

Modelos matemáticos simples con dinámicas complicadas

Robert M. May *

1976

Las ecuaciones diferenciales surgen en muchos contextos de la biología, economía y ciencias sociales. Tales ecuaciones, aunque simples y deterministas, pueden mostrar un arreglo sorprendente de comportamiento dinámico a partir de puntos estables a una bifurcación jerárquica de ciclos estables, aparentemente de fluctuaciones aleatorias. Hay consecuentemente muchos problemas fascinantes, algunos concernientes con aspectos matemáticos delicados de estructuras finas de las trayectorias, y algunas concernientes con la práctica de implicaciones y aplicaciones.

1. Introducción

Hay muchas situaciones en muchas disciplinas, las cuales pueden ser descritas al menos por una primera aproximación de una simple ecuación diferencial de primer orden. Estudios de las propiedades dinámicas de modelos de cuyos modelos usualmente consisten en encontrar las soluciones de equilibrio y después la realizar un análisis lineal que determina su estabilidad con respecto a pequeñas perturbaciones: explícitamente características dinámicas no-lineales no son usualmente consideradas.

Sin embargo, recientes estudios han mostrado que la ecuación diferencial no-lineal más simple puede poseer un espectro extraordinariamente rico de comportamientos dinámicos, de puntos estables, a través de cascadas de ciclos estables, para un régimen en el cual el comportamiento (aunque totalmente determinístico) es en muchos aspectos "caótico", o indistinguible de una función simple de un proceso aleatorio.

Este artículo tiene varios objetivos.

Primero, aunque las principales características de este fenómeno no-lineal ha sido descubierto e independientemente redescubierto por muchas personas, no conozco ninguna fuente donde todos los resultados sean reunidos todos juntos. Yo he tratado de dar un recuento sinóptico. Esto es hecho de una manera breve y descriptiva e incluye algún nuevo material; las pruebas matemáticas detalladas son encontradas en una literatura técnica, la cual es mencionada.

Segundo, yo indico algunas de las cuestiones matemáticas interesantes, las cuales no se ven totalmente resueltas. Al-

gunos de estos problemas son de índole práctico, los cuales proveen una descripción probabilística para las trayectorias que muestran aleatoriedad; aún a través de su estructura subyacente es determinístico. Otros problemas son de interés intrínseco matemático y tratan de la patología de las estructuras de bifurcación o de los verdaderos comportamientos aleatorios que pueden surgir cuando la función no-lineal $F(x)$ de la ecuación (1) no es analítica. Otro objetivo aquí es estimular la búsqueda de estas cuestiones, particularmente de las cuestiones empíricas la cuáles se relacionan con el procesamiento de datos.

Tercero, dar algunos archivos donde estos conceptos podrían encontrar aplicaciones prácticas. Tales aplicaciones van desde lo abstracto metafórico (donde, por ejemplo, la transición de un punto estable al "caos" sirve como una representación del inicio de la turbulencia en un fluido), a modelos del comportamiento dinámico de poblaciones biológicas (donde uno puede busca el campo o los datos de laboratorio estimando los valores de los parametros en la ecuación diferencial).

Cuarto, hay una revisión breve de la literatura correspondiente a la forma de este espectro de comportamiento - puntos estables, ciclos estables, caos - pueden surgir en segundo o más grandes ordenes de la ecuación diferencial (que es, dos o más dimensiones, dos o mas especies interactuando), donde el inicio del caos usualmente requiere no-linealidad menos grave. Ecuaciones diferenciales son también cuestionadas en este punto de vista; esto muestra que un sistema tridimensional de ecuaciones diferenciales de primer orden requieren de una manifestación de comportamiento caótico.

El artículo termina con un evangelical motivo para la intro-

*Cambridge CB2 1ST; Departamento de Biología, Universidad de Princeton, Princeton 08540

ducción de estas ecuaciones diferenciales dentro de los cursos de matemáticas elementales, entonces la intuición estudiantil podría ser enriquecida por ver las cosas salvajes que una ecuación diferencial simple puede hacer.

2. Ecuaciones diferenciales de primer orden

Uno de los sistemas más simples que un ecologista puede estudiar es la reproducción de la población en la cual las generaciones no se sobrepoblan [1].

Muchas poblaciones naturales, particularmente insectos de zonas templadas (incluyendo los de tierras importantes económicamente y las plagas de tierras de hortalizas) son de este tipo. En estas situaciones, los datos observados, consistirán, usualmente, de información acerca del máximo o promedio, o del total de población de cada generación. La teoría busca entender como las magnitudes de población en la generación $t + 1$, x_{t+1} es relacionado a la magnitud de la población en la generación precedente t , X_t , como una relación que puede ser expresada en forma general.

$$X_{t+1} = F(X_t) \quad (1)$$

La función $F(x)$ será usualmente lo que los biólogos llaman "densidad dependiente" y un matemático lo llama no-linealidad; entonces la ecuación (1) es una ecuación diferencial no-lineal de primer orden.

Sin embargo, de aquí en adelante adoptaremos el hábito de referirnos a las variable X como "la población", hay innumerables situaciones fuera de la población biológica donde la ecuación (1) aplica. Hay otros ejemplos en biología, como por ejemplo, en genética (donde la ecuación describe el cambio de la frecuencia genética en el tiempo), o en epidemiología (con X siendo la fracción de la población infectada en el tiempo t). Ejemplos en economía incluyen modelos para de la relación entre costo y beneficio y los precios, para la teoría de los ciclos económicos y para la secuencia temporal generada por varias otras cantidades económicas. La ecuación general (1) también es usada por las ciencias sociales, donde surge, por ejemplo, en teorías de aprendizaje (donde X puede ser la cantidad de información que se puede recordar después de un intervalo t) o en la propagación de rumores en varias estructuras sociales (donde X es el número de personas que han escuchado el rumor después de un tiempo t). La imaginación del lector será capaz de inventar otros contextos para la ecuación (1).

En muchos de estos contextos, y para las poblaciones biológicas en particular, existe una tendencia por la variable X a incrementarse de generación en generación cuando es

pequeña, y a ir decreyéndose cuando es grande. Esto es la función no lineal $F(X)$ y que sigue las siguientes propiedades: $F(0) = 0$; $F(X)$ incrementa constantemente como X incrementa en el rango de $0 < X < A$ (con $F(X)$ logrando su máximo valor en $X = A$ y $F(X)$ decreyéndose constantemente, como X incrementa más allá de $X = A$. Además $F(X)$ usualmente contendrá uno o más parámetros los cuales se "acomplarán" a la severidad de su comportamiento no-lineal; los parámetros los cuales acomplarán la pendiente de la cresta en la curva $F(X)$. Estos parámetros tendrán típicamente un significado biológico, económico o social.

Un ejemplo específico se ofrece a continuación en la ecuación [1, 4, 11, 23]:

$$N_{t+1} = N_t(a - bN_t) \quad (2)$$

Esto es algunas veces llamado la ecuación diferencial "logística". En el límite $b = 0$, describiendo un crecimiento poblacional puramente exponencial (para $a > 1$); para $b \neq 0$, la no-linealidad cuadrática produce un crecimiento en la curva con una cresta, la pendiente de la cual es ajustada por el parámetro a . Para escribir $X = \frac{bN}{a}$, la ecuación puede ser llevada a una forma canónica [1, 4, 12, 23]:

$$X_{t+1} = aX_t(1 - X_t) \quad (3)$$

De esta manera, ilustrada en la fig 1, es posiblemente la ecuación diferencial no-lineal más simple. Yo usaré la ecuación (3) para la mayoría de los ejemplos e ilustraciones en este artículo. Aunque atractivo para los matemáticos, por la virtud de su extrema simplicidad, en aplicaciones prácticas la ecuación (3) tienen la desventaja de que es requerida X para permanecer en el intervalo $0 < X < 1$; si X excede la unidad, en iteraciones subsecuentes diverge hacia $-\infty$ (lo que significa que la población llegará a extinguirse). Además, $F(X)$ en la ecuación (3) logra un valor máximo de $\frac{a}{4}$ (en $X = \frac{1}{2}$); la ecuación por lo tanto posee un comportamiento dinámico no trivial solo si $a < 4$. De otra manera, todas las trayectorias son atraídas hacia $X = 0$ si $a < 1$. Así para un comportamiento dinámico no-trivial requerimos $1 < a < 4$; deteniendo así que la población llegue a extinguirse.

Otro ejemplo, con una procedencia más garantizada en la literatura biológica [1, 33, 37], es la ecuación:

$$X_{t+1} = X_t \exp[r(1 - X_t)] \quad (4)$$

Esto nuevamente describe una población propensa a un crecimiento exponencial simple con bajas densidades, y una tendencia a decrecer en altas densidades. La pendiente de este comportamiento no-lineal es ajustada por el parámetro r . El modelo es recomendable para una población de especies simple la cual es regulada por una epidemia de alta

densidad. La función $F(X)$ de la ecuación (4) es ligeramente más complicada que la ecuación (3) pero tiene la ventaja compensadora de que la estabilidad local implica la estabilidad local para toda $X > 0$.

