Diagramas de *de Bruijn* en un autómata celular hexagonal

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Verano de investigación científica
Depto. de Aplicación de Microcomputadoras

Paulina Anaid León Hernández
pauanana@gmail.com
&
Rogelio Basurto Flores
larckov@gmail.com

Agosto 2009

1. Introducción

El estudio de autómatas celulares ha sido a lo largo de los años un tema de mucho interés, pues si bien, un autómata celular puede represetar sistemas con un comportamiento complejo, el entender como se da este comportamiento a partir de la interacción de las células mediante reglas sencillas no ha sido una labor fácil. En pro de entender el comportamiento general de un autómata celular han surgido teorías matemáticas como el análisis de densidad, la teoría de campo promedio o la teoría de estructura local; también se han utilizado métodos numéricos como el método de Montecarlo; no obstante con estas herramientas sólo se estudia el comportamiento general del sistema, dejando la interacción entre los elementos relegada. Un tema crucial en el estudio de los autómatas celulares es el traslape de células y el cómo este traslape afecta el comportamiento del sistema.

Una herramienta matemática que ha mostrado ser útil en el estudio del traslape de células en los autómatas celulares son los diagramas de *de Bruijn*, utilizados desde los años 80's para analizar la familia de autómatas celulares de una dimensión por Harold V. McIntosh, así mismo, ha mostrado la posibilidad para el estudio de autómatas celulares en dos o más dimensiones, con la clara desventaja de la complejidad que esto conlleva, [7].

En el presente documento se pretende exponer las bases de los diagramas de de Bruijn y la analogía que se realizó para los autómatas celulares bidimensionales aplicandolo con la regla Spiral, [1], [2], [3], [4].

2. Diagramas de *de Bruijn*

Los diagramas de de Bruijn son la representación mediante grafos dirigidos de las *secuencias de de Bruijn*. Las secuencias de de Bruijn nacen a partir del siguiente problema:

Problema 1. *Dado $m+1$ símbolos y un entero positivo n, encontrar un algoritmo para generar una secuencia de símbolos que tenga una longitud mínima y además, que cuando sean colocados en un círculo contengan como subsecuencias de símbolos consecutivos todas las secuencias de símbolos de longitud n.*

Este problema ha sido resuelto en más de una ocasión desde 1894, cuando A. de Rivière encontró una solución para $m=1$; posteriormente con las contribuciones de C. Flye Sainte-Marie y W. Mantel en la misma época, después en los años 30 M. H. Martin demostrando la existencia de las secuencias para cualquier m y n dando un algoritmo para la creación de tales secuencias, y finalmente de Bruijn solucionó el problema mediante grafos para $m=1$, dejando ver como factible la extensión de su trabajo a cualquier m [5].

Para poder comprender de una mejor forma el problema supongamos que $m=2$ y $n=2$; por lo tanto, se tienen tres tipos de símbolos denotados por: 0, 1 y 2; las subsecuencias que se obtengan deberán ser de 2 símbolos necesariamente.

Primero, se define una secuencia cualquiera como:

$$s_i s_{i+1} s_{i+2} \dots s_K \tag{1}$$

donde K es la longitud de la secuencia. Para calcular el número de subsecuencias posibles se hace mediante:

$$(m+1)^n \tag{2}$$

para el ejemplo se tiene que $m=n=2$, por lo tanto:

$$(2+1)^2 = 3^2 = 9 \tag{3}$$

además, cada subsecuencia estará denotada como:

$$s_i s_{i+1} s_{i+2} \dots s_{i+(n-1)} \qquad i = 0, 1, 2 \dots \tag{4}$$

Lo que para el ejemplo significaría hacer todas las posibles secuencias de longitud $n-1$, es decir longitud 1, por lo tanto, las secuencias resultantes son:

$$S = \{00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22\} \tag{5}$$

finalmente, la secuencia de de Bruijn será representada como:

$$s_i s_{i+1} s_{i+2} \dots s_L \tag{6}$$

donde L denota la longitud mínima de la secuencia, dada por la formula (2). De esta manera:

Definición 1. *Se define como una secuencia de de Bruijn a toda secuencia de longitud* $(m+1)^n$ *que permite generar* $(m+1)^n$ *subsecuencias de longitud* $n-1$ *al colocarse en una circunferencia.*

El objetivo de colocar la secuencia en una circunferencia es para poder cerrar la secuencia de manera natural, es decir, que el símbolo inicial y el símbolo final se unen para cerrar la secuencia y que de esta manera no exista ni inicio ni fin de secuencia. Si se observa con atención la secuencia $s = 221201100$, mostrada en la figura 1, puede generar todas las subsecuencias existentes en (5), gracias a que la longitud de la cadena es igual a $(n+1)^n$ se dice que es una secuencia de de Bruijn.

Debido a que se coloca la secuencia en una circunferencia es posible formar la subsecuencia 02, que de otra manera no se podría generar. En la figura 1 se muestra la forma en que se obtienen las subsecuencias de la secuencia de de Bruijn.

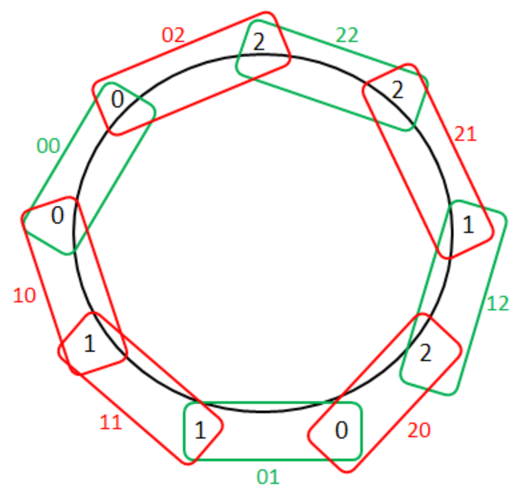

Figura 1: Subsecuencias para la secuencia 221201100

Los *diagramas de de Bruijn* permiten dar una solución al problema 1, para poder generar un diagrama es necesario obtener todas las secuencias de longitud $(m+1)$ posibles con los $(m+1)$ símbolos, estas secuencias se definen como:

S_A		S_B		Subsecuencia
0	0	0	0	000
0	0	0	1	001
0	1	1	0	010
0	1	1	1	011
1	0	0	0	100
1	0	0	1	101
1	1	1	0	110
1	1	1	1	111

Tabla 1: Subsecuencias formadas mediante traslape para $m = 1$ y $n = 3$

Definición 2. *Un nodo es una subsecuencia de longitud n que representa un número en base $(m+1)$. Existen en un diagrama de de Bruijn $(m+1)^n$ nodos.*

Por ejemplo, para $m = 1$ se tienen secuencias de longitud 2 con 2 símbolos, por lo que se usan los números en base 2 de longitud 2, es decir: 00, 01, 10 y 11; estas secuencias serán los nodos dentro del diagrama; y las aristas representarán la forma de unir estas secuencias y son definidas como:

Definición 3. *La unión entre dos nodos a través de un traslape de símbolos entre las secuencias de nodos forma una arista, es decir, que ambas secuencias compartan un símbolo para poder ser unidas y formar una subsecuencia de longitud n.*

En la tabla 1 se muestran los diferentes traslapes que existen para el caso de $m = 1$ y $n = 3$, donde en color gris se visualizan los símbolos que comparten las secuencias y que representan el traslape. Finalmente, en la figura 2 se representa el diagrama de de Bruijn para el ejemplo de la tabla 1.

