Introducción a la topología para análisis complejo

Idelfonso Izquierdo Márquez
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
idelfonso.izquierdo@gmail.com

XIX Verano de la Investigación Científica
Departamento de Aplicación de Microcomputadoras
Instituto de Ciencias, Universidad Autónoma de Puebla

28 de agosto de 2009

Resumen

Este reporte proporciona una introducción a la topología usada en el análisis complejo. Se comienza con un estudio de los números complejos y después se analizan las características más importantes de los principales tipos de conjuntos definidos en espacios métricos.

Contenido

1 Números complejos

1.1 Conjuntos

Un *conjunto* es una colección bien definida de objetos. Comúnmente los conjuntos se denotan por letras mayúsculas $A, B, \ldots$. Los objetos pertenecientes al conjunto son llamados sus *elementos*, y son denotados frecuentemente por letras minúsculas. Para indicar que un objeto x pertenece a un conjunto X se escribe $x \in X$, para indicar que x no pertenece a X se escribe $x \notin X$.

Los conjuntos se pueden especificar escribiendo sus elementos separados por comas y encerrados entre llaves, por ejemplo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; o bien, dando una propiedad que describa a los elementos del conjunto como en $B = \{x : x \text{ es entero}, x > 0\}$, que se lee "$B$ es el conjunto de todos los x tal que x es un entero y x es mayor que cero".

En la siguiente definición se introducen conceptos muy importantes usados en todo el documento:

Definición 1.1. Sean A y B conjuntos. A es un *subconjunto* de B, escrito como $A \subset B$, si cada elemento de A pertenece también a B. A es un *superconjunto* de B, escrito como $A \supset B$, si $B \subset A$. $A \subset B$ ó $A \supset B$ no excluye la posibilidad de que $A = B$. Cuando $A \subset B$ pero $A \neq B$ se dice que A es un *subconjunto propio* de B.

En la definición anterior se usaron los conceptos de igualdad y desigualdad entre conjuntos. Una manera de definir la igualdad entre conjuntos es decir que dos conjuntos son iguales si contienen los mismos elementos (no necesariamente en el mismo orden); pero la manera más usual es la siguiente:

Definición 1.2. Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Muchas veces se trabaja con subconjuntos de un conjunto fijo llamado *conjunto universal*, el cual es un superconjunto de todos los conjuntos bajo discusión. El conjunto universal es denotado generalmente por U. También existe un conjunto que es un subconjunto de todos los conjuntos bajo discusión: el *conjunto vacío*; este conjunto no contiene elementos y es denotado por $\emptyset$.

Existen cuatro operaciones básicas entre conjuntos: unión, intersección, complemento relativo y complemento absoluto:

1. La *unión* de dos conjuntos A y B, denotada por $A \cup B$, es el conjunto $A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$, donde la o es utilizada en sentido inclusivo.

2. La *intersección* de dos conjuntos A y B, denotada por $A \cap B$, es el conjunto $A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$. Si $A \cap B = \emptyset$ se dice que A y B son *disjuntos*.

3. El *complemento relativo* de un conjunto B con respecto de un conjunto A, denotado por $A - B$, es el conjunto $A - B = \{x : x \in A, x \notin B\}$. Este conjunto también es conocido como la *diferencia* de A y B.

4. El *complemento absoluto* o simplemente el *complemento* de un conjunto A, denotado por A^c, es el conjunto $A^c = \{x : x \in U, x \notin A\}$. A^c es también $U - A$.

Hay también varias leyes o identidades que son útiles en las operaciones entre conjuntos, el siguiente teorema enlista esas leyes:

Teorema 1.1. *Leyes del algebra de conjuntos:*

(a)	$A \cup A = A; \quad A \cap A = A.$	[idempotencia]
(b)	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$	[asociativas]
(c)	$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A.$	[conmutativas]
(d)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$	[distributivas]
(e)	$A \cup \emptyset = A; \quad A \cap U = A; \quad A \cup U = U; \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$	[identidades]
(f)	$A \cup A^c = U; \quad A \cap A^c = \emptyset; \quad (A^c)^c = A; \quad U^c = \emptyset; \quad \emptyset^c = U.$	[complementos]
(g)	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c; \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$	[De Morgan]

Las leyes de De Morgan se pueden generalizar para un número n de conjuntos:

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^c = (A_1)^c \cap (A_2)^c \cap \cdots \cap (A_n)^c$$
$$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)^c = (A_1)^c \cup (A_2)^c \cup \cdots \cup (A_n)^c$$

Puesto que un conjunto es una colección de objetos, nada impide que dichos objetos sean también conjuntos. Comúnmente se llama a un conjunto de conjuntos una *clase*, *familia*, o *colección* de conjuntos, y se usan letras como $\mathscr{F}, \mathscr{G}, \ldots$ para denotar a las colecciones de conjuntos.