Las formas (3) y (4) de ninguna manera escapan a la lista de funciones de crestas sencillas $F(X)$ de la ecuación (1) el cual puede ser sacrificada en la literatura ecológica. Un vasto y completo catalogo es mostrado, con referencias, por May y Oster. Otras funciones matemáticas similares son dadas por Metropolis et al. Aun, otras formas de $F(X)$ son discutidas bajo el encabezado de "curiosidades matemáticas".

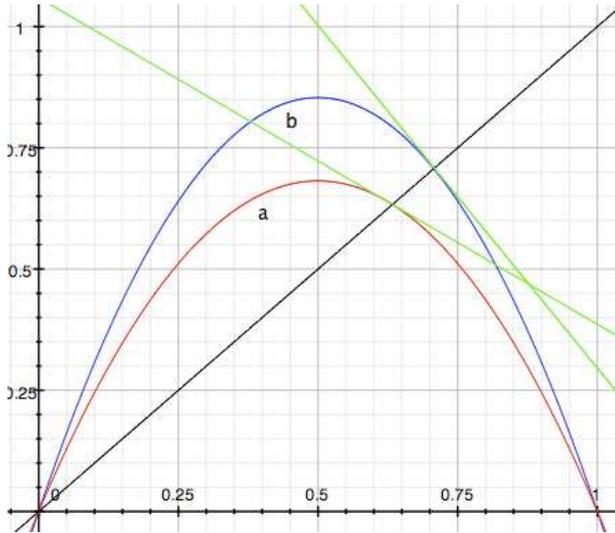


Fig. 1. Una forma típica de la relación entre X_{t+1} y X_t descrita por la ecuación 1. La grafica son de la ecuación 3, con $a = 2,707$ c(a); y $a = 3,414$ (b). La línea color verde indica la pendiente en "los puntos fijos" donde $f(x)$ interseca la línea de 45° : para el caso de a esta pendiente tiene una inclinación menor a -45° y el punto fijo es estable; para b la pendiente tiene una inclinación mayor a -45° y el punto fijo es inestable.^a

^aEsta imagen se editó en un gráficator llamado "Grapher"

3. Propiedades dinámicas de la ecuación 1

Constante posible, valores de equilibrio (o "puntos fijos") de X en la ecuación (1) pueden ser encontrados algebraicamente haciendo $X_{t+1} = X_t = X^*$ y resolviendo la ecuación resultante es:

$$X^* = F(X^*) \quad (5)$$

Un método grafico equivalente es buscar los puntos donde la curva $F(X)$ que describe X_t , dentro de $X(t+1)$ interseca

la línea de 45° , $X_{(t+1)} = X_{(t)}$, lo que corresponde al ideal del nirvana de un crecimiento poblacional cero; ver fig 1. Para las curvas de cresta-simple discutidas anteriormente, y ejemplificadas por las ecuaciones (3) y (4), hay dos de los dichos puntos: la solución trivial $X = 0$, y una solución no-trivial X^* (la cual para la ecuación (3) es $X^* = 1 - [1/a]$).

La siguiente cuestión es concerniente a la estabilidad del punto de equilibrio X^* . Esto puede ser visto como dependencia de la pendiente de la curva $F(X)$ en X^* . Esta pendiente, el cual es ilustrado por las líneas trazadas la fig 1, puede ser designada:

$$\lambda^{(1)}(X^*) = [dF/dX]_{X=X^*} \quad (6)$$

Siempre y cuando esta pendiente este situada entre 45° y -45° (que es, $\lambda^{(1)}$ entre 1 y -1), haciendo un ángulo agudo con la línea 45° ZPG (Crecimiento de población cero); el punto de equilibrio X^* será al menos localmente estable, atrayendo todas las trayectorias a su vecindad. En la ecuación (3), por ejemplo, esta pendiente es $\lambda = 2 - a$: el punto de equilibrio es por lo tanto estable, y atrae todas las trayectorias originadas en el intervalo $0 < X < 1$, si y solo si $1 < a < 3$.

Como los parámetros correspondientes son ajustados entonces la curva $F(X)$ se convierte más y más abruptamente en cresta, esta pendiente determinadamente estable en X^* eventualmente puede tener una inclinación más allá de -45° (eso es, $\lambda^{(1)} < -1$), en cuyo caso el punto de equilibrio X^* ya no es estable.

Qué sucede después? Qué sucede, por ejemplo, con $a > 3$ en la ecuación (3)?

Para contestar estas preguntas, es útil observar que el mapeo al que se refiere la población en intervalos sucesivos de 2 generaciones aparte; esto es, observar la función que describa X_{t+2} a X_t .

Esta segunda iteración de la ecuación (1) puede escribirse como:

$$X_{t+2} = F[F(X_t)] \quad (7)$$

O, introduciendo una pieza obvia de notación,

$$X_{t+2} = F^{(2)}(X_t) \quad (8)$$

El mapeo entonces derivado de la ecuación (3) es ilustrado en la fig. 2 y 3.¹

Valores demográficos los cuales se repiten cada segunda generación (esto es, puntos fijos con periodo 2) puede ahora ser escrito como X_2^* , y también encontrarse algebraicamente de:

$$X_2^* = F^{(2)}(X_2^*) \quad (9)$$

¹NT: Se encontrarón invertidas las imagenes en el texto original y en la traducción fueron corregidas

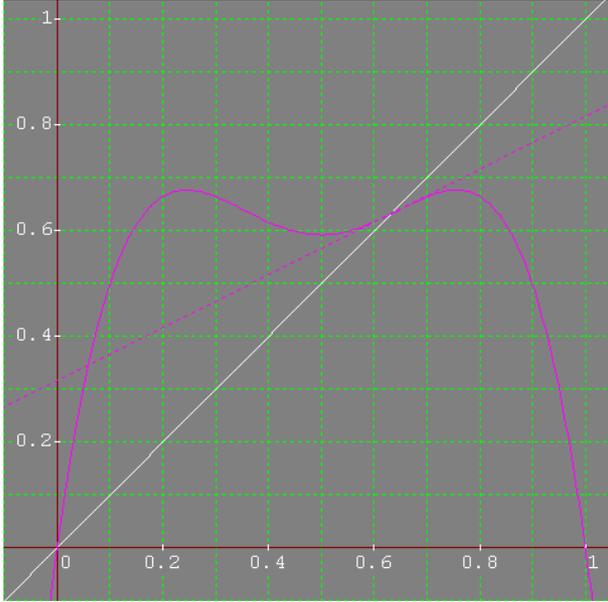


Fig. 2 La gráfica relativa a X_{t+2} a X_t se obtiene por dos iteraciones de la ecuación 3. Esta figura para el caso (a) de la fig. 1, $a = 2,707$: el punto fijo básico es estable, este es el único punto en el cual $F^{(2)}(X)$ interseca la línea de 45° (donde su pendiente, mostrada por la línea punteada, tiene una inclinación menor a 45°).

“Esta imagen se editó en “Graphmatica”

O gráficamente de la intersección entre el mapa $F^{(2)}(X)$ y la línea de 45° , como se muestra en las figuras 2 y 3. Claramente el punto de equilibrio X^* de la ecuación (5) es una solución de la ecuación (9); el punto fijo básico de periodo 1 es un caso degenerado de una solución de periodo 2.

Nosotros ahora hacemos una simple, pero crucial, observación: la pendiente de la curva $F^{(2)}(X)$ en el punto X^* se define como $\lambda^2(X^*)$ e ilustrado por las líneas punteadas en la fig. 2 y 3, es la raíz de la pendiente que corresponde a $F(X)$

$$\lambda^{(2)}(X^*) = [\lambda^{(1)}(X^*)]^2 \quad (10)$$

Este hecho puede ser usado ahora para hacer evidente que sucede cuando el punto fijo X^* llega a ser inestable. Si la pendiente de $F(X)$ es menor de -45° (que es, $|\lambda^{(1)}| < 1$), como se ilustra por la curva a en la fig 1, entonces X^* es estable. También, de la ecuación (10), esto implica $0 < \lambda^{(2)} < 1$ correspondiendo a la pendiente de $F^{(2)}$ en X^* , esto entre 0° y 45° ; como se muestra en la figura 2. Tan grande como el punto fijo X^* es estable, este proporciona solo la solución no-trivial de la ecuación (9). De otra manera, cuando la trayectoria de la curva de $\lambda^{(1)}$ va más allá de -45° (que es, $|\lambda^{(1)}| < 1$), como ilustra la curva b en la figura 1, X^* llega a ser inestable. Al mismo tiempo, de la ecuación (10) implica que $\lambda^{(2)} > 1$ corresponde a la pendiente de $F^{(2)}$ en X^* que llega más allá de 45° , como se

muestra en la fig 3. Como esto sucede, la curva $F^{(2)}$ debe desarrollar un “bucle”, y dos nuevos puntos fijos de periodo 2 aparecen, como se ilustra en la fig 3.

En breve, como la función no-lineal $F(X)$ en la ecuación (1) llega a tener más inclinada la cresta, el punto fijo básico X^* puede llegar a ser inestable. Exactamente en la etapa cuando esto ocurre, hay nacimiento de dos nuevos puntos inicialmente estables de periodo 2, entre los cuales el sistema alterna en un ciclo estable de periodo 2. El tipo de gráfica analizada indicada por las figuras 1, 2 y 3, a lo largo de la ecuación (10), es todo lo necesario para establecer este resultado genérico.