El caso de $m = 1$ y $n = 3$ es de sumo interés debido a la relación existente con los autómatas celulares lineales de 2 estados y radio de vecindad 1, dicha relación se presenta en un autómata celular ya que son secuencias de células, donde las células pueden tener algún estado y así una célula forma parte de tres vecindades al mismo tiempo, tanto de la vecindad en la que es central, como de las que es vecino izquierdo o derecho, de tal manera se observa un traslape entre células, mismo que en los diagramas de de Bruijn aparece y es por esto que son utilizados para analizar el comportamiento del autómata de manera local.

3. Autómata celular

Un autómata celular es un modelo matemático abstracto, que representa un sistema dinámico discreto, en una dimensión d, con un conjunto finito de estados, y evoluciona a través de una función de transición local f en tiempos discretos, donde la función de transición depende del estado de los vecinos a un

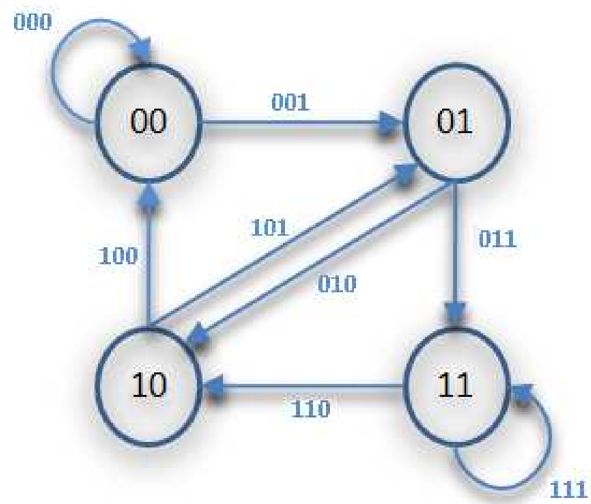

Figura 2: Diagrama de de Bruijn para $m = 1$ y $n = 3$

radio r.

De manera formal, un autómata celular se define como una cuátrupla (Σ, d, e, f), donde:

- Σ, es un conjunto finito de estados.
- d, es un entero positivo que representa la dimensión.
- e, la configuración inicial de las células para $t = 0$.
- $f \colon \Sigma^e \to \Sigma$, es una función de transición local.

Una forma conveniente y acorde a los objetivos del presente documento, para definir a un autómata celular de dimension $d = 1$ es:

Definición 4. *Un autómata celular unidimensional es una secuencia infinita de símbolos que pertenecen a un alfabeto finito Σ, que evoluciona en el tiempo dependiendo de sus vecinos en un radio r de acuerdo a una función $f : \Sigma^{2r+1} \to \Sigma$.*

En la imagen 3 se puede apreciar una representanción de un arreglo infinito por ambos lados de células, así mismo, en la imagen se especifica la dependencia de vecinos para la regla de evolución de un autómata de 2 estados y radio de vecindad 1, es decir, utilizando la notación de Wolfram, un autómata (2,1); la regla de evolución se representa mediante una tabla de transición, donde la célula central en un tiempo $t = 0$ deberá conocer el estado de las 2 células adyacentes y el suyo propio y dependiendo de la tabla de transición la célula pasará a algún otro estado del conjunto de estados o permanecerá en el mismo para el tiempo $t + 1$. La tabla de transición de estados se muestra en la tabla 2, donde se tiene a la izquierda las 8 vecindades posibles para una vecindad de radio 1 y a la derecha el valor al que pasará la célula central en el tiempo $t+1$; dicha tabla contiene la regla 84, para saber el número decimal al que se hace referencia es convirtiendo la secuencia de dígitos en binario a decimal, de esta manera se tiene como maximo 256 reglas para el llamado autómata básico, [7], [8].

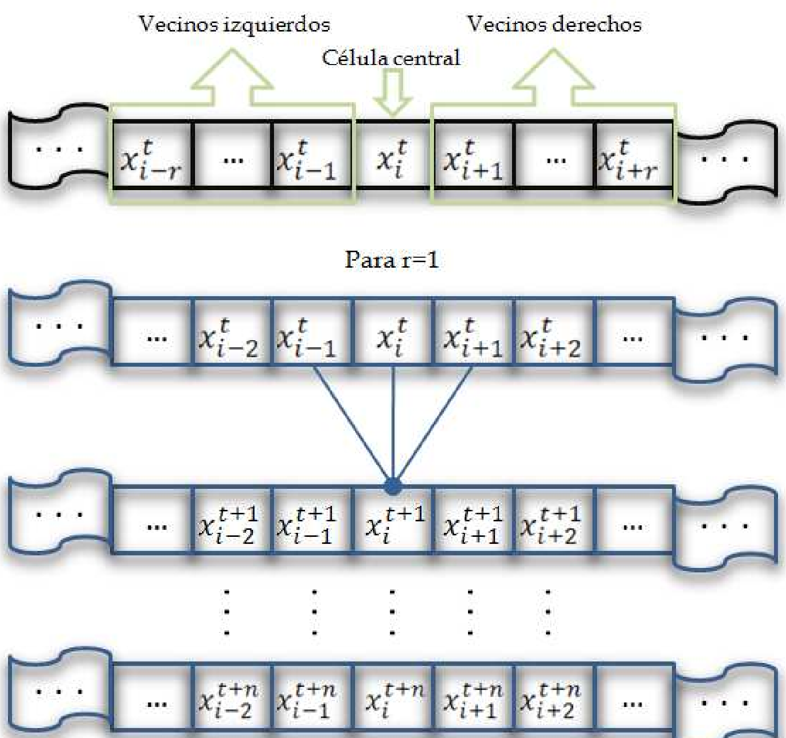

Figura 3: Autómata celular unidimensional.

$t \rightarrow t+1$
$000 \longrightarrow 0$
$001 \longrightarrow 0$
$010 \longrightarrow 1$
$011 \longrightarrow 0$
$100 \longrightarrow 1$
$101 \longrightarrow 0$
$110 \longrightarrow 1$
$111 \longrightarrow 0$

Tabla 2: Regla de evolución de un AC unidimensional

La forma de las vecindades de un autómata celular $(2, 1)$ son iguales a las subsecuencias generadas por un diagrama de *de Bruijn* donde $m = 1$ y $n = 3$; dicha semejanza radica en que los diagramas de de Bruijn utilizan secuencias de símbolos, lo que en un autómata celular son los estados de las células y la longitud de las subsecuencias que genera son las vecindades que se utiliza en la regla de evolución. Así, es posible utilizar los diagramas de de Bruijn para representar las reglas de evolución de un autómata celular unidimensional, [7].

En un diagrama de de Bruijn los nodos son secuencias que generan subsecuencias de longitud n al unirse mediante aristas con otros nodos; cada nodo se une con un número finito de nodos y para ello debe seguirse una condición específica a la que se denomina *traslape*; en un autómata celular, los nodos representan una subvecindad definida de la siguiente manera:

Definición 5. *Una subvecindad es un subconjunto de células que pertenecen a la vecindad del autómata; en la cual deberá existir n_t células que se traslapen con otras n_t de una segunda subvecindad, formando con esos traslapes una vecindad completa del autómata. Donde $n_t \geq 1$.*

Para el caso de una dimensión, la subvecindad está representada como la célula central y sus vecinos izquierdos o la célula central y sus vecinos derechos y que al traslapar ambas subvecindades a través de la célula central se obtiene la vecindad completa, o bien, lo que en diagramas de de Bruijn se denomina subsecuencia generada por las aristas al conectar dos nodos. En la figura 4 se representa en la primer fila una secunecia de de Bruijn a través de la cual pueden derivarse como subsecuencias todas las vecindades posibles para un autómata celular unidimensional $(2, 1)$; en la segunda fila se tienen los nodos del diagrama de de Bruijn que se representan como secuencias de longitud n, o bien, como todas las subvecindades posibles en el autómata $(2, 1)$; finalmente, en la última fila se presentan todas las subsecuencias que se derivan tanto de la secuencia de de Bruijn como del traslape de las subvecindades, y que en un autómata celular son las vecindades completas.