Por último, algunos conjuntos importantes se denotan por un símbolo en particular, entre ellos están el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, y el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$.

1.2 El campo de los números complejos

Definición 1.3. Un *campo* es un conjunto F con dos operaciones llamadas adición y multiplicación, las cuales satisfacen los llamados axiomas de campo:

A1. Si $x, y \in F$, entonces su suma $x + y$ está en F.

A2. $x + y = y + x$ para todo $x, y \in F$.

A3. $(x + y) + z = x + (y + z)$ para todo $x, y, z \in F$.

A4. Existe un elemento $0 \in F$ tal que $0 + x = x$ para cada $x \in F$.

A5. Para cada $x \in F$ existe un elemento $-x \in F$ tal que $x + (-x) = 0$.

A6. Si $x, y \in F$, entonces su producto xy está en F.

A7. $xy = yx$ para todo $x, y \in F$.

A8. $(xy)z = x(yz)$ para todo $x, y, z \in F$.

A9. Existe un elemento $1 \in F$ tal que $1x = x$ para cada $x \in F$.

A10. Si $x \in F$ y $x \neq 0$ entonces existe un elemento $1/x \in F$ tal que $x(1/x) = 1$.

A11. $x(y + z) = xy + xz$ para todo $x, y, z \in F$.

El número 0 es llamado elemento neutro de la adición, y el número 1 es llamado elemento neutro de la multiplicación. El número -x es llamado inverso aditivo de x, y el número $1/x$ es llamado inverso multiplicativo de x.

Ahora que se ha definido el concepto de campo, se procede a demostrar que el conjunto de los números complejos es un campo. Pero antes es necesario especificar que cosa es el conjunto de los números complejos:

Definición 1.4. Un número complejo es un par ordenado (a, b) de números reales. Tomando todos los posibles pares ordenados se forma el conjunto de los números complejos $\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

La igualdad, suma, y multiplicación de dos números complejos se definen como sigue:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ y } b = d$$
$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Definiendo la suma y la multiplicación de dos números complejos en esta forma, y asumiendo que $\mathbb{R}$ es un campo, se puede demostrar que los números complejos constituyen un campo, con los números (0,0) y (1,0) tomando respectivamente los papeles de 0 y 1 en la definición de campo:

A1. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, claramente pertenece a $\mathbb{C}$.

A2. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b)$.

A3.

$$\begin{aligned}[(a,b)+(c,d)]+(e,f) &= (a+c,b+d)+(e,f)\\ &= ((a+c)+e,(b+d)+f)\\ &= (a+(c+e),b+(d+f))\\ &= (a,b)+(c+e,d+f)\\ &= (a,b)+[(c,d)+(e,f)]\end{aligned}$$

A4. $(0,0)+(a,b)=(0+a,0+b)=(a,b)$.

A5. Definiendo el inverso aditivo de (a,b) como $-(a,b)=(-a,-b)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}(a,b)+[-(a,b)] &= (a,b)+(-a,-b)\\ &= (a+(-a),b+(-b))\\ &= (a-a,b-b)\\ &= (0,0).\end{aligned}$$

A6. Es claro que $(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$ pertenece a $\mathbb{C}$.

A7. $(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)=(ca-db,cb+da)=(c,d)(a,b)$.

A8.

$$\begin{aligned}[(a,b)(c,d)](e,f) &= (ac-bd,ad+bc)(e,f)\\ &= [(ac-bd)e-(ad+bc)f,\ (ac-bd)f+(ad+bc)e]\\ &= (ace-bde-adf-bcf,\ acf-bdf+ade+bce)\\ &= [a(ce-df)-b(cf+de),\ a(cf+de)+b(ce-df)]\\ &= (a,b)(ce-df,cf+de)\\ &= (a,b)[(c,d)(e,f)].\end{aligned}$$

A9. $(1,0)(a,b)=(1\cdot a-0\cdot b,\ 1\cdot b+0\cdot a)=(a-0,b+0)=(a,b)$.