Como antes, la estabilidad de este periodo de ciclo 2 depende de la pendiente de la curva $F^{(2)}(X)$ en los 2 puntos. (Esta pendiente es fácilmente mostrada para ser la misma en ambos puntos, y más generalmente para ser la misma en todos los puntos k en un ciclo de periodo k). Además, como es claro se puede imaginar los estados intermedios entre las figuras 2 y 3, esta pendiente determinada-establemente tiene el valor de $\lambda = +1$ en el nacimiento del ciclo de 2 puntos, y entonces decreta a través de cero hacia $\lambda = -1$ como la cresta en $F(X)$ continúa inclinándose.

Más allá de este punto los puntos de periodo 2 volverán a ser inestable, y la bifurcación da inicialmente un ciclo estable de periodo 4. Esto a su vez nos da el camino para un ciclo de periodo 8 y desde allí, una jerarquía de bifurcación de ciclos estables de periodos $16, 32, 64, \dots, 2^n$. En cada caso, la forma en la cual el ciclo estable de periodo k llega a ser inestable, simultáneamente bifurcándose para producir un nuevo e inicialmente ciclo estable de periodo $2k$, es básicamente similar para el proceso de proponer solamente para $k = 1$. Una cuenta más completa y rigurosa del material cubierto hasta el momento está en la ref.(1).

Este “fenómeno de bifurcación muy hermoso”[22] es representado en la fig. (4), por ejemplo la ecuación (3). Esto no puede ser tan fuertemente enfatizado, que el proceso es genérico para la mayoría de las funciones $F(X)$ con cresta de inclinación ajustable. Metropolis et al[14]. Se refieren a esta jerarquía de ciclos de periodos 2^n como las armónicas de los puntos fijos X^* .

Aunque este proceso produce una secuencia infinita de ciclos con periodo 2^n ($n \rightarrow \infty$), la “ventana” de valores paramétricos donde ningún ciclo es estable en una dimensión progresiva, a fin de que el proceso entero es un proceso convergente, comenzando a delimitar sobre algunos valores paramétricos críticos. (Esto es verdad para la mayoría, pero no para todas, las funciones $F(X)$: observar la ecuación (17) más abajo). Este valor paramétrico crítico es un punto de acumulación de ciclos de periodo 2^n . Para la ecuación (3) se expresa $a_c : a_c = 3,5700 \dots$

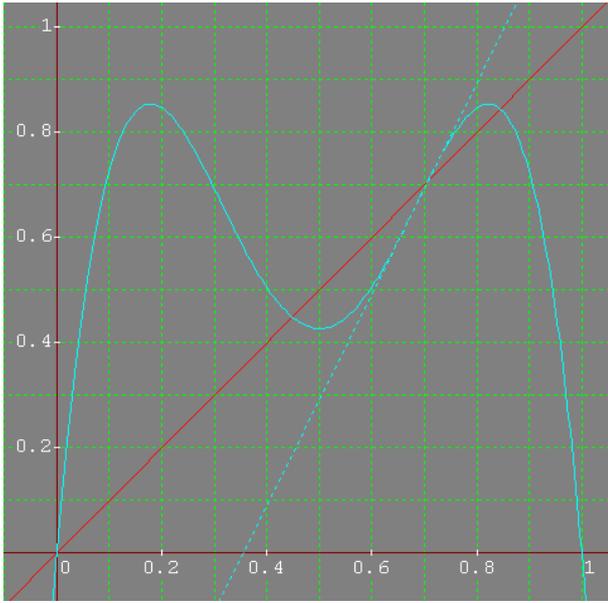


Fig. 3 Como de la Fig. 2, excepto que $a = 3,414$, como en la fig 1b. Los puntos fijo basicos son ahora inestables: la pendiente de $F^{(2)}(X)$ de estos puntos la inclinacion es mayor de 45° seguida de la aparición de dons nuevas soluciones de periodo 2. ^a

^aEstá imagen fue editada en "Graphmatica"

Más allá de este punto de acumulación (por ejemplo, para $a > a_c$ en la ecuación (3)) hay un número infinito de puntos fijos con diferentes periodicidades, y un número infinito de ciclos periódicos diferentes. Hay también un incontable número de puntos iniciales X_0 las cuales dandan trayectorias (aunque delimitadas) totalmente aperiódicas; no importando que tan grande sea el tiempo para generar las series por $F(X)$ éste es agotado u el patrón nunca se repite. Estos hechos pueden ser establecidos por una variedad de métodos[1, 4, 20, 22, 29]. Por ejemplo, una situación donde un número infinito de diferentes orbitas pueden ocurrir, fue bautizado como "caótico" por Li y Yorke[30].

Como el parámetro se incrementa más allá del valor critico, en primera todos estos ciclos aun tienen periodos, con X_t , alternando entre los valores de arriba y los valores de abajo del punto fijo X^* . Aunque estos ciclos pueden ser en verdad muy complicados (teniendo un periodo no-degenerativo de, por decir, 5726 puntos antes de repetir, éstos parecerán, para un observador casual, bastante a un ciclo de periodo 2 "ruidoso". Conforme el valor del parámetro continúa incrementándose, llega a un estado (en $a = 3,6786 \dots$ para la ecuación (3)) en el cual el primer periodo extraño aparece. En el primero de estos ciclos extraños tiene periodos muy largos, pero conforme el valor del parámetro continua incrementando ciclos con cada vez más pequeños periodos

extraños que son levantados, hasta que al final los puntos del ciclo tres aparecen (en $a = 3,8284 \dots$ para la ecuación (3)). Más allá de este punto, hay ciclos con cada periodo entero, así como un número incontable de trayectorias aperiódicas asínticas: Li y Yorke[20] titularon su prueba original de este resultado "Period Three Implies Chaos" (Periodo tres implica caos).

El termino "caos" nos trae una imagen de trayectorias dinámicas las cuales son indistinguibles de algún proceso estocástico. Simulaciones numéricas de la dinámica de las ecuaciones (3), (4) y otras ecuaciones similares tienden a confirmar esta impresión. Pero para funciones $F(X)$ suaves y "sensibles" como en las ecuaciones (3) y (4), el hecho matemático a resaltar es que, para cualquier valor paramétrico específico habrá un único ciclo que es estable, y que atrae esencialmente todos los puntos iniciales[22, 29]; (ver la ref. 4, apéndice A, para una exposición simple y lucida). Eso es, que hay un ciclo que casi "posee" todos los puntos iniciales; el número inicial infinito de otros ciclos, junto con las trayectorias asíntica y aperiódicas, que pertenecen a un conjunto de puntos los cuales, aunque incontable, tiene media cero.

Como está claro gracias a las Tablas 3 y 4, ningún ciclo estable particular podría ocupar una ventana extraordinariamente estrecha de valores paramétricos. Este hecho, junto con un tiempo grande es probable que se tome para asociaciones transitivas con las condiciones iniciales decreyendo la amplitud, lo que significa que en la practica el único ciclo que es improbable que sea descubierto, y que una descripción estocástica de las dinámicas es probable que sea apropiada, a pesar de la estructura determinística oculta. Este punto es perseguido en la sección "aplicaciones prácticas", más adelante.

El principal mensaje de esta sección es resumir en la Tabla 1, cuales conjuntos de varios dominios de comportamientos dinámicos de la ecuación (3) y (4) como funciones de los parámetros a y r respectivamente, que determina la gravedad de la resuesta no-lineal. Estas propiedades pueden ser entendidas cualitativamente de manera gráfica, y son generales para cualquier comportamiento de $F(x)$ en la ecuación (1).

Ahora procederemos a una discusión más detallada de la estructura matemática de una region caótica para funciones analíticas, y después mencionaremos problemas prácticos acerca de la consideración de los comportamientos peculiares mostradas por las funciones no-lineales, (como se muestras en las dos columnas de la derecha de la tabla (1)).

Tabla 1: Compendio de las varias formas de funciones de “cresta-simple” $F(X)$, de la ecuación (1), comportandose en la región caótica, distinguiendo las propiedades dinámicas las cuales son genericas de aquellas que no lo son.

La función $F(X)$ de la ecuación (1)	$aX(1 - X)$	$X \exp[r(1 - X)]$	$aX; si X < \frac{1}{2}$ $a(1 - X); si X > \frac{1}{2}$	$\lambda X; si X < 1$ $\lambda X^{1-b}; si X < 1$
Parámetro de ajuste	a	r	a	b
El punto fijo se vuelve inestable	3.0000	2.0000	1.0000*	2.0000
Comienza la región “Caotica”				
[punto de acumulación de ciclos de periodo 2^n]	3.5700	2.6924	1.0000	2.0000
Aparece primer periodo impar del ciclo	3.6786	2.8332	1.4142	2.6180
Aparece ciclo con periodo 3				
[y por tanto se presenan todos los periodos enteros]	3.8284	3.1024	1.6180	3.0000
Termina región “caotica”	4.0000†	$\infty \ddagger$	2.0000†	$\infty \ddagger$
¿Hay ciclos estables en la región caotica?	Si	Si	No	No

4. Estructura finita de la región caótica

Nosotros hemos visto como el punto fijo original X^* se bifurca para dar un periodo 2 armónico. Pero, ¿cómo surgen los nuevos ciclos del periodo k ?