Ahora se puede definir la evolución de un autómata celular unidimensional mediante el diagrama de de Bruijn por medio de las aristas. Cuando se hace un

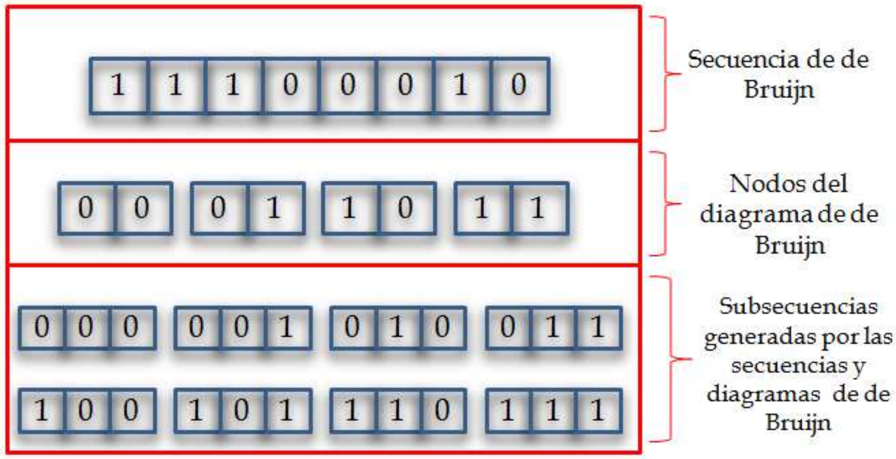

Figura 4: Relaciones entre secuencias y diagramas de de Bruijn.

recorrido por una arista se observa cual es la vecindad generada y se le asocia el resultado de la tabla de transición, de esta manera se obtiene un diagrama como el de la figura 5.

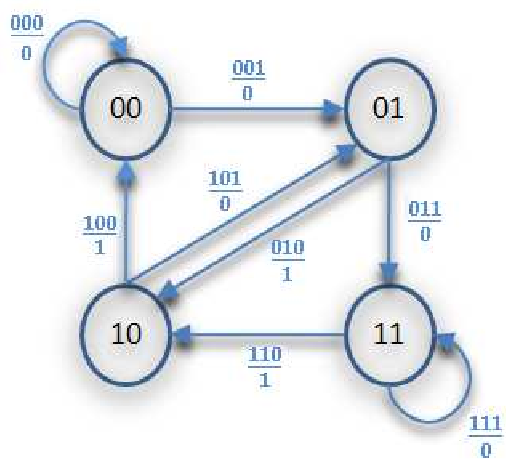

Figura 5: Diagrama de de Bruijn representando la regla 84.

					j				
		0	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	1	2	1	2	2	2	2
	1	0	2	2	1	2	2	2	
	2	0	0	2	1	2	2		
i	3	0	2	2	1	2			
	4	0	0	2	1				
	5	0	0	2					
	6	0	0						
	7	0							

Tabla 3: Matriz de evolución de la regla Spiral

4. Análisis de la regla Spiral via de Bruijn

4.1. Regla Spiral

La regla Spiral es una regla de AC de 2 dimensiones donde cada célula tiene forma de hexágono; cada célula tiene 6 vecinos inmediatos y puede presentar uno de tres estados $\{0, 1, 2\}$; la vecindad es mostrada en la figura 6; la regla Spiral es totalística, lo que quiere decir que para que una célula en un tiempo t, evolucione al tiempo $t + 1$, dependerá de su propio estado así como el de sus vecinos.

La matriz de transición, que se muestra en la tabla 3, está dada en función del número de células en estado 1 y 2 dentro de la vecindad a evaluar; siendo las columnas el número de células en estado 1 y las filas el número de células en estado 2; así, al tener una vecindad en un tiempo t con 3 células en estado 1 y 2 células en estado 2, la célula central evolucionará y para el tiempo $t + 1$, pasará a estado 1. El número de células en estado 0 se obtiene mediante la operación $n_0 = 7 - (n_1 + n_2)$, donde n_0, n_1 y n_2 son el número de células en estado 0, 1 y 2, respectivamente.

En los estudios que se han hecho a la regla anteriormente en [1], [3], [4], se ha observado que existe una diversidad de partículas tanto estáticas como movibles, que al interactuar muestran un comportamiento complejo; dicho comportamiento se ha utilizado en [6] para la implementación de una lógica computacional.

La problematica radica en que las búsquedas que se han hecho de partículas no han sido de manera sistemática, para ello en el presente docuemnto se realizará un análisis a través de diagramas de de Bruijn con el fin de, primero conocer el tipo de interaccion entre células y posteriormente entre conjuntos de células para así encontrar patrones bien definidos que formen partículas concretas.

4.2. Diagrama de de Bruijn en $2D$

Para poder realizar un diagrama de de Bruijn es importante conocer el número de estados que tiene el autómta y el número de vecinos que tendrá

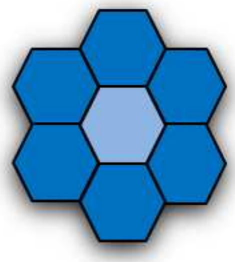

Figura 6: Vecindad para la regla Spiral.

la subvecindad.

Una subvecindad se puede definir por sus características:

- *Forma:* Depende de la vecindad original, dado que al traslaparse al menos una célula de la subvecindad con otra célula de otra subvecindad se forma una vecindad completa.

- *Número de células*: Es el número n de células que contiene la subvecindad, cada célula tiene una etiqueta que corresponde a la posición que ocupa esa célula en dicha subvecindad; esto es importante para que se pueda definir de manera correcta las condiciones de traslape.

- *Número de células que traslapan:* Son el número n_t de células que al unirse con otra subvecindad para formar una vecindad completa, ocupan "la misma posición"; y debe cumplir la condición de $n_t \geq 1$.

- *Condición de traslape:* Para que dos subvecindades se puedan traslapar, las células que traslapan en A y las células que traslapan en B deben tener el mismo estado, y una de las células que se traslapan deberá ser la célula central.

Cabe mencionar que para cada subvecindad con sus diferentes número de células traslapandose se formaran diagramas diferentes.

La vecindad de la regla Spiral se compone de 7 células, figura 6, donde al analizarla se observó que una de las subvecindades, posiblemente la única para este caso en partícular, que cumple con las características antes mencionadas es mostrada en la figura 8 inciso 1); donde el número de células de la subvecindad está dado por $n = 4$, el número de células que traslapan es $n_t = 1$ y las condición de traslape está dada por:

$$C = B' \tag{7}$$

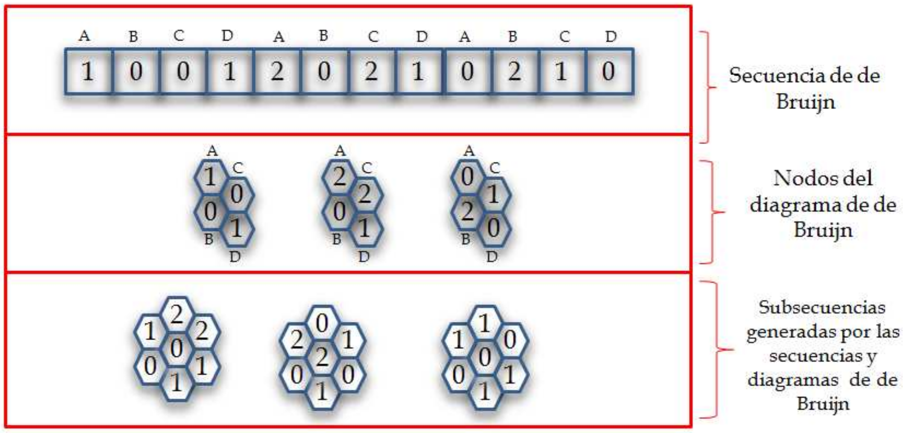

Figura 7: Relaciones entre diagramas y secuencias con un autómata celular hexagonal