A10. Definiendo el inverso multiplicativo de (a,b) de la siguiente forma:

$$\frac{1}{(a,b)}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right),$$

se obtiene:

$$(a,b)\left(\frac{1}{(a,b)}\right)=(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2},\frac{-ab+ab}{a^2+b^2}\right)=(1,0).$$

A11.

$$
\begin{aligned}
(a,b)[(c,d)+(e,f)] &= (a,b)(c+e,d+f) \\
&= [a(c+e)-b(d+f), a(d+f)+b(c+e)] \\
&= (ac+ae-bd-bf,\ ad+af+bc+be) \\
&= (ac-bd, ad+bc)+(ae-bf, af+be) \\
&= (a,b)(c,d)+(a,b)(e,f).
\end{aligned}
$$

1.3 El número i

Los números complejos de la forma $(a,0)$ se comportan exactamente como los números reales, por ejemplo $(a,0)(b,0)=(ab,0)$, y por esto suele identificarse al número complejo $(a,0)$ con el número real a.

El número i es esencial en el estudio de los números complejos:

Definición 1.5. $i=(0,1)$.

Multiplicando i consigo mismo se obtiene:

$$i \cdot i = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1.$$

Es común denotar al número complejo (a,b) mediante $a+bi$ (o mediante $a+ib$) donde a y b son reales, lo siguiente es la justificación:

$$(a,b) = (a,0)+(0,b) = (a,0)+(b,0)(0,1) = a+bi.$$

Si $a+bi$ es un número complejo, entonces se dice que a es la parte real del número complejo y que b es la parte imaginaria. Si $b=0$ entonces $a+bi$ es un número real, y si $a=0$ entonces $a+bi$ es un imaginario puro. El número 0 es a la vez real e imaginario puro.

La parte real de un número complejo z se denota por $\Re z$, y la parte imaginaria por $\Im z$. Por ejemplo, para $z=a+bi$, $\Re z = a$ y $\Im z = b$.

1.4 Conjugación y valor absoluto

Dos operaciones de gran importancia para los números complejos son la conjugación y el valor absoluto:

Definición 1.6. La transformación que transforma el número complejo $a+bi$ en el número complejo $a-bi$ es llamada *conjugación compleja*, y el número $a-bi$ es llamado *el conjugado* de $a+bi$. El conjugado de un número complejo z es denotado por $\bar{z}$.

Definición 1.7. El *valor absoluto* de un número complejo $z = a + bi$, denotado por $|z|$, es la raíz cuadrada no negativa de $z\bar{z}$, es decir, $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Los siguiente teoremas muestran algunas propiedades de la conjugación compleja y del valor obsoluto de los número complejos:

Teorema 1.2. *Si z y w son números complejos, entonces:*

(a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

(b) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.

(c) $\overline{(z/w)} = \bar{z}/\bar{w}, \quad (w \neq 0)$.

(d) $z + \bar{z} = 2\Re z; \quad z - \bar{z} = 2i\Im z$.

(e) $z\bar{z}$ *es real y no negativo.*

(f) $\bar{\bar{z}} = z$.

Teorema 1.3. *Si z y w son números complejos, entonces:*

(a) *Si $z \neq 0$, se tiene que $|z| > 0$. Si $z = 0$, $|z| = 0$.*

(b) $|z| = |\bar{z}|$.

(c) $|zw| = |z||w|$.

(d) $|z/w| = |z| \,/\, |w|, \quad (w \neq 0)$.

(e) $|\Re z| \leq |z|; \quad |\Im z| \leq |z|$.

(f) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

1.5 El plano complejo

Puesto que un número complejo es un par ordenado de números reales, se puede establecer una biyección entre los números complejos y los puntos en el plano $\mathbb{R}^2$, es decir, a cada número $z \in \mathbb{C}$ le corresponde un único punto $(\Re z, \Im z)$ en $\mathbb{R}^2$ y recíprocamente. A causa de esto, el número complejo z es a veces referido como *el punto* z.