El proceso general es ilustrado en la figura 5, el cual muestra como el ciclo de periodo 3 se origina. Por una extensión obvia de la notación introducida en la ecuación (8), las poblaciones de tres generaciones son relacionadas por:

$$X_{t+3} = F^{(3)}(X_1) \quad (11)$$

Si la cresta de $F(X)$ es suficientemente inclinada, la tercera iteración producirá una función $F^{(3)}(X)$ con 4 crestas, como se muestra en la figura (5) para el $F(X)$ de la ecuación (3). En primera (para $a < 3,8284 \dots$ en la ecuación (3)) la línea de 45° intersecta la curva solo en un punto X^* y en $X = 0$, como se muestra en la curva de la figura (5). Como en la pendiente de la curva en $F(X)$, los valles en $F^{(3)}(X)$ consiguen ser más pronunciados, hasta que simultáneamente los dos primeros valles se hunden y el último pico toca la línea de 45° , y después la intersecta en 6 nuevos puntos como se muestra en la figura (5). Estos seis puntos se dividen en dos distintos ciclos de tres puntos.

Como puede hacerse ver el imaginar las etapas intermedias en la figura 5 puede mostrar que la estabilidad determinística de la pendiente de $F^{(3)}(X)$ de tres de estos puntos tienen un valor común, el cual es $\lambda^{(3)}(X = +1)$ en su nacimiento y posteriormente su pendiente llega más allá de -1 : este periodo de ciclo 3 nunca es estable. La pendiente de $F^{(3)}(X)$ y los otros tres puntos comienzan en $\lambda^{(3)} = +1$ y luego decrecen hacia cero, resultando un ciclo estable de periodo 3. Como $F(X)$ continua inclinándose, la pendiente $\lambda^{(3)}$ para este ciclo de tres puntos inicialmente estable decrece más allá de -1 , por lo que el ciclo se torna inestable, y da lugar para el proceso de bifurcación, discutido en la sección anterior, del ciclo estable del periodo 6, 12, 24 ... $3 \cdot 2^n$. El nacimiento de este par estable e inestable que surge inicialmente como un ciclo estable, y su llegada a la

inestabilidad se muestra en la figura (4).

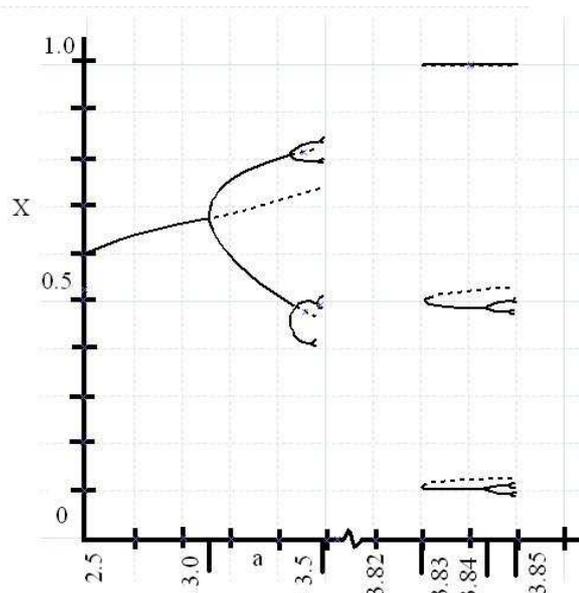


Fig. 4 Esta figura muestra algunos de los puntos fijos estables (—) e inestables (- - -) de varios periodos que pueden producirse por medio de procesos de bifurcación en la ecuación 1 en general, y en la ecuación 3 en particular. Del lado izquierdo, el punto fijo estable se convierte en inestable y da un incremento por una sucesión de bifurcaciones de pitchfork de arómicnas estables de periodo 2^n ; ninguno de estos ciclos es estables mas allá de $a = 3,5700$. A la derecha, los dos periodos de ciclo tres aparecen por una bifurcación tangencial; uno es inicialmente inestable; el otro es inicialmente estable, pero llega a ser inestable y da lugar a armónicas estables de periodo $3 \cdot 2^n$, el cual tiene un punto de acumulación en $a = 3,8495$. Note el cambio en la escala del eje a , necesario para poner ambos ejemplos en la misma figura. Hay un numero infinitamente muchas otras ventanas, basadas en ciclos de más grandes periodos.^a

^aEstá imagen fue editada en "Dia"

Hay, por lo tanto, dos tipos básicos de procesos [1, 4] de bifurcación para ecuaciones diferenciales de primer orden.

Tabla 2: Compendio de las varias formas de funciones de "cresta-simple" $F(X)$, de la ecuación (1), comportandose en la región caótica, distinguiendo las propiedades dinámicas las cuales son genericas de aquellas que no lo son.

La función $F(X)$ de la ecuación (1)	$aX(1 - X)$	$X \exp[r(1 - X)]$	$aX; siX < \frac{1}{2}$ $a(1 - X); siX > \frac{1}{2}$	$\lambda X; siX < 1$ $\lambda X^{1-b}; siX < 1$
Parámetro de ajuste	a	r	a	b
El punto fijo se vuelve inestable	3.0000	2.0000	1.0000*	2.0000
Comienza la región "Caotica"				
[punto de acumulación de ciclos de periodo 2^n]	3.5700	2.6924	1.0000	2.0000
Aparece primer periodo impar del ciclo	3.6786	2.8332	1.4142	2.6180
Aparece ciclo con periodo 3				
[y por tanto se presenan todos los periodos enteros]	3.8284	3.1024	1.6180	3.0000
Termina región "caotica"	4.0000†	$\infty \ddagger$	2.0000†	$\infty \ddagger$
¿Hay ciclos estables en la región caotica?	Si	Si	No	No

Verdaderamente nuevos ciclos de periodo k , surgen en pares, (uno estable y uno inestable) como los picos y los valles de las iteraciones de $F(X)$ movidas respectivamente, arriba y abajo de la línea de intercepción de 45° , como se muestra en la figura (5). Como los ciclos nacen en el momento que los picos y los valles llegan a la tangente de la línea de 45° , y la pendiente inicial de la curva F^* a los puntos es así $\lambda = +1$: este tipo de bifurcación podría ser llamada [?, ?] una bifurcación tangencial o una bifurcación $\lambda = +1$.

Contrariamente un ciclo originalmente estable de periodo k podría conseguir su inestabilidad como la inclinación de $F(X)$. Esto ocurre cuando la pendiente de F^* de ese periodo k , sus puntos llegan más allá de $\lambda^{(k)} = -1$ en cuyo caso un nuevo ciclo inicialmente estable de periodo $2k$ nace de la forma ejemplificada en la figura (2) y (3). Así este tipo de bifurcación podría ser llamada bifurcación 'pitchfork' (dando una imagen de mano izquierda mostrada en la figura (4)) o una bifurcación $\lambda = -1$. [1, 4]

Poniendo todo esto junto, concluimos que como los parámetros en $F(X)$ están variando fundamentalmente, las unidades dinámicas estables son ciclos de periodos básicos de k , las cuales surge por la bifurcación tangencial. a lo largo de sus

¿Como existen varios ciclos organizados a lo largo del intervalo de valores paramétricos relevantes? Esta pregunta tiene de mi conocimiento, que ha sido resuelta independientemente por 6 grupos de personas quienes han visto el problema en el contexto de la teoría combinatoria, análisis numérico, población biológica, y teoría de sistemas dinámicos.

Un enfoque simple, (el cual tiene la ventaja de requerir pequeños aparatos técnicos y la desventaja de ser algunas veces torpe) consiste en resolver primero la pregunta, ¿cómo muchos puntos de periodo k pueden existir? Esto es, como pueden existir muchas soluciones distintas en la ecuación:

$$X_k^* = F^{(k)}(X_k^*) \quad (12)$$

cascadas asociadas de armonía de periodos $k2^n$, los cuales surgen por la bifurcación de 'pitchfork'. Con estas bases la solución constante de equilibrio X^* y la iteración subsecuente del ciclo estable de periodo 2 es simplemente un caso especial, aunque este caso notablemente importante llamado $k = 1$, de un fenómeno general. Para complementar, recordemos que para funciones analíticas sensibles (como, por ejemplo, en la ecuación (3) y (4)) hay un único ciclo estable para cada valor paramétricos en $F(X)$. El rango completo de los valores paramétricos ($1 < a < 4$ en la ecuación (3), $0 < r$ en ecuación (4)) podría ser considerada como un componente de infinitamente muchas ventanas de valores paramétricos, - algunos grandes, otros inimaginablemente pequeños-, los cuales corresponden a un simple valor de estas unidades dinámicas simples. Las Tablas 3 y 4, abajo, muestran esto. Estas ventanas son divididas de otras por puntos (los puntos de acumulación de los periodos armónicos de $k2^n$) con los cuales el sistema es verdaderamente caótico, con ciclos no atrayentes: sin embargo hay infinitamente muchos valores paramétricos especiales, estos tienen media cero en los intervalos de todos los valores.