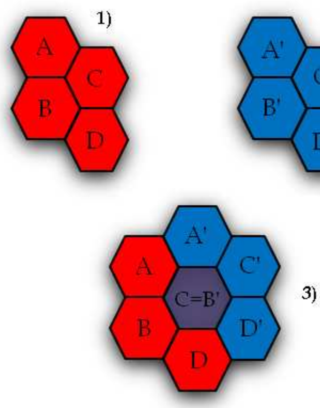

Figura 8: Subvecindades para la regla spiral. Los incisos 1) y 2) corresponden a las subvecindades A) y B) respectivamente; el inciso 3) representa el traslape de la célula central

Analogamente a lo que se hizo para relacionar los diagramas de de Bruijn con un autómota unidimensional, los nodos son subsecuencias de símbolos, los cuales representan, los estados 0,1,2, de longitud 4, los cuales en la figura 7 se observan como A, B, C, D; y se derivan de una secuencia de nodos, y el traslape entre dos nodos, da como resultado una vecindad.

Si se tienen dos nodos como los de la figura 8 incisos 1) y 2) , entonces la condición de traslape se cumplirá cuando el símbolo C del nodo A sea igual al

Secuencia de símbolos	Dígito en sistema base 9
00	0
01	1
02	2
10	3
11	4
12	5
20	6
21	7
22	8

Tabla 4: Relación entre una secuencia de símbolos y la numeración base 9

símbolo B del nodo B. Esta relación se visualiza en una matriz de de Bruijn.

Definición 6. *Una matriz de de Bruijn es una matriz boolenan que representa las aristas, la existencia de un traslape entre dos nodos, de un diagrama de de Bruijn a través de la relacion entre las filas con las columnas.*

Donde las filas, o nodos A, y las columnas, o nodos B, se relacionan solamente de $A \rightarrow B$.

La matriz de de Bruijn para la regla Spiral se puede ver en la tabla de la pagina 22. Con la finalidad de hacer más sencilla la manipulación de las subvecindades, se utiliza un sistema base 9 para poder representar a las secuencias de las subvecindades de una manera más compacta; para ello se tomaron 2 células, y sus posibles combinaciones, lo cual, da como resultado un dígito en numeración base 9, para poder tener la representación de las 4 células que tiene la subvecindad, se concatenaron dos dígitos que representan una cadena de símbolos de una subvecindad; la tabla 4 muestra la relación entre la secuencia de símbolos y el dígito del sistema base 9.

Para representar toda la cadena se divide en dos partes, las células A, B y las C, D de esta manera, la secuencia 0221 se divide en 02 y 21, entonces en numeración base 9, será: 27.

4.3. Trabajando con la matriz de de Bruijn

La matriz de de Bruijn que se muestra en la pagina 22 presenta todas las posibles vecindades que pueden generarse al traslapar dos subvecindades, por lo tanto se puede realizar una evolución para conocer cual será el estado de la célula central, célula traslapada, en un tiempo $t + 1$.

El comportamiento que muestra la célula central al evolucionar es representado mediante otra matriz de de Bruijn; a esta nueva matriz se le puede aplicar “filtros” para que la información presentada sea más concreta y específica. En este sentido, los diferentes filtros que pueden aplicarse a la matriz ya evolucionada pueden ser tan variados como lo que se desee encontrar; los filtros aplicados a la regla Spiral y que son de un interés general en los autómatas celulares son:

- *Permanecia*, muestra todas las relaciones entre nodos donde, después de aplicar la regla de evolución a las vecindades formadas, la célula central continua en el estado que tenía antes de aplicar la regla.

- *Corrimiento*, muestra todas las relaciones entre nodos donde, después de aplicar la regla de evolución a las vecindades formadas, la célula central presenta el estado que tenía un vecino específico antes de aplicar la regla de evolución.

Para el caso de la regla Spiral las matrices de permanencia son 3, debido a los tres diferentes estados que pueden "permanecer", en la matriz de la pagina 22 se tiene la permanencia para los tres estados representados mediante W, R y B para los estados 0, 1 y 2 respectivamente.

La matriz que muestra el corrimiento dentro de la regla Spiral se presenta en la matriz de la pagina 23, donde de igual manera se utiliza W, R y B para los estados 0, 1 y 2 respectivamente; el corrimiento que se presenta es a partir del vecino sur-oeste a la célula central, dicho de otra forma, el estado de la célula central despues de evolucionar deberá ser el mismo que el de su vecino sur-oeste antes de la evolución.

Cabe aclarar que no todas las relaciones serán de interés debido a que no es posible la formación de patrones concretos mediante secuencias de nodos, pero si es notable un conjunto de posibilidades más reducido a estudiar; además, el estudio realizado fue para una evolución, sin embargo, si se desea conocer para n evoluciones, es necesario formar vecindades que tengan un radio $r = n$, [7].

Las relaciones que se pueden ver en la matriz de de Bruijn se dan por parejas, sin embargo, es posible realizar una secuencia de nodos, la cual se define como:

Definición 7. *Si $s_1 s_2 \ldots s_n$ es una secuencia donde s_i representa un nodo, entonces los nodos $s_i s_{i+1}$ deberán cumplir con la condición de traslape de s_i a s_{i+1}.*

Finalmente, los diagramas realizados para la matriz de permanencia son presentados en las figuras 9, 10, 11 y 12; en estos diagrmas se muestran algunas de las posibles secuencias de nodos posibles, la forma de representar estas secuencias de nodos es por medio de expresiones regulares; de igual manera, el diagrama realizado para la matriz de corrimiento se presenta en la figura 13.

Es importante resaltar el hecho de que tales diagramas son solo una pequeña porción del diagrama completo, no obstante, es conveniente realizar este tipo de subdiagramas para tener un entendimiento más concreto del diagrama general.

5. Conclusiones, discusión y trabajo a futuro

A través de los diagramas de de Bruijn se realizó una búsqueda exahustiva de configuraciones resultantes de la interacción entre células, obteniendo como resultado matrices de de Bruijn; la facilidad para adquirir dicha información fue apoyada por programas computacionales y comprobadas por medio de un simulador de la regla Spiral, [6]; no obstante en la búsqueda de dichos resultados el esfuerzo requerido fue muy grande, se observó que la computación asociada a la obtención y manejo de la matriz era de considerable complejidad computacional debido a la gran cantidad de nodos y relaciones existentes, sin embargo, se cree que con ayuda de la programación dinámica se podrían obtener más resultados.

Por otro lado, la complejidad no es el único problema con el que se enfrenta para el análisis via de Bruijn, sino también a la realización de los diagramas, desde la organización de los nodos y las aristas de tal forma que puedan ser entendibles, se convierte no sólo en una labor complicada, sino también artistica.