También un número complejo $z = a + bi$ se puede considerar como un vector OP cuyo punto inicial es el origen O y cuyo punto final P es (a, b) (figura 1). La parte real del número complejo corresponde a la componente horizontal del vector y la parte imaginaria a la componente vertical. Debido a que los puntos en el eje x corresponden a números reales y los puntos en el eje y a imaginarios puros, estos ejes son llamados *eje real* y *eje imaginario* respectivamente. Al plano formado por los ejes real e imaginario se le llama *plano complejo*.

Mediante esta representación geométrica de los números complejos, se observa que el valor absoluto de un número complejo es la distancia del origen al punto que representa al

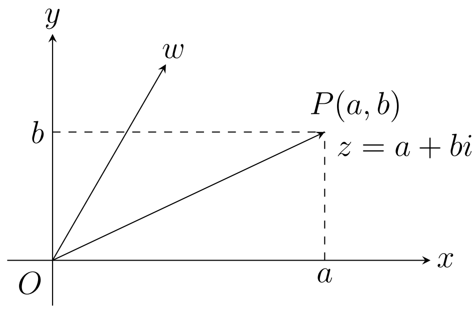


Figura 1: El número complejo $z = a + bi$ en el plano.

número, o equivalentemente, el valor absoluto es la longitud del vector $z = a + bi$, es decir, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Con ayuda de esta representación geométrica, puede definirse una medida de distancia entre dos números complejos. De este modo, si z y w son dos números complejos, entonces por la definición de distancia entre vectores $d(z, w) = |z - w|$ (ver figura 1).

1.6 Proyección estereográfica

En muchas ocasiones es útil agregar al plano complejo un punto que represente el infinito, para formar el *plano complejo extendido* $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Sin embargo, es deseable que todos los puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$ tengan una representación geométrica concreta, pero en el plano no hay forma de que un punto corresponda al infinito.

Para hacer que todos los puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$ tengan una representación geométrica concreta se construye una esfera S con ecuación en el espacio tridimensional $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ (centro en el origen y radio 1); se hace corresponder el plano complejo con el plano $x_3 = 0$ (este plano pasa por el origen y corta a S a lo largo del ecuador); y se define el punto N como $N = (0, 0, 1)$, con lo cual N es el polo norte de S.

Con esto, para todo punto z del plano complejo se tiene que la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por N y por z intersecta a la esfera S en un punto $Z \neq N$ (figura 2). Así, se obtiene una biyección entre $\mathbb{C}$ y $S - \{N\}$. Cuando $|z| > 1$, Z se encuentra en el hemisferio norte de S; para $|z| = 1$, Z está en el ecuador; y cuando $|z| < 1$, Z está en el hemisferio sur de S.

Si z se aleja arbitrariamente del origen, esto es $|z| \to \infty$, se observa que Z se aproxima a N. De manera recíproca, los puntos en S cercanos a N corresponden a puntos en el plano complejo con valores absolutos muy grandes. Por lo tanto, es natural hacer corresponder a N con el punto en el infinito para el plano complejo. Mediante esta correspondencia se obtiene una biyección entre el plano complejo extendido $\widehat{\mathbb{C}}$ y la esfera S. Esta biyección es llamada *proyección estereográfica* de la esfera S sobre el plano complejo extendido.

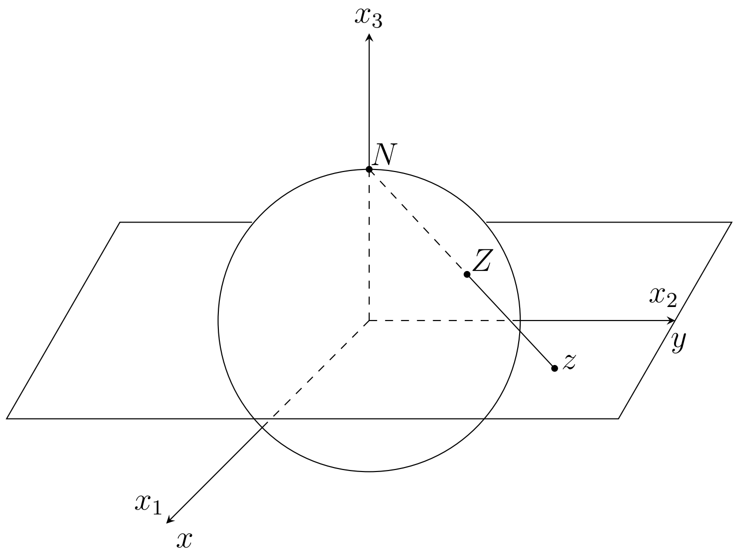


Figura 2: Proyección estereográfica.