Si la función $F(X)$ está suficientemente encorvada, así como un único valor paramétrico es suficientemente grande, cada iteración duplica el número de crestas, por lo que $F^k(X)$ tiene 2^{k-1} crestas. Para los valores paramétricos suficientemente grandes, todas las crestas y valles intersectarán la línea de 45° , produciendo 2^k puntos fijos del periodo k . Existen catalogados para $k = 12$ en las filas superiores de la Tabla ???. Como incluye una lista de puntos degenerados del periodo k , de los cuales el periodo es un submúltiplo de k , en particular, el punto 1 del periodo 2 ($X = 0$ y X^*) son soluciones degeneradas por la ecuación (12) para toda k . Por el trabajo de izquierda a derecha a través de la Tabla 2, estos puntos degenerados pueden ser restados, llevando el número total de puntos no degenerados de periodo básico k , como se muestra en la segunda fila de la tabla ???. Formas

Tabla 3: Un catálogo de ciclos estables (con periodos básicos por encima de 6) para la ecuación $X_{t+1} = aX_t(1 - X_t)$

Periodo de ciclo básico	Valores de a sobre los cuales:		Cascada subsecuente de "armónicas todas con periodo $k2^a$ " llegan a ser inestables	Tamaño del rango de valores de a sobre los cuales el ciclo básico, o una de sus armónicas es atractora
	Primera aparición del ciclo básico	Ciclo básico llega a ser inestable		
1	1.0000	3.0000	3.5700	2.5700
3	3.8284	3.8415	3.8495	0.0211
4	3.9601	3.9608	3.9612	0.0011
5(a)	3.7382	3.7411	3.7430	0.0048
5(b)	3.9056	3.9061	3.9065	0.0009
5(c)	3.99026	3.99030	3.99032	0.00006
6(a)	3.6265	3.6304	3.6327	0.0062
6(b)	3.937516	3.937596	3.937649	0.000133
6(c)	3.977760	3.977784	3.977800	0.000040
6(d)	3.997583	3.997585	3.997586	0.000003

más sofisticados de llegar a este resultado son dadas en otros apartados.

Por ejemplo, hay eventualmente $2^4 = 64$ puntos con periodo 6. Esto incluye los dos puntos del periodo 1, el periodo 2 de ciclo "armónico", y el par estable e inestable, de los trillisos de los puntos con periodos tres, para un total de 10 puntos de los cuales el periodo básico es un submúltiplo de 6, así llevara 54 puntos, del cuyo periodo básico es 6.

Los puntos k del periodo 2^k son organizados dentro de varios ciclos del periodo k , o submúltiplos de ese, los cuales aparecen en sucesión por cada bifurcación tangencial o de 'pitchfork' como los parámetros en $F(X)$ que son variados. La tercera fila de la tabla 2, cataloga el total del número de ciclos

distintos del periodo k , que aparecen. En la cuarta fila, los ciclos degenerados son substraídos, dando el número total de los ciclos no degenerados del periodo k , estos números deben igualarse a los de la segunda fila divididos por k . Esta cuarta fila incluye los armónicos (estables) los cuales surgen por bifurcación de 'pitchfork' y los pares de ciclos de estables-inestables surgen por bifurcación tangencial. Para contrarrestar los ciclos, los cuales son inestables de nacimientos, el número total de posibles ciclos estables esta dado en la fila cinco, estas cifras puede también ser obtenida por métodos menos complicados. Finalmente nosotros podemos contrarrestar los ciclos estables los cuales surgen por bifurcación de 'pitchfork', como armónicos de algunos ciclos simples llegando al final de la tabla 2, la cual muestra el número de ciclos estables cuyo periodo básico es k .

Volviendo al ejemplo del periodo 6, nosotros ya hemos identificados los 5 ciclos degenerados, cuyos periodos son submúltiplos de 6. Los 54 puntos restantes son empaquetados dentro de un ciclo de periodo 6 el cual surge como el armónico del único ciclo 3-puntos estable, y 4 pares distintos de ciclos de periodo 6 (hay 4 ciclos inicialmente estables y 4 ciclos inestables) los cuales surgen por sucesiones de bifurcaciones tangenciales. Así, leyendo de la parte inferior de la columna de la tabla dos, obtenemos los números 4, 5, 9, 14.

Usando las etiquetas, o las técnicas de la teoría combinatoria, también es posible dar una lista genérica del orden en el cual los diferentes ciclos aparecen. Por ejemplo, los ciclos básicos estables de periodo 3, 5, 6 (de los cuales hay respectivamente 1, 3, 4) deben aparecer en el orden 6, 5, 3, 5, 6, 6, 5, 6: compare las tablas 3 y 4. Metropolis et al da la lista explícita genérica de todos los ciclos de periodo $k \leq 11$.

Como corolario sigue que, dando los ciclos aparecidos más recientemente, es posible (al menos en el principio) catalogar todos los ciclos los cuales han aparecido en este punto. Una forma especialmente elegante para hacerlo fue dado

por Smale y Williams, quienes mostraron, por ejemplo, que cuando un ciclo estable de periodo 3 primero originados, el número total de otros puntos con periodo k N_k los cuales han aparecido por esta etapa satisface la Serie de Fibonacci, $N_k = 2, 4, 5, 8, 12, 19, 30, 48, 77, 124, 200, 323$ para $k = 1, 2, \dots, 12$ esto es contrastado con el número total de puntos del periodo k el cual eventualmente aparecerá (en las primera filas de la tabla 2) como $F(X)$ que continua aumentando.

Tales catalogos del número total de puntos fijos, y su orden de aparición, son relativamente fáciles de construir. Para cualquier función particular $F(X)$, la tarea numérica de encontrar la ventana de los valores paramétricos donde cualquier ciclo o su armónico es estable, en contraste, es relativamente tedioso y poco elegante. Antes de dar dichos resultados, dos valores paramétricos críticos de especial significado deben ser mencionados.

Hoppensteadt y Hyman han dado un método gráfico sencillo para localizar los valores paramétricos en la región caótica del cual el primer ciclo de periodo extraño aparece. Su método analítico es el siguiente. Permitir a un parámetro

Tabla 4: Un catálogo de ciclos estables (con periodos básicos por encima de 6) para la ecuación $X_{t+1} = X_t \exp[r(1 - X_t)]$

Periodo de ciclo básico	Valores de a sobre los cuales:		Cascada subsecuente de "armónicas todas con periodo $k2^n$ " llegan a ser inestables	Tamaño del rango de valores de a sobre los cuales el ciclo básico, o una de sus armónicas es atractora
	Primera aparición del ciclo básico	Ciclo básico llega a ser inestable		
1	0.0000	2.0000	2.6924	2.6924
3	3.1024	3.1596	3.1957	0.0933
4	3.5855	3.6043	3.6153	0.0298
5(a)	2.9161	2.9222	2.9256	0.0095
5(b)	3.3632	3.3664	3.3682	0.0050
5(c)	3.9206	3.9295	3.9347	0.0141
6(a)	2.7714	2.7761	2.7789	0.0075
6(b)	3.4558	3.4563	3.4567	0.0009
6(c)	3.7736	3.7745	3.7750	0.0014
6(d)	4.1797	4.1848	4.1880	0.0083

ajustarse a la pendiente de $F(X)$ (por ejemplo, $a = a$ para la ecuación (3), $a = r$ para la ecuación (4)), $X^*(a)$ es el punto fijo de periodo 1 (la solución no-trivial de la ecuación (5)), y $X_{max}(a)$ el valor máximo alcanzable de iteraciones de la ecuación (1) (esto es, el valor de $F(X)$ en su cresta o punto estacionario). El primer periodo extraño del ciclo aparece para el valor de a el cual satisface

$$X^*(a) = F^{(2)}(X_{max}(a)) \quad (13)$$

Como se menciono anteriormente, otro valor crítico es donde el primer ciclo de periodo 3 aparece. Este valor paramétrico puede ser encontrado numéricamente de los resultados de la tercera iteración de la ecuación (1): para la ecuación (3) esto es $a = 1 + \sqrt{8}$.

Myrberg (para toda $k \leq 10$) y Metropolis et al. (para toda $k \leq 7$) han dado información numérica con respecto a los ciclos estables en la ecuación (3). Ellos no dan la ventana de valores paramétricos, pero solo el valor sencillo al cual un ciclo dado es máximamente estable; esto es, el valor de a para el cual la estabilidad determinada por la pendiente de $F^{(k)}(X)$ es cero, $\lambda^{(k)} = 0$. Desde la pendiente de en k -tiempos iterada grafica $F^{(k)}$, en cualquier punto en un ciclo de periodo k , es simplemente igual al producto de las pendientes de $F(X)$ en cada uno de los puntos X^* , en este ciclo, el requerimiento de $\lambda^{(k)} = 0$ implica que $X = A$ (el punto estacionario de $F(X)$, donde $\lambda^{(1)} = 0$) es uno de los puntos periódicos en cuestión, el cual considerablemente simplifica los cálculos numéricos.