Otro punto que se observa es que la regla Spiral tiene un comportamiento que ha mostrado ser interesante para fines computacionales, sin embargo, la interacción que existe entre las células crea comportamientos complejos y para poder observar algún patrón se necesita un número considerablemente elevado de células que ayuden a visualizar su generación, lo que hace que se planteé el siguiente problema:

Considerando que los diagramas de de Bruijn muestran el comportamiento local de la regla y para obtener resultados de mayor interés, es necesario realizar traslapes de un mayor número de células, o hacia una evolución n, lo que a su vez eleva exponencialmente el aspecto computacional así como la generación y visualización de los diagramas, entonces, '?Es la regla Spiral adecuada para ser estudiado mediante diagramas de de Bruijn con las herramientas computacionales actuales?

Con todo lo anterior concluimos que los diagramas de de Bruijn son una herramienta muy eficaz en el análisis de una regla de autómata celular, no obstante, los obstaculos son muchos y hasta que no se puedan resolver los problemas asociados, los diagramas de de Bruijn no serán utilizados de manera eficiente para encontrar todas las propiedades que permite obtener en los autómatas celulares lineales, donde la complejidad es menor y por lo tanto, la información se puede manipular de mejor forma.

Referencias

[1] Andrew Adamatzky and Andrew Wuensche (2005), "On spiral glider-guns in hexagonal cellular automata: activator-inhibitor paradigm".

[2] Andrew Adamatzky, Andrew Wuensche and B. De Lacy Costello (2005), "Glider-based computing in reaction diffusion hexagonal cellular automata", *Journal Chaos, Solitons & Fractals*.

[3] Andrew Adamatzky and Andrew Wuensche (2006), "Computing in Spiral Rule Reaction-Diffusion Hexagonal Cellular Automaton," *Complex Systems* **16 (4)**.

[4] Andrew Wuensche, *Discrete Dynamics Lab (DDLab)*, www.ddlab.org, 2009, also follow the links "Spiral rule" and "self-reproduction".

[5] Anthony Ralston (1982), *"De Bruijn sequences-A Model Example of the Interaction of Discrete Mathematics and Computer Science"*, *Mathematics Magazine* Volume 55, 131-143.

[6] Basurto Flores Rogelio, León Hernández Paulina Anaid *"Computación basada en reacción de partículas en un autómata celular hexagonal"*

[7] Harold V. McIntosh (2009), *One Dimensional Cellular Automata*, Luniver Press.

[8] Stephen Wolfram (2002), *A New Kind of Science*, Champaign, Illinois, Wolfram Media Inc.

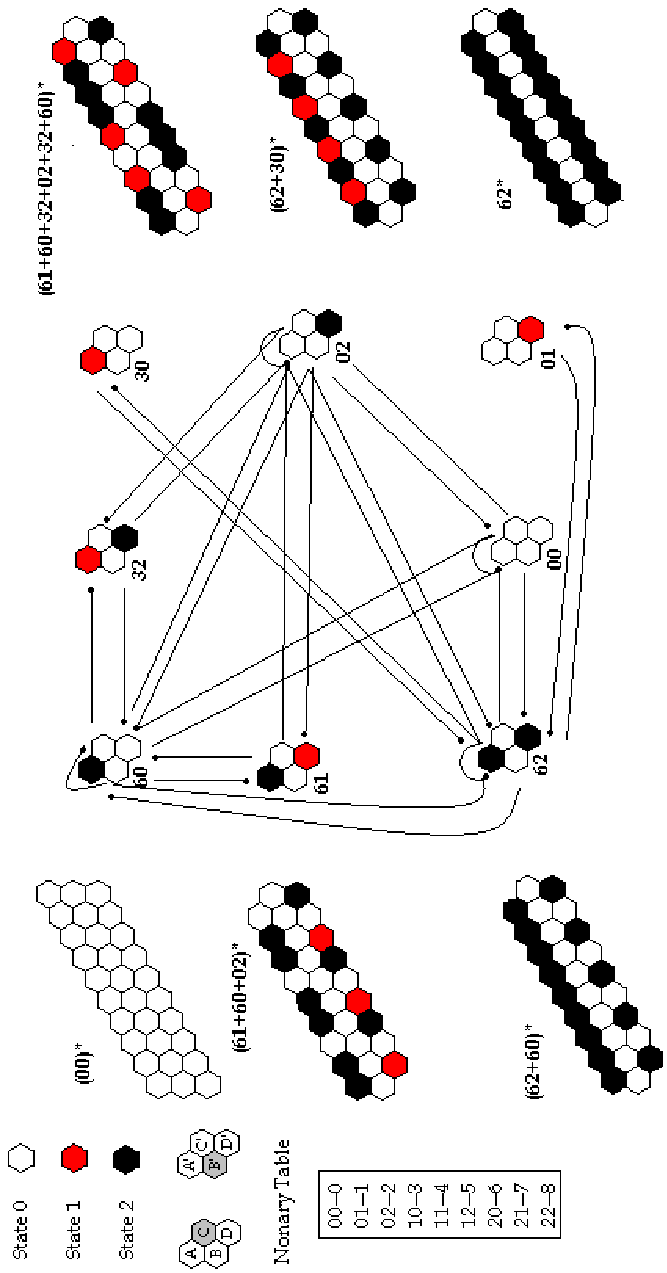

Figura 9: :
Subdiagrama de de Bruijn que muestra la permanencia de las célula central en 0 para una evolución

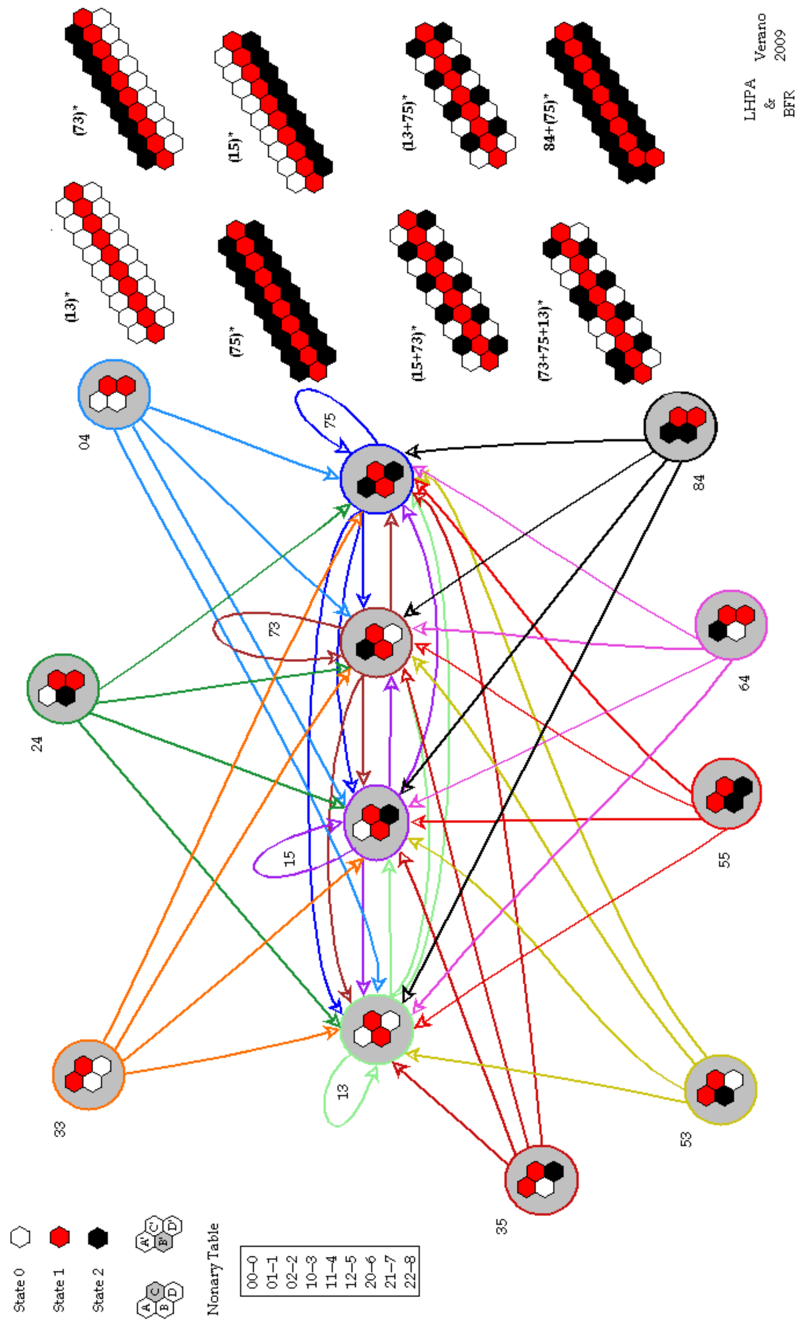

Figura 10: Subdiagrama de de Bruijn que muestra la permanencia de las célula central en estado 1 para una evolución.