Es posible expresar las coordenadas del punto $(Z \neq N) \in S$ en términos de las coordenadas del punto $z \in \mathbb{C}$, como se estudia a continuación:

Sean x y y los ejes real e imaginario del plano complejo (figura 2), con lo cual z es igual a $x + yi$, y sean x_1, x_2, y x_3 las coordenadas de Z. Un vector de dirección para la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por N y por z es $\overrightarrow{zN} = \langle 0 - x, 0 - y, 1 - 0 \rangle$ (porque z tiene coordenas $(x, y, 0)$ en $\mathbb{R}^3$). De esta manera, siendo $t \in \mathbb{R}$, la recta tiene ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned}
x_1 &= x + (0 - x)t = x - xt = (1 - t)x \\
x_2 &= y + (0 - y)t = y - yt = (1 - t)y \\
x_3 &= 0 + (1 - 0)t = t
\end{aligned}$$

Las coordenadas de Z se obtienen a partir del valor de t en donde la recta intersecta a S. Sea t dicho valor, entonces

$$\begin{aligned}
1 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\
&= [(1 - t)x]^2 + [(1 - t)y]^2 + t^2 \\
&= (1 - t)^2(x^2 + y^2) + t^2 \\
&= (1 - t)^2|z|^2 + t^2
\end{aligned}$$

Trasponiendo t^2 al otro lado de la ecuación y tomando en cuenta que $t \neq 1$ (porque para

$t = 1$ se obtiene $Z = N$) se encuentra el valor t

$$\begin{aligned} 1 - t^2 &= (1-t)^2|z|^2 \\ (1-t)(1+t) &= (1-t)(1-t)|z|^2 \\ 1 + t &= |z|^2 - t|z|^2 \\ t &= \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \end{aligned}$$

En este valor de t la recta intersecta a S en el punto $Z = (x_1, x_2, x_3)$. Por lo tanto, las coordenadas de Z en términos de x y y son

$$\begin{aligned} x_1 &= (1-t)x = \left(1 - \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)x = \frac{|z|^2+1-|z|^2+1}{|z|^2+1} = \frac{2x}{|z|^2+1}, \\ x_2 &= (1-t)y = \frac{2y}{|z|^2+1}, \\ x_3 &= t = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}. \end{aligned}$$

Ahora se desea definir una función de distancia entre los elementos de $\widehat{\mathbb{C}}$ de forma tal que la distancia entre $z, z' \in \widehat{\mathbb{C}}$, denotada por $d(z, z')$, sea igual a la distancia entre los puntos correspondientes Z y Z' en $\mathbb{R}^3$.

Sean $z = x + yi$ y $z' = x' + y'i$ dos puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$, y sean $Z = (x_1, x_2, x_3)$ y $Z' = (x_1', x_2', x_3')$ los puntos correspondientes en S. Entonces

$$\begin{aligned} [d(z,z')]^2 &= (x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2 \\ &= x_1^2 - 2x_1x_1' + (x_1')^2 + x_2^2 - 2x_2x_2' + (x_2')^2 + x_3^2 - 2x_3x_3' + (x_3')^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + ((x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2) - 2x_1x_1' - 2x_2x_2' - 2x_3x_3' \\ &= 2 - 2(x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3') \qquad [\text{puesto que } Z \text{ y } Z' \text{ están en } S] \end{aligned}$$

Como $z + \bar{z} = 2x$, y $-(z - \bar{z})i = 2y$, se pueden expresar los valores de x_1, x_2, y x_3 encontrados anteriormente de la siguiente forma