Para cada ciclo básico de periodo k (como se catalogo en

Como un resultado, allí se desarrolla una división entre el comportamiento matemático enfatizado (el cual es exactamente determinable) y la conclusión de "sentido común" que describiría la simulación numérica. Si el parámetro a se mantiene constante en un valor dentro de la región caótica, y la ecuación (3) itera arbitrariamente para un número grande de generaciones, una gráfica de densidad de los

la última fila de la Tabla 2), esto es más interesante para saber el valor paramétrico con el cual: (1) el primer ciclo aparece (por la bifurcación tangencial); (2) el ciclo básico se vuelve inestable (dando lugar a bifurcaciones sucesivas de 'pitchfork' para una cascada de armónicas de periodos $k2^n$); (3) todas las armónicas se vuelven inestables (el punto de acumulación de los ciclos de periodo $k2^n$). Las Tablas 3 y 4 amplian el trabajo de May y Oster, dando esta información numérica para las ecuaciones (3) y (4), respectivamente. (Los puntos de acumulación no son tontas conexiones, pero son calculadas por un procedimiento iterativo convergentemente rapido, ver ref. 1, apéndice A.) Algunos de estos resultados ya han sido obtenidos por Gumowski y Mira.

5. Problemas prácticos

Refiriéndose al paradigmático ejemplo de la ecuación (3), ahora podemos ver que el intervalo paramétrico $1 < a < 4$ esta hecho de mosaicos de unidimensional de infinitamente muchas ventanas de a -valores, en ca de las cuales un ciclo único de periodo k , o una de sus armónicas, atrae esencialmente todos los puntos iniciales. De estas ventanas, que para $1 < a < 3,5700\dots$ corresponde a $k = 1$ y sus armónicas es por mucho la más amplia y más llamativa. Más allá del primer punto de acumulación, que puede ser visto en la Tabla 3 que estas ventanas son más estrechas, aún para los ciclos de periodos bastante pequeños, y las ventanas se llegan a ser rápidamente muy pequeña así como k aumenta.

valores observados de X , en el intervalo de 0 a 1 serán resueltos dentro de k los picos iguales (más precisamente, las funciones delta) correspondientes a los puntos k en el ciclo estable apropiado para este valor a . Pero para la mayoría de valores a este ciclo tendrá un periodo bastante grande, y además típicamente tomará muchas miles generaciones antes de las asociaciones transitorias con las condiciones

iniciales que son decrementadas en amplitud: así la gráfica de densidad producida por la simulación numérica usualmente parece una muestra de puntos tomados de alguna distribución continua.

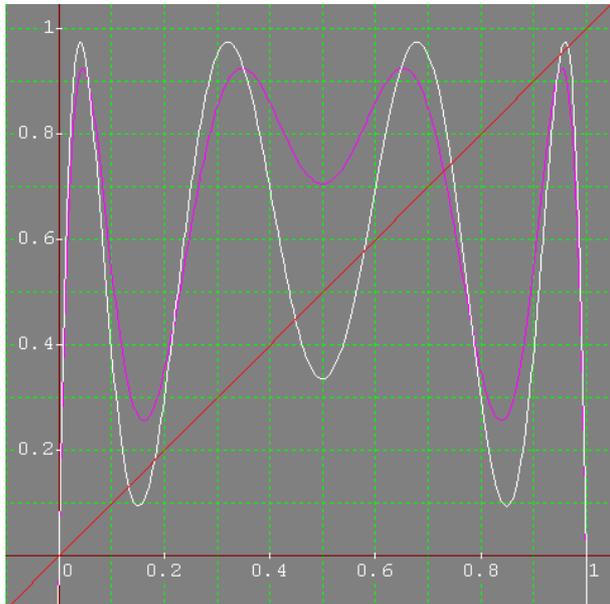


Fig. 5 La relación entre X_{t+3} y X_t , se obtiene a través de tres iteraciones de la ecuación 3. La curva de color magenta esta hecha para una $a = 3,7$, y solo interseca la línea de 45° una vez. Así como se incrementa a , las depresiones y picos en la gráfica se volverán mas pronunciados. La curva de color blanco esta hecha con un valor de $a = 3,9$ y aparecen seis nuevos puntos de periodo 3 (arreglados como dos ciclos, de periodo 3 cada uno) footnoteEsta gráfica fue editada en "Graphmatica"

Un conjunto especialmente interesante de computaciones numéricas se deben a Hoppensteadt (comunicación personal) quien ha combinado muchas iteraciones para producir una gráfica de densidad de X para cada una de cada secuencia de valores de a , gradualmente incrementadas desde 3,5700... hasta 4. Estos resultados son mostrados en una película. Como se puede esperar de la Tabla 3, algunos de los ciclos más obvios aparecen como conjuntos de funciones delta: el ciclo 3 y sus primeras armónicas escasas; el primer ciclo 5; el primer ciclo 6. Pero para la mayoría de los valores de a de la gráfica de densidad se parece a una función simple de un proceso aleatorio de a . Esto es particularmente verdad en una vecindad de valores de a donde el primer ciclo extraño aparece ($a = 3,6786...$), y nuevamente en una vecindad de $a = 4$: esto no es sorprendente porque cada una de estas ubicaciones es un punto de acumulación de puntos de acumulación. A pesar del cambio discontinuo enfatizado en las periodicidades de los ciclos estables, los patrones de densidad observados tienden a variar sin problemas. Por ejemplo, como a incrementa hacia el valor con el cual el ciclo 3 aparece, la gráfica de densidad tiende a concentrarse

alrededor de tres puntos, y se exparse sin problemas fuera de estos tres puntos después del ciclo 3 y todas sus armónicas se vuelven inestables.

Yo creo que el problema matemático más interesante consiste en designar una forma para construir algunas aproximaciones y espectros de densidades "efectivamente continuas", a pesar del hecho que la función de densidad exacta es determinable y siempre es un conjunto de funciones delta. Tal vez dichas técnicas ya han sido desarrolladas en la teoría "ergótica" (la cual trata de los fundamentos de la mecánica estática), como por ejemplo en el uso de los "observadores del grano grueso". Yo no sé.

Como una descripción efectivamente estocástica de las propiedades dinámicas de la ecuación (4) para un r grande ha sido proporcionado, aunque de trucos tácticos peculiares de la ecuación tales que por cualquier otro método general. Como r incrementa más allá de 3, las trayectorias generadas por esta ecuación son, una incrementadamente buena aproximación, casi periódico con periodo $\frac{1}{r}exp(r-1)$.

La opinión que tengo para sacar en esta sección es que aunque la estructura fina exquisita de la región caótico es matemáticamente fascinante, es irrelevante para los propósitos prácticos. Lo que parece ser llamado para algunas descripciones efectivamente estocásticas de las dinámicas deterministas. Mientras que las varias declaraciones acerca de los diferentes ciclos y su orden de aparición pueden ser hechos de manera genérica como descripciones estocásticas de las dinámicas actuales que será bastante distintas para diferente $F(X)$: evidenciando la diferencia entre el comportamiento de la ecuación (4) en la cual para una r grande tiene "brotes" casi periódico espaciados de muchas generaciones aparte, contra el comportamiento de la ecuación (3), la cual para $a \rightarrow 4$ no es muy diferente de una serie de ensayos de Bernoulli.

6. Curiosidades matemáticas

Como discutimos anteriormente, la razón es esencial de la existencia de una sucesión de ciclos estables en todo el régimen "caótico" es que cada nuevo par del ciclo nace por bifurcación tangencial (ver fig. 5) uno de ellos es primero estable, por virtud de la manera de rodear las colinas y los valles que interceptan la línea de 45° . Para funciones analíticas $F(X)$ el único valor paramétrico para el cual la gráfica de densidad o "media invariante" es continua y verdaderamente ergódico que son en los puntos de acumulación de armónicos, los cuales dividen un ciclo estable del siguiente. Tales valores paramétricos excepcionales han encontrado aplicaciones, por ejemplo, en el uso de la ecuación (3) con $a = 4$ como un generador de números aleatorios: esto tiene una función de densidad continua proporcional a

$[X(1 - X)]^{\frac{1}{2}}$ en el intervalo $0 < X < 1$.

Funciones no-analíticas $F(X)$ en las cuales la curva es de hecho un pico proporcional de un interesante caso especial. Aquí podríamos imaginar los picos de las colinas y valles moviéndose para interceptar la línea de 45° en la fig 5, y esto podría ser que ambos, los ciclos nacidos por una bifurcación tangencial de inestabilidad inicial (uno se tiene en $\lambda^{(k)} > 1$, el otro en $\lambda^{(k)} < -1$), para toda $k > 1$. Hay entonces ciclos no-estables en la región caótica, el cual, es, por tanto, literalmente caótica con una función de distribución de densidad realmente ergódica y continua.

Un ejemplo simple esta dado por:

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= aX_t; \text{ si } X_t < \frac{1}{2} \\ X_{t+1} &= a(1 - X_t); \text{ si } X_t > \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (14)$$

Definido en el intervalo $0 < X < 1$. Para $0 < a < 1$, todas las trayectorias son atraídas hacia $X=0$; para $1 < a < 2$, hay infinidad de orbitas periódicas, a lo largo de un número incontable de trayectorias aperiódicas, ninguna de las cuales es localmente estable. El primer ciclo de periodo extraño aparece en $a = \sqrt{2}$, y todos los periodos enteros son representados más allá de $a = (1 + \sqrt{5})/2$. Kac nos da una cuidadosa discusión del caso $a = 2$. Otro ejemplo, este tiempo con un amplio documento biológico, es la ecuación:

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= \lambda X_t; \text{ si } X_t < 1 \\ X_{t+1} &= X_t^{1-b}; \text{ si } X_t > 1 \end{aligned} \quad (15)$$

Si $\lambda > 1$ este posee un punto de equilibrio globalmente estable para $b < 2$. Para $b > 2$ hay otra vez un verdadero caos, con ciclos no-estables: el primer ciclo extraño aparece en $b = (3 + \sqrt{5})/2$, y todos los periodos enteros están presentes más allá de $b = 3$. Las propiedades dinámicas de las ecuaciones (15) y (16) esta resumida a la derecha de la Tabla 2.