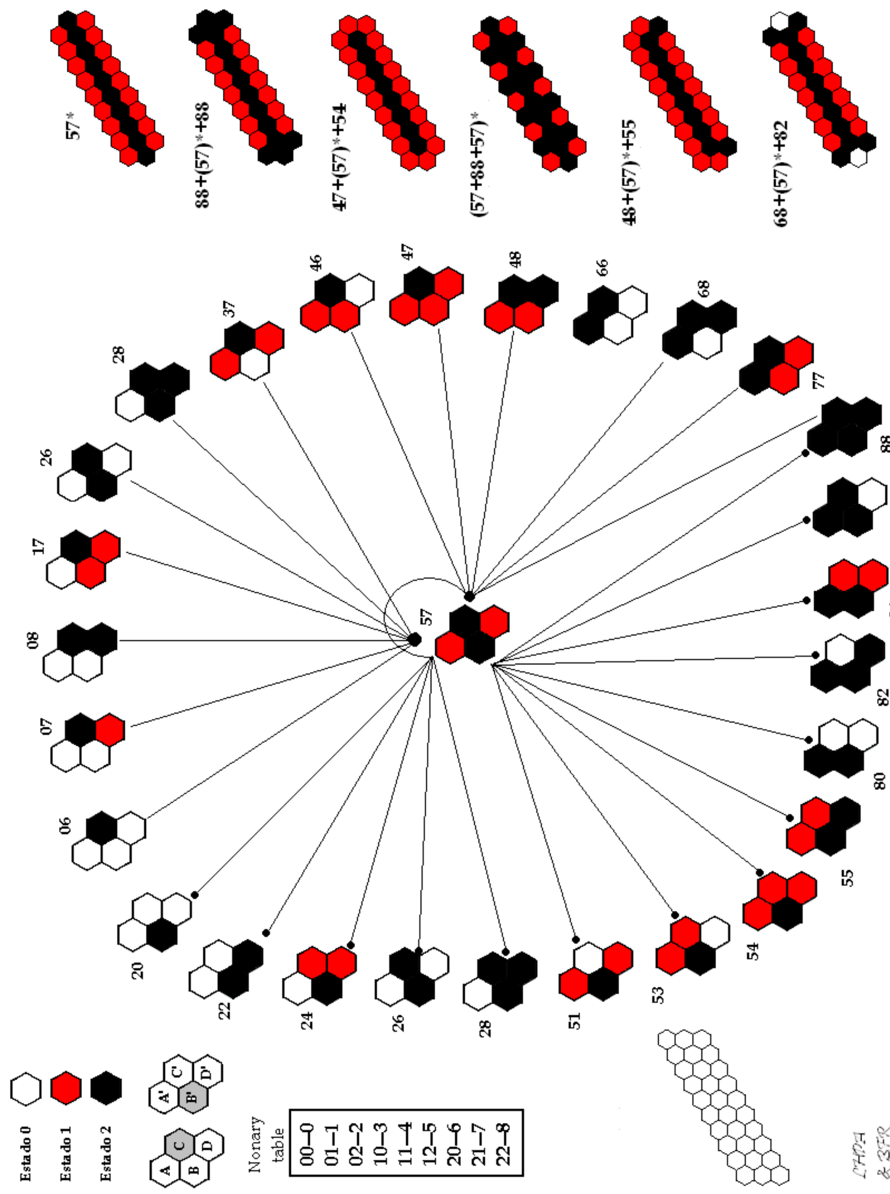

Figura 11: Subdiagrama de de Bruijn que muestra la permanencia de las célula central en estado 2 para una evolución.

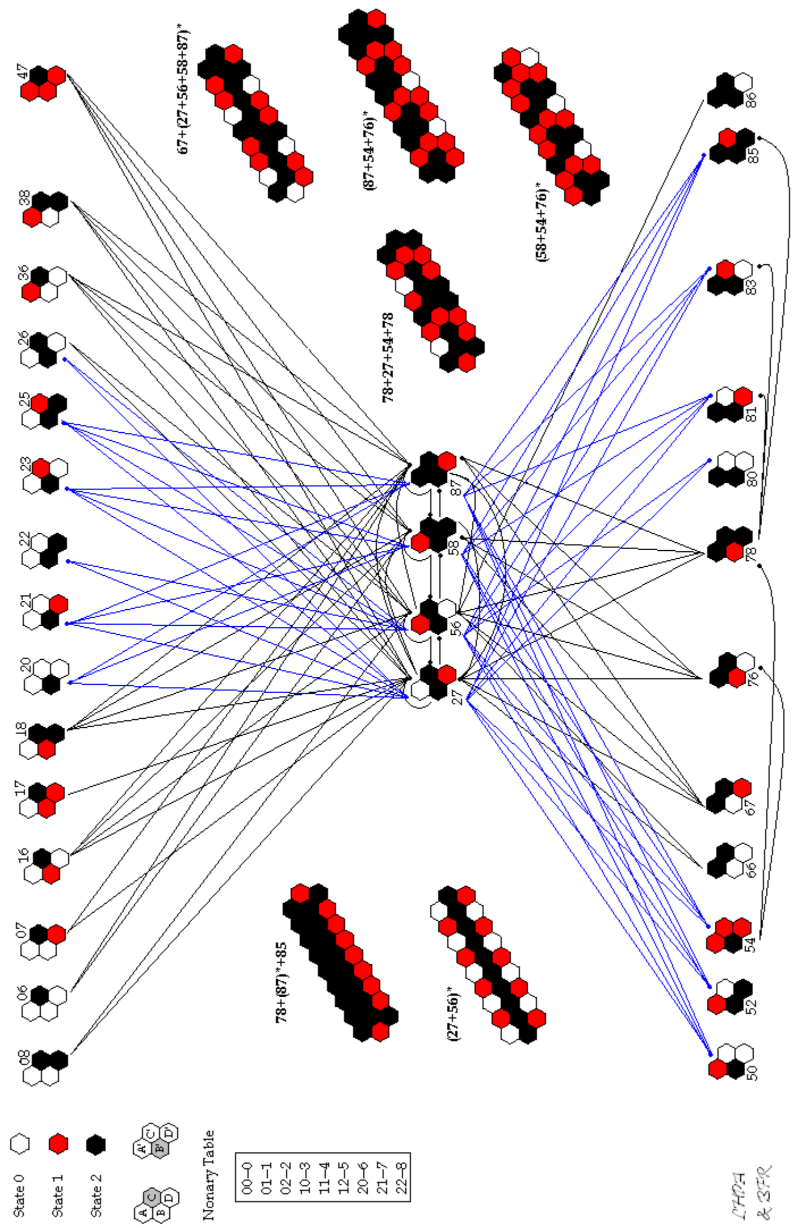

Figura 12: Subdiagrama de de Bruijn que muestra la permanencia de las célula central en estado 2 para una evolución.