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{-(z - \bar{z})i}{|z|^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned}
x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3' &= \left[\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}\right]\left[\frac{z'+\bar{z}'}{|z'|^2+1}\right] + \left[\frac{-(z-\bar{z})i}{|z|^2+1}\right]\left[\frac{-(z'-\bar{z}')i}{|z'|^2+1}\right] \\
&\quad + \left[\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right]\left[\frac{|z'|^2-1}{|z'|^2+1}\right] \\
&= \frac{(z+\bar{z})(z'+\bar{z}') - (z-\bar{z})(z'-\bar{z}') + (|z|^2-1)(|z'|^2-1)}{(|z'|^2+1)(|z'|^2+1)} \\
&= \frac{2z\bar{z}' + 2\bar{z}z' + |z|^2|z'|^2 - |z|^2 - |z'|^2 + 1}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}
\end{aligned}$$

Y así,

$$\begin{aligned}
[d(z,z')]^2 &= 2 - 2\left[\frac{2z\bar{z}' + 2\bar{z}z' + |z|^2|z'|^2 - |z|^2 - |z'|^2 + 1}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}\right] \\
&= \frac{2(|z|^2+1)(|z'|^2+1) - 2(2z\bar{z}' + 2\bar{z}z' + |z|^2|z'|^2 - |z|^2 - |z'|^2 + 1)}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)} \\
&= \frac{4(|z|^2 + |z'|^2 - z\bar{z}' - \bar{z}z')}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)} \\
&= \frac{4[x^2 + y^2 + (x')^2 + (y')^2 - 2xx' - 2yy']}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)} \qquad [\text{ya que } z\bar{z}' + \bar{z}z' = 2xx' + 2yy'] \\
&= \frac{4[(x-x')^2 + (y-y')^2]}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)} \\
&= \frac{4|z-z'|^2}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d(z,z') = \frac{2|z-z'|}{\sqrt{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}}.$$

2 Topología

2.1 Espacios métricos

Un espacio métrico es un par (X, d) donde X es un conjunto y d es una función llamada *función de distancia* o *métrica* definida de $X \times X$ en $\mathbb{R}$, la cual satisface las siguientes condiciones para $x, y, z \in X$:

▷ $d(x,y) \geq 0$

▷ $d(x,y) = 0 \iff x = y$

▷ $d(x,y) = d(y,x)$

▷ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

La última condición es conocida como *desigualdad del triángulo*, y puede extenderse a más elementos, por ejemplo para $x, y, z, w \in X$ se tiene que $d(x,w) \leq d(x,y) + d(y,z) + d(z,w)$.

Como ejemplos conocidos de espacios métricos están:

◇ $\mathbb{R}^n$ con $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$,

◇ $\mathbb{C}$ con la función de distancia definida como $d(x,y) = |x-y|$,

◇ el plano complejo extendido $\widehat{\mathbb{C}}$ con la función de distancia

$$d(z,z') = \frac{2|z-z'|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}}.$$

Muchas veces suele referirse a un espacio métrico (X,d) como el espacio métrico X, quedando implícita la función de distancia.

2.2 Conjuntos abiertos y cerrados

Sea (X,d) un espacio métrico, para cualquier $\epsilon > 0$ y cualquier $x \in X$ se define la *bola abierta* con centro en x y radio ϵ como el conjunto

$$B(x,\epsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \epsilon\}.$$

Igualmente la *bola cerrada* con centro en x y radio ϵ es el conjunto

$$\bar{B}(x,\epsilon) = \{y \in X : d(x,y) \leq \epsilon\}.$$

Frecuentemente cuando se trabaja en el plano $\mathbb{R}^2$, se llama *discos* a las bolas.

Usando la definición de bola abierta, se introduce el concepto de vecindad:

Definición 2.1. En un espacio métrico X un conjunto $N \subset X$ es llamado una *vecindad* de $x \in X$ si N contiene una bola abierta $B(x,\epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$.

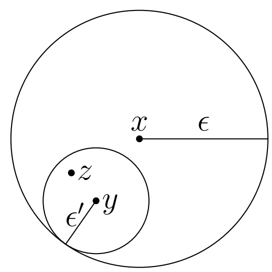
Y usando el concepto de vecindad se define lo que es un conjunto abierto:

Definición 2.2. Un conjunto $G \subset X$ es *abierto* si es una vecindad de cada uno de sus elementos, es decir, si para cada $x \in G$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset G$.