La ausencia analítica es una necesidad pero no una suficiente condición para el comportamiento verdaderamente aleatorio. Considere, por ejemplo:

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= (a/2)X_t; \text{ si } X_t < \frac{1}{2} \\ X_{t+1} &= aX_t(1 - X_t); \text{ si } X_t > \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (16)$$

Esta es la parábola de la ecuación (3) y la fig 1, pero la parte izquierda de $F(X)$ es aplanada dentro de la línea recta. Esta ecuación posee ventanas de valores de a , cada uno con su propio ciclo estable, como se describió genéricamente anteriormente. La pendiente $\lambda^{(k)}$ establemente-determinada

varia, sin embargo, discontinuamente con el parámetro a , y las amplitudes de la regiones estables simples son reducidas que para la ecuación (3): el punto fijo se vuelve inestable en $a = 3$; el punto de acumulación de las armónicas subsecuentes esta en $a = 3,27 \dots$; el primer ciclo extraño aparece en $a = 3,44 \dots$; el ciclo de 3-puntos en $a = 3,67 \dots$ (compare la primera columna de la Tabla 1).

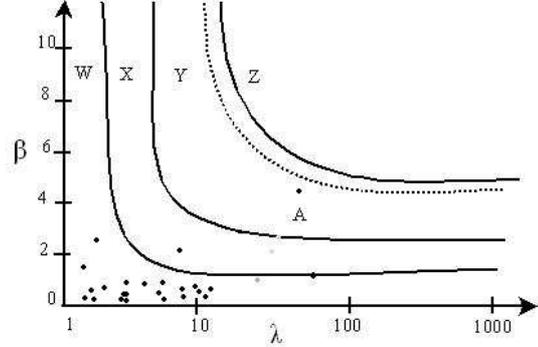


Fig. 6 Las líneas continuas denotan el dominio de estabilidad para el parámetro de densidad de dependencia, β , y el rango de crecimiento poblacional, λ , en la ecuación (17), donde W denota el Campo Monotono, X las oscilaciones debiles, Y los ciclos limite estables y por ultimo, Z representa el Caos; la línea punteada muestra donde los ciclos 2-puntos dando lugar a ciclos más grandes de periodo 2^n . Los puntos negros vienen del análisis de los datosn de la tabla de vida en el campo de las poblaciones, los circulos grises de los datos del experimento en laboratorio de las poblaciones (ref. [3], despues de ref. [39]).^a

^aEsta gráfica fue editada en "Dia"

Estas excentricidades del comportamiento manifestado por funciones no-analíticas que podían ser de interés para explorar cuestiones formales en la teoría ergódica. Creo, sin embargo, que no ellas no tiene relevancia en modelos de las ciencias biológicas y sociales, donde dichas funciones $F(x)$ deberían ser analíticas. Este punto de vista es tratado en otras secciones.

Como curiosidad final consideremos la ecuación

$$X_{t+1} = \lambda X_t [1 + X_t]^\beta \quad (17)$$

Este ha sido usado para mantener en forma un considerable grupo de datos de poblaciones de insectos. Su comportamiento estable, como una función de los dos parámetros λ y β , es ilustrada en la fig. 6. Nótese que para una $\lambda < 7,39 \dots$ hay un punto de equilibrio globalmente estable para todas las β ; para $7,39 \dots < \lambda < 12,50 \dots$ este punto fijo se vuelve inestable para β suficientemente grande, bifurcandose hacia un ciclo estable de 2-puntos, el cual es la solución para todas las β grandes; como λ incrementa através del rango de $12,50 \dots < \lambda < 14,77 \dots$ algunas otras armónicas de periodo

2^n aparecen a su vez. La jerarquía de los ciclos de bifurcación de periodo 2^n es así truncada, y el punto de acumulación y la subsecuente región de caos no es almacenada (incluso para una β arbitrariamente grande) hasta $\lambda > 14,77\dots$

7. Aplicaciones

La importancia de la ecuación (1) determinística y sencilla pueda poseer trayectorias dinámicas la cuales se ven como alguna clase de ruido aleatorio tiene inquietantes implicaciones prácticas. Esto significa, por ejemplo, que aparentemente, fluctuaciones erráticas en los datos de censo para una población animal no necesariamente necesita indicar o los caprichos de un ambiente impredecible o los errores de muestreo: ellos podrían simplemente derivarse en una población rígidamente determinística creciendo relacionadamente dicha ecuación (1). Este punto es discutido a más profundidad y cuidadosamente en otras secciones.

Alternativamente, podría ser observado que en la región caótica arbitrariamente cercano a las condiciones iniciales pueden dirigir trayectorias, las cuales, después de un tiempo suficiente grande, divergen considerablemente. Esto significa que, aún si nosotros tenemos un modelo simple en cual todos los parámetros son determinados exactamente, la predicción a largo plazo es, no obstante, imposible. En un contexto meteorológico, Lorenz ha llamado este fenómeno general, como el "efecto mariposa" aun si a atmosfera puede ser descrita por un modelo determinístico en el cual todos los parámetros fueran conocidos, el aleteo de la mariposa podrían alterar las condiciones iniciales, y así (en la región caótica) alterar la predicción a largo plazo.

La turbulencia de los fluidos, provee un ejemplo clásico donde, como un parámetro (el número de Reynolds) es cambiado en un conjunto de ecuaciones determinísticas (las ecuaciones Navier-Stokes), la propuesta puede someterse a una transición abrupta desde alguna configuración estable (por ejemplo, un flujo laminar) dentro de una región caótica aparentemente estocástica. Varios modelos, basados en la ecuación diferencial de Navier-Stokes han sido propuestos como metáforas matemáticas para este proceso. En un reciente artículo de la teoría de la turbulencia, Martin ha observado que la ecuación diferencial unidimensional (1) podría ser usada en este contexto. Comparada con los primeros modelos, tiene la desventaja de ser aún más abstractamente metafórica y la ventaja de tener un espectro de comportamiento dinámico, el cual es más ampliamente complicado aún más susceptible a una investigación analítica.

Una aplicación más realista que es posible en el uso de la ecuación (1) en forma de datos en la poblaciones biológicas con generaciones discretas no-superpuestas, como es el caso de muchos artrópodos de zonas templadas. La figura 6 muestra los valores paramétricos λ y β que son

estimadas por 24 poblaciones naturales y 4 poblaciones de laboratorio cuando la ecuación (17) es equipada con datos disponibles. La figura también muestra los dominios de estabilidad teóricos: un punto estable, su armónico estable, (ciclos estables de periodo 2); caos. Las poblaciones naturales tienden a tener un comportamiento de equilibrio estable. Las poblaciones de laboratorio tienden a mostrar comportamiento oscilatorio o caótico; su comportamiento podría ser exageradamente no-lineal, debido a la ausencia, en el laboratorio, de factores naturales de mortalidad. Esta sección sugiere que la población natural más oscilatoria (mostrada en la figura 6), es la del escarabajo de la papa de Colorado, quien presenta una relación con su plantahuésped carente de una evolución. Estas observaciones son solamente tentativas, y deben ser tratadas con precaución por varias razones. Dos de las principales limitaciones son que existen dificultades técnicas en seleccionar y reducir los datos y que no hay poblaciones de especies simples en el mundo natural: obtener una ecuación diferencial unidimensional para reemplazar las iteraciones de la población con su ambiente físico y biológico por parámetros pasivos (tales como λ y β) podría provocar más violencia que en la realidad.

Algunas de las otras áreas donde estas ideas han encontrado aplicación fueron mencionadas en la segunda sección.

Uno de los objetivos de esta artículo es el impulsar aplicaciones en otras áreas.

8. Fenómenos relacionados en altas dimensiones

Pares de parejas, ecuaciones diferenciales de primer orden (equivalente para una ecuación sencilla de segundo grado) han sido investigadas en varios contextos, particularmente en el estudio de los sistemas presa-depredador de artrópodos en las zonas templadas. En estos sistemas bidimensionales, las complicaciones en el comportamiento dinámico se agravan por hechos como: (1) incluso para funciones analíticas, puede haber comportamiento verdaderamente caótico (como para las ecuaciones (15) y (16)) correspondiente para los llamados "atractores extraños"; y (2) dos o más estados estables diferentes (por ejemplo, un punto estable y un ciclo estable de periodo 3) pueden ocurrir juntos para los mismos valores paramétricos. Además, la manifestación de estos fenómenos usualmente requiere menos severidad en la no-linealidad (menos crestas abruptas de $F(X)$) que para el caso unidimensional.