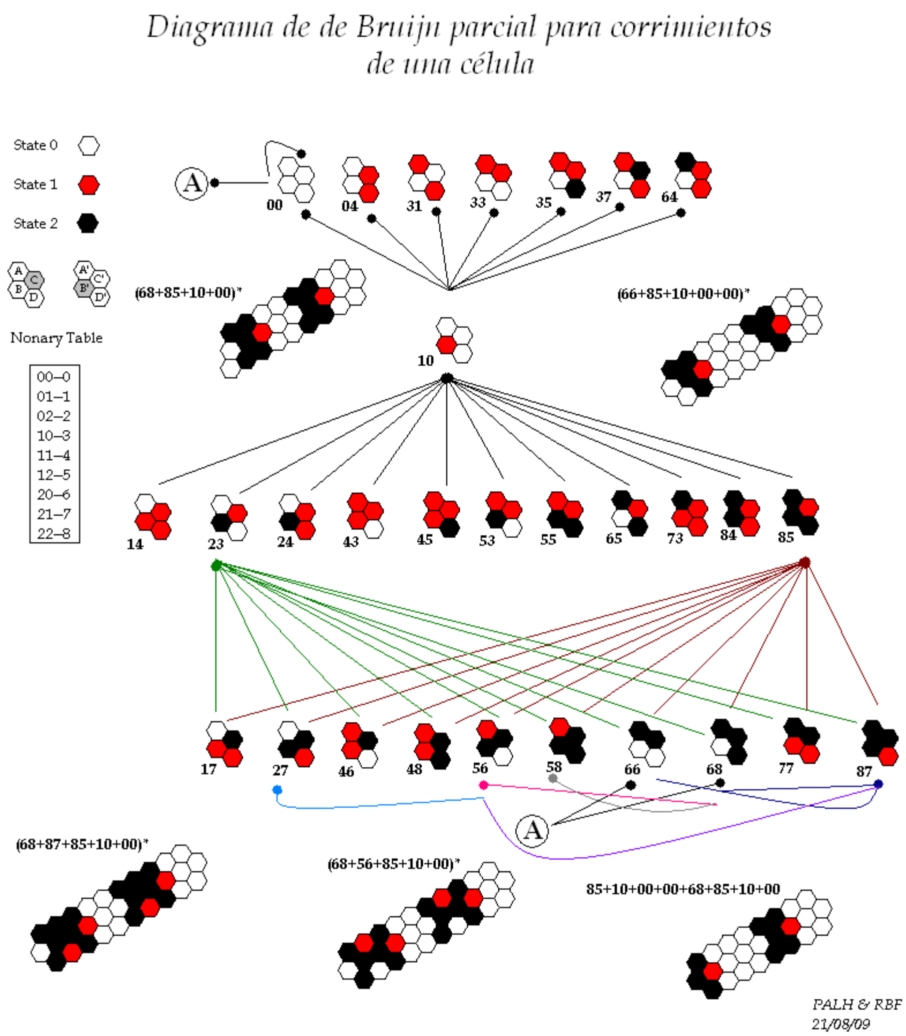

Figura 13: Subdiagrama de corrimiento de la célula B a C.

	00	01	02	03	04	05	06	07	08	10	11	12	13	14	15	16	17	18	20	21	22	23	24	25	26	27	28	30	31	32	33	34	35	36	37	38	40	41	42	43	44	45	46	47	48	50	51	52	53	54	55	56	57	58	60	61	62	63	64	65	66	67	68	70	71	72	73	74	75	76	77	78	80	81	82	83	84	85	86	87	88
00	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
01	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
02	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
03										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
04										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
05										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
06																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
07																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
08																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
10	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
11	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
12	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
13										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
14										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
15										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
16																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
17																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
18																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
20	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
21	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
22	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
23										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
24										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
25										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
26																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
27																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
28																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
30	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
31	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
32	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
33										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
34										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
35										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
36																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
37																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
38																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
40	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
41	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
42	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
43										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
44										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
45										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
46																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
47																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
48																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
50	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
51	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
52	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
53										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
54										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
55										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
56																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
57																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
58																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
60	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
61	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
62	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
63										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
64										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
65										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
66																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
67																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
68																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
70	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
71	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
72	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
73										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
74										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
75										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
76																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
77																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
78																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
80	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
81	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
82	W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																			W	W	W	W	W	W	W	W	W																		
83										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
84										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
85										R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R																			R	R	R	R	R	R	R	R	R									
86																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
87																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B
88																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B																			B	B	B	B	B	B	B	B	B

	00	01	02	03	04	05	06	07	08	10	11	12	13	14	15	16	17	18	20	21	22	23	24	25	26	27	28	30	31	32	33	34	35	36	37	38	40	41	42	43	44	45	46	47	48	50	51	52	53	54	55	56	57	58	60	61	62	63	64	65	66	67	68	70	71	72	73	74	75	76	77	78	80	81	82	83	84	85	86	87	88
00	W		W				W		W																										W																			W		W			W	W	W	W																		
01									W																																															W				W																				
02	W		W			W	W	W	W																					W				W																					W	W	W	W			W		W																		
03										R				R																								R		R		R		R																										R													
04											R		R		R		R																				R		R				R		R																						R		R		R		R										
05														R																								R		R		R		R																										R													
06																				B		B	B																							B	B		B		B		B	B																							B	B		B	
07																			B	B		B		B		B	B																				B		B		B		B																						B	B	B		B	B	B	
08																							B	B		B																					B	B	B		B	B	B																						B		B	B				
10									W																																															W				W																				
11																																																																																	
12			W				W																																															W								W																		
13											R		R		R		R																				R		R				R		R																						R		R		R		R										
14										R		R				R		R																																																	R		R				R		R									
15											R		R		R		R																				R		R				R		R																						R		R		R		R										
16																			B	B		B		B		B	B																			B		B		B		B		B																						B	B	B		B	B	B	
17																		B		B		B		B		B																					B		B	B	B		B																					B		B		B		B		B
18																				B	B	B		B	B	B																				B		B		B		B		B																				B	B		B		B		B	
20	W		W			W	W	W	W																					W				W																					W	W	W	W			W		W																		
21			W				W																																															W								W																		
22	W	W	W	W			W		W																			W								W																			W		W			W	W	W	W																		
23																																						R		R		R		R																										R													
24											R		R		R		R																				R		R				R		R																						R		R		R		R										
25														R																								R		R		R		R																										R													
26																							B	B		B																					B	B	B		B	B	B																						B		B	B				
27																				B	B	B		B	B	B																				B		B		B		B		B																				B	B		B		B		B	
28																				B		B																								B	B		B		B		B																								B				
30									W																																															W				W																				
31																																																																																	
32			W				W																																															W								W																		
33											R		R		R		R																				R		R				R		R																						R		R		R		R										
34										R		R				R		R																																																	R		R				R		R									
35											R		R		R		R																				R		R				R		R																						R		R		R		R										
36																			B	B		B		B		B	B																			B		B		B		B		B																						B	B	B		B	B	B	
37																			B		B		B		B		B																				B		B	B	B		B																					B		B		B		B		B
38																				B	B	B		B	B	B																				B		B		B		B		B																				B	B		B		B		B	
40																																																																																	
41																																																																																	
42																																																																																	
43										R		R				R		R																																																	R		R				R		R									
44																																																																																	
45										R		R				R		R																																																	R		R				R		R									
46																			B		B		B		B		B																				B		B	B	B		B																					B		B		B		B		B
47																				B		B	B	B		B																				B	B	B	B	B	B	B	B	B																				B		B	B	B		B	
48																			B		B		B		B		B																				B		B	B	B		B																					B		B		B		B		B
50			W				W																																															W								W																		
51																																																																																	
52	W								W																																															W				W		W																		
53											R		R		R		R																				R		R				R		R																						R		R		R		R										
54										R		R				R		R																																																	R		R				R		R									
55											R		R		R		R																				R		R				R		R																						R		R		R		R										
56																				B	B	B		B	B	B																				B		B		B		B		B																				B	B		B		B		B	
57																			B		B		B		B		B																				B		B	B	B		B																					B		B		B		B		B
58																			B	B		B		B		B																				B		B		B		B		B																					B		B		B		B	
60	W		W			W	W	W	W																					W				W																					W	W	W	W			W		W																		
61			W				W																																															W								W																		
62	W	W	W	W			W		W																			W								W																			W		W			W	W	W	W																		
63														R																								R		R		R		R																										R													
64											R		R		R		R																				R		R				R		R																						R		R		R		R										
65														R																								R		R		R		R																										R													
66																							B	B		B																					B	B	B		B	B	B																						B		B	B				
67																				B	B	B		B	B	B																				B		B		B		B		B																				B	B		B		B		B	
68																				B		B	B																							B	B		B		B		B																								B				
70			W				W																																															W								W																		
71																																																																																	
72	W								W																																															W				W		W																		
73											R		R		R		R																				R		R				R		R																						R		R		R		R										
74										R		R				R		R																																																	R		R				R		R									
75											R		R		R		R																				R		R				R		R																						R		R		R		R										
76																				B	B	B		B	B	B																				B		B		B		B		B																				B	B		B		B		B	
77																			B		B		B		B		B																				B		B	B	B		B																					B		B		B		B		B
78																			B	B		B		B		B																				B		B		B		B		B																					B		B		B		B	
80	W	W	W	W			W		W																			W								W																			W		W			W	W	W	W																		
81	W								W																																															W				W		W																		
82	W		W			W	W	W	W																					W				W																					W	W	W	W		W	W	W	W																		
83														R																								R		R		R		R																										R													
84											R		R		R		R																				R		R				R		R																						R		R		R		R										
85														R																								R		R		R		R																										R													
86																				B		B	B																							B	B		B		B	B																									B				
87																			B	B		B		B		B																				B		B		B		B		B																					B		B		B		B	
88																						B																									B		B		B		B																									B				