El siguiente teorema afirma que una bola abierta es un conjunto abierto, la figura ayuda a clarificar la demostración:

Teorema 2.1. *Una bola abierta es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea $B(x, \epsilon)$ una bola abierta. Si $y \in B(x, \epsilon)$ entonces existe $\epsilon' = \epsilon - d(x, y) > 0$. Para todos los z tales que $d(z, y) < \epsilon'$ se tiene, por la desigualdad del triángulo, que $d(z, x) < \epsilon' + d(y, x)$. Esto implica que $B(y, \epsilon') \subset B(x, \epsilon)$. Así, $B(x, \epsilon)$ es una vecindad de cada uno de sus elementos.



□

Y en este otro teorema se prueban más cosas acerca de los conjuntos abiertos:

Teorema 2.2. *Sea (X, d) un espacio métrico, entonces:*

(a) *Los conjuntos $\emptyset$ y X son abiertos.*

(b) *La unión de cualquier colección de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

(c) *La intersección de cualquier colección de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

Demostración. (a) $\emptyset$ es abierto trivialmente porque en él no existe x alguno tal que $B(x, \epsilon)$ no esté incluido en $\emptyset$. X es abierto porque es vecindad de cada uno de sus elementos.

(b) Sea $G_1, G_2, \ldots, G_n$ una colección de conjuntos abiertos y sea $H = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$. Si $x \in H$ entonces $x \in G_k$ para algún k entre 1 y n. Por ser G_k abierto existe un $\epsilon > 0$ para el cual $B(x, \epsilon) \subset G_k \subset H$. De $B(x, \epsilon) \subset H$ se sigue que H es abierto.

(c) Sea $G_1, G_2, \ldots, G_n$ una colección de conjuntos abiertos y sea $H = \bigcap_{k=1}^{n} G_k$. Si $x \in H$ entonces $x \in G_k$ para $k = 1, \ldots, n$. Puesto que cada G_k es abierto se tiene que para cada conjunto G_k existe un $\epsilon_k > 0$ tal que $B(x, \epsilon_k) \subset G_k$. Sea $\epsilon = min\,\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$, entonces para todos los conjuntos G_k, $B(x, \epsilon) \subset G_k$, y así $B(x, \epsilon) \subset H$.

□

Los conjuntos cerrados se definen a partir de los conjuntos abiertos:

Definición 2.3. Un conjunto $G \subset X$ es *cerrado* si su complemento es abierto.

Teorema 2.3. *Un subconjunto G de un espacio métrico X es abierto si y sólo si su complemento es cerrado.*

Demostración. Sea G abierto, como $G = (G^c)^c$ se tiene que G es el complemento de G^c, luego por definición G^c es cerrado. Por otra parte, si G^c es cerrado, entonces G es abierto por definición. □

Para los conjuntos cerrados existen resultados semejantes al teorema 2.2:

Teorema 2.4. *Sea (X, d) un espacio métrico, entonces:*

(a) *Los conjuntos $\emptyset$ y X son cerrados.*

(b) *La unión de cualquier colección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

(c) *La intersección de cualquier colección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

Demostración. (a) $\emptyset$ y X son cerrados porque sus complementos X y $\emptyset$, respectivamente, son abiertos.

(b) Sea $G_1, G_2, \ldots, G_n$ una colección de conjuntos cerrados. Para probar que $\bigcup_{k=1}^n G_k$ es cerrado hay que probar que su complemento $\left(\bigcup_{k=1}^n G_k\right)^c$ es abierto. Por el teorema 2.3 el complemento de cada G_k es abierto. Por De Morgan $\left(\bigcup_{k=1}^n G_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^n (G_k)^c$, y este conjunto es un conjunto abierto puesto que es la intersección de una colección de conjuntos abiertos.

(c) Sea $G_1, G_2, \ldots, G_n$ una colección de conjuntos cerrados, como $\left(\bigcap_{k=1}^n G_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^n (G_k)^c$ es abierto, se tiene que $\bigcap_{k=1}^n G_k$ es cerrado.

□

Llegado a este punto conviene aclarar que un conjunto pueder ser a la vez abierto y cerrado, y que existen conjuntos que no son abiertos ni cerrados.

En la siguiente serie de definiciones A es un subconjunto de un espacio métrico X.

