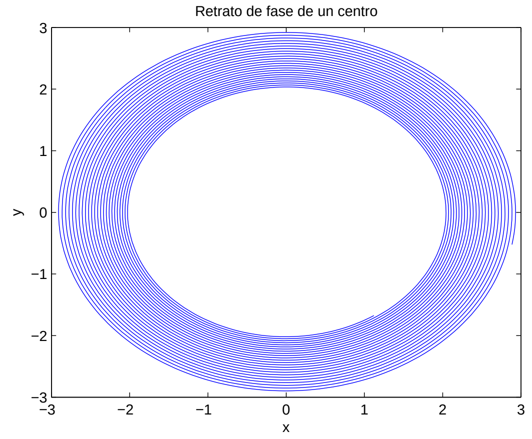

Fig. D. Retrato de fase de un punto singular *centro*.

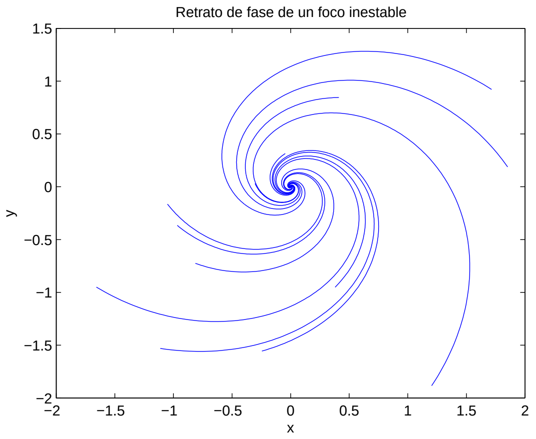

Fig. E. Retrato de fase de un punto singular *foco inestable*.

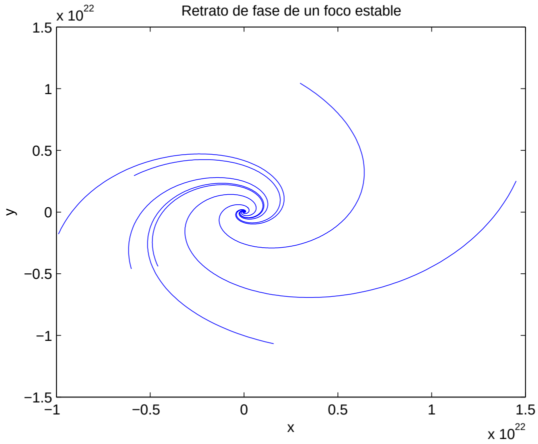

Fig. F. Retrato de fase de un punto singular *foco estable*.