	00	01	02	03	04	05	06	07	08	10	11	12	13	14	15	16	17	18	20	21	22	23	24	25	26	27	28	30	31	32	33	34	35	36	37	38	40	41	42	43	44	45	46	47	48	50	51	52	53	54	55	56	57	58	60	61	62	63	64	65	66	67	68	70	71	72	73	74	75	76	77	78	80	81	82	83	84	85	86	87	88
00	W		W				W		W																											W																			W		W			W	W	W	W																		
01								W																																																	W				W																				
02	W		W			W	W	W	W																					W				W																					W	W	W	W			W		W																		
03																		W																																																W				W											
04																																																																																	
05												W				W																																																W								W									
06																			W		W			W	W	W	W																					W				W																						W	W	W			W		W
07																					W																											W	W																																W
08																			W	W	W	W			W		W																			W								W																			W								
10	R				R																								R		R		R		R																								R																						
11		R		R		R		R																				R		R				R		R																				R		R		R		R																			
12					R																								R		R		R		R																								R																						
13																																																																																	
14										R		R				R		R																																														R		R				R		R									
15											R		R		R		R																				R		R				R		R																				R		R		R		R										
16																							R																								R		R		R		R																								R				
17																				R		R		R		R																				R		R				R		R																				?? R		R		R		R	
18																							R																								R		R		R		R																								R				
20		B		B	B																							B	B		B		B		B	B																							B	B		B																			
21	B	B		B		B		B	B																			B		B				B		B																				B	B	B		B	B	B																			
22					B	B		B																					B	B	B		B	B	B																					B		B	B																						
23										B	B		B		B		B	B																			B		B				B		B																				B	B	B		B	B	B										
24										B		B				B		B																																														B		B				B		B									
25											B	B	B		B	B	B																				B		B				B		B																			B	B		B		B		B										
26																							B	B		B																					B	B	B		B	B	B																					B		B	B				
27																				B	B	B		B	B	B																				B		B				B		B																			B	B		B		B		B	
28																				B		B	B																							B	B		B		B		B																								B				
30									W																																																W				W																				
31																																																																																	
32			W				W																																																W								W																		
33																																																																																	
34																																																																																	
35																																																																																	
36																					W				W																																																W								W
37																																																																																	
38																			W								W																																														W	W	W				W		W
40		R		R		R		R																				R		R				R		R																				R		R		R		R																			
41	R		R				R		R																																														R		R				R		R																		
42		R		R		R		R																				R		R				R		R																				R		R		R		R																			
43										R		R				R		R																																														R		R				R		R									
44																																																																																	
45										R		R				R		R																																														R		R				R		R									
46																				R		R		R		R																				R		R				R		R																				R		R		R		R	
47																			R		R				R		R																																														R		R				R		R
48																				R		R		R		R																				R		R				R		R																				R		R		R		R	
50	B	B		B		B		B	B																			B		B				B		B																				B	B	B		B	B	B																			
51	B		B				B		B																																														B	B		B		B		B																			
52		B	B	B		B	B	B																				B		B				B		B																			B	B		B		B		B																			
53										B		B				B		B																																														B		B				B		B									
54																																																																																	
55										B		B				B		B																																														B		B				B		B									
56																				B	B	B		B	B	B																				B		B				B		B																			B	B		B		B		B	
57																			B		B				B		B																																														B		B				B		B
58																			B	B		B		B		B																				B		B				B		B																				B		B		B		B	
60	W		W			W	W	W	W																					W				W																					W	W	W	W			W		W																		
61			W				W																																																W								W																		
62	W	W	W	W			W		W																			W								W																			W		W			W	W	W	W																		
63												W				W																																																W								W									
64																																																																																	
65										W								W																																																W				W		W									
66																			W	W	W	W			W		W																			W								W																			W		W			W	W	W	W
67																			W								W																																				W												W				W		W
68																			W		W			W	W	W	W																					W				W		W																			W	W	W	W		W	W	W	W
70					R																								R		R		R		R																								R																						
71		R		R		R		R																				R		R				R		R																				R		R		R		R																			
72					R																								R		R		R		R																								R																						
73											R		R		R		R																				R		R				R		R																				R		R		R		R										
74										R		R				R		R																																														R		R				R		R									
75											R		R		R		R																				R		R				R		R																				R		R		R		R										
76																							R																								R		R		R		R																								R				
77																				R		R		R		R																				R		R				R		R																				R		R		R		R	
78																							R																								R		R		R		R																								R				
80					B	B		B																					B	B	B		B	B	B																					B		B	B																						
81		B	B	B		B	B	B																				B		B				B		B																			B	B		B		B		B																			
82		B		B	B																							B	B		B		B		B																								B																						
83											B	B	B		B	B	B																				B		B				B		B																			B	B		B		B		B										
84										B		B				B		B																																														B		B				B		B									
85										B	B		B		B		B																				B		B				B		B																				B		B		B		B										
86																				B		B	B																							B	B		B		B		B																								B				
87																			B	B		B		B		B																				B		B				B		B																				B		B		B		B	
88																							B																								B		B		B		B																								B				