Definición 2.4. El *interior* de A es el conjunto $\bigcup \{G : G \text{ es abierto y } G \subset A\}$, esto es, la unión de todos los subconjuntos abiertos de A. Equivalentemente, el interior de A es el conjunto abierto más grande contenido en A. El interior de A se denota por $\operatorname{Int} A$.

Definición 2.5. La *cerradura* de A es el conjunto $\bigcap \{G : G \text{ es cerrado y } G \supset A\}$, es decir, la intersección de todos los superconjuntos cerrados de A. Equivalentemente, la cerradura de A es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A. La cerradura de A se denota por A^-.

Definición 2.6. La *frontera* de A es la intersección entre la cerradura de A y la cerradura de A^c, es decir, el conjunto $A^- \cap (A^c)^-$. La frontera de A se denota por ∂A.

Definición 2.7. El *exterior* de A es el interior de A^c, o también, es el complemento de A^-. El exterior de A se denota por $(A^-)^c$.

El siguiente teorema muestra varias relaciones entre estos conjuntos:

Teorema 2.5. *Sea A un subconjunto de un espacio métrico X, entonces:*

(a) *A es abierto si y sólo si $A = \text{Int } A$.*

(b) *A es cerrado si y sólo si $A = A^-$.*

(c) $(A^c)^- = (\text{Int } A)^c$.

(d) $A^- = (\text{Int } A^c)^c$.

(e) $\partial A = A^- - \text{Int } A$.

(f) *$x_0 \in \text{Int } A$ si y sólo si existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \subset A$.*

(g) *$x_0 \in A^-$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$, $B(x_0, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.*

Demostración. (a) Si A es abierto, entonces para cada $x \in A$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset A$. Evidentemente la unión de todas las bolas $B(x, \epsilon)$ es A. Además, ésta unión es igual a $\text{Int } A$ puesto que para cualquier subconjunto abierto G de A se tiene que $G \subset \bigcup\{B(x, \epsilon) : x \in G\}$. Luego $A = \text{Int } A$. Por otro lado si $A = \text{Int } A$ entonces A es abierto porque $\text{Int } A$ es abierto.

(b) Si A es cerrado, entonces $\bigcap\{G : G \text{ es cerrado y } G \supset A\} = A^- = A$, porque A es el superconjunto cerrado más pequeño de A. Por otra parte, si $A = A^-$ entonces A es cerrado debido a que A^- es cerrado.

(c) Si $x \in (A^c)^-$, entonces $x \in A^c$ porque $A^c \subset (A^c)^-$. Como $x \in A^c$, se tiene que $x \notin A$ y también que $x \notin \text{Int } A$ porque $\text{Int } A \subset A$. Puesto que $x \notin \text{Int } A$, resulta que $x \in (\text{Int } A)^c$. Por otro lado, si $x \in (\text{Int } A)^c$ entonces $x \notin \text{Int } A$, y tampoco en A. Luego $x \in A^c$ y también en $(A^c)^-$.

(d) $A^- = [(A^c)^c]^- = (\text{Int } A^c)^c$. La última igualdad se obtuvo de (c).

(e) $x \in \partial A \iff x \in (A^- \cap (A^c)^-) \iff x \in A^- \text{ y } x \notin \text{Int } A \iff x \in (A^- - \text{Int } A)$.

(f) Si $x_0 \in \text{Int } A$ entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \subset \text{Int } A$, porque $\text{Int } A$ es abierto. Como $\text{Int } A \subset A$, resulta que $B(x_0, \epsilon) \subset A$. En la otra dirección, si $B(x_0, \epsilon) \subset A$ para algún $\epsilon > 0$, entonces por ser $B(x_0, \epsilon)$ abierto (teorema 2.1) se tiene que $x_0 \in \text{Int } A$, porque $\text{Int } A$ es la unión de todos los subconjuntos abiertos de A.

(g) Supóngase que $x_0 \in A^-$, por (d) $x_0 \in (\text{Int } A^c)^c$, y de este modo $x_0 \notin \text{Int } A^c$. Con esto y por (f) se obtiene que para cada $\epsilon > 0$, $B(x_0, \epsilon) \not\subset A^c$. De esta forma, para cada $\epsilon > 0$