Sistemas similares de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, o dos parejas de ecuaciones diferenciales de primer orden, tiene comportamiento dinámico mucho más

simple, compuesto de puntos estables e inestables y ciclos limite. Esto es básicamente porque en sistemas continuos bidimensionales la entrada y la salida de curvas cerradas puede ser distinguida; las trayectorias dinámicas no pueden cruzarse una con otra. La situación se vuelve cualitativamente más complicada en muchas formas análogas para las ecuaciones diferenciales de primer orden, cuando uno se mueve hacia los sistemas de tres o más parejas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (eso es, sistemas tridimensionales de ecuaciones diferenciales ordinarias). Scanlon (comunicación personal) ha argumentado ese comportamiento caótico y “atractores extraños”, siendo solución, no es ni puntos ni orbitas periodicas, siendo típico de tales sistemas. Algunos ejemplos bien estudiados surgen en modelos de sistemas de reacción-difusión en química y biología, y en modelos de Lorenz (tres dimensiones) y Ruelle y Takens (cuatro dimensiones) referidos anteriormente. El análisis de estos sistemas es, por virtud de su alta dimensionalidad, mucho menos transparente que para la ecuación (1)

Un ejemplo explícito y muy sorprendente de un sistema, el cual ha sido recientemente estudiado desde este punto de vista en una ecuación diferencial ordinaria, se suele usar en ecología para describir la competencia de especies. Para una o dos especies estos sistemas son muy dominados: las trayectorias dinámicas convergerán en algún punto de equilibrio estable (el cual puede representar coexistencia, o una o ambas especies llegasen a extinguirse). Como Smale ha mostrado recientemente, para tres o más especies, sin embargo, esta ecuación general puede, en un sentido bien definido y serteramente razonable, ser compatible con cualquier comportamiento dinámico. El debate sostenido por Smale es general y abstracto: un estudio específico de las dinámicas muy peculiares las cuales pueden ser mostradas por la familia de ecuaciones Lotka-Volterra, unicamente existiendo tres competidores, es dada por May y Leonard.

9. Conclusión

A pesar de los problemas prácticos los cuales pretenden ser resueltos, las ideas desarrolladas en este artículo tiene obvias aplicaciones en muchas áreas.

La aplicación mas importante, sin embargo, podría ser pedagógica.

El cuerpo elegante de la teoría matemática pertenece al sistema lineal (análisis de Fourier, función ortogonal, etc) y su aplicación exitosa en muchos problemas lineales fundamentalmente en la ciencias físicas, tiende a dominar aún en cursos universitarios moderadamente avanzados en matemáticas y físicas teóricas. La intuición matemática entonces desarrollada, de ninguna manera equipa al estu-

dante a enfrentarse al comportamiento bizarro mostrado por el más simple de los sistemas discretos no lineales, tal como la ecuación (3). Todavía dichos sistemas no-lineales son realmente la regla, no la excepción, fuera de las ciencias físicas.

Por lo tanto, urgiría que las personas fueran introducidas, por decir, en la educación básica matemática en la ecuación (3). Esta ecuación puede ser estudiada fenomenalmente por iteraciones en una calculadora, o aun a mano. Su estudio no involucra conceptos sofisticados de cálculo elemental. Dicho estudio enriquecería la intuición de los estudiantes en los sistemas no-lineales.

No solo en la investigación, pero en el mundo político y económico, nosotros estaríamos mejor si más personas realizaran estos sistemas no-lineales simples no necesariamente poseyendo propiedades dinámicas simples.

Yo he recibido mucha ayuda de F. C. Hoppensteadt, H. E. Huppert, A. I. Mees, C.J. Preston, S. Smale, J. A. Yorke y particularmente de G. F. Oster. Este trabajo fue respaldado en parte por el NSF.

Referencias

- [1] May, R. M. Oster, G.F. *Am Nat* 110 (in the press)
- [2] Varkey, G. C., Gradwell, G.R. y Hassell, M. P. *Insect Population Ecology* (Blackwell, Oxford 1973)
- [3] May, R. M. (ed.) *Theoretical Ecology Principles and Application* (Blackwell, Oxford, 1976)
- [4] Guekenheimet J., Oster, G. F. y Ipaktchi, A. *Theory Pop Biol.* (in the press)
- [5] Oster G. F. Ipakitchi A., Rocklin I. *Theory Pop Biol* (in the press)
- [6] Asmussen, M. A and Feldman M. W. J. *Theor. Biol.* (in the press)
- [7] Hoppendsteadt F. C. *Mathematical Theories of Population Demographics, Genetics and Epidemics* (SIAM, Philadelphia 1975)
- [8] Samuelson P. A. *Foundation of Economic Analysis* (Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1947)
- [9] Goodwin R. E. *Econometrica* 19, 1-17 (1951)
- [10] Baumol W. J. *Economic Dynamics*. 3rd. ed. (Macmillan, New York, 1970)
- [11] Ver, Kemy, J., and Snell, J. L. *Mathematical Models in the Social Science* (MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1972)
- [12] Chaundy, T. W. y Phillips. E., Q. *Jl Math Oxford* 7, 74-80 (1936)
- [13] Myrberg, P. J. *Ann. Akad. Sc. Fennica*, A,1, No. 336/3 (1963)
- [14] Myrberg, P. J., *Ann. Akad. Sc. Fennicae* A. I. No. 259 (1958)
- [15] Lorenz E. N J. *Atmos Sci.*, 20,130-141 (1963); *Teilus* 16,1-11 (1964)
- [16] Metropolis, N. Stein M. L. and Stein P. R. J. *Combinatorial Theory*, 15 ,25-44 (1973)
- [17] Maynard Smith, J., *Mathematical Ideas in Biology* (Cambridge University Press. Cambridge, 1968)
- [18] Krebs, C. J. *Ecology* (Harper and Row, New York, 1972)
- [19] May, R. M., *Am Net.*, 107, 46-57 (1972)
- [20] Li, N. Y. and Yorks, J. A., *Am. Math Monthly*, 82,985-992 (1975)
- [21] Hoppensteadt F. C., and Hyman, J. M. (Courant Institute, New York University: preprint, 1975)
- [22] Smale S and Williams, R (Department of Mathematics, Berkeley: preprint, 1976)
- [23] May, R. M. *Science*, 186,645-647 (1974)

- [24] Moran P. A. P. *Biometric* 6,250-258 (1950)
- [25] Ricker W. E. J. *Fish. Res Bd. Con*, 11, 559-623 (1954)
- [26] Cook L. M. *Nature*, 207, 316 (1965)
- [27] Macfadyan, A., *Animal Ecology: Alms and Methods* (Pitman, London, 1963)
- [28] May, R. M. J., *Theor. Biol.*, 51, 511-524 (1975)
- [29] Guckenbeimer, J., *Proc AMS Symposia in Pure Math.*, XIV, 95-124 (1970)
- [30] Gilbert, E. N. and Riordan J., *Illinois J. Math.*, S, 657-667 (1961)
- [31] Preston, C. J. (King's College, Cambriage: preprint, 1976).
- [32] Gumowski, I., and Mira, C., *C. r hebdom. Seanc. Acad. Sci.*, Paris, 281a, 45-48 (1975); 282a, 219-222 (1976)
- [33] Layzer, D., *Stcl. Am.*, 233(6), 56-69 (1975)
- [34] Ulam, S. M., *Proc Int Congr. Math* 1950, Cambridge, Mass.: Vol II, pp. 264-273 (1975); 282a, 219-222 (1976)
- [35] Ulam S. M. and Von Neuman J. *Bull. Amm math Soc.* (abstr.) 53,1120 (1947)
- [36] Kac, M., *Ann Math*, 47,33-49 (1946)
- [37] May, R. M. J., *Science*, 181,1074 (1973)
- [38] Hassell, M. P., *J. Anim. Ecol.*, 44,283-296(1974)
- [39] Hassell, M. P., Lawton, J. H., and May R. M., *J Anim. Ecol.* (in the press)
- [40] Ruelle, D., and Takens. F. *COMM. Math Physics* 20,167,192 (1971)
- [41] Landau, L. D., and Lifsthitz, E. M., *Fluid Mechanics* (Pergamon, London, 1959).
- [42] Martin, P. C. , *Proc. Int. Conf on Statistical Phisics*, 1973, Budapest (Hungarian Acad. Sci., Budapest, in the press)
- [43] Southwood. T. R. E., in *Insects, Science and society* (edit. by Pimentel, D.)
- [44] Metropolis, N., Stein, M. L., and Stein, P. R., *Numer Math*, 10, 1-19 (1967)
- [45] Gumowsky, I., and Mira, C., *Automatica*, 5, 303-317 (1969)
- [46] Stein P. R., and Ulam, S. M., *Rosprawy Mat.*, 39, 1-66 (1964)
- [47] Beddington J. R., Frec. C. A. and Lawton J. H., *Nature*, 225,58-60 (1975)
- [48] Hirach M. W., and Smale S., *Differential Equations, Dinamical Systems and lineal Algebra* (Academic, New York, 1974)
- [49] Kolatz G.B. *Science*, 189, 984-985 (1975)
- [50] Smale S (Department of Mathematics Berkeley: preprint 1976)
- [51] May, R. M., and Leonard, W.J. *SIAM J. Appl. Math.*, 29,243-253 (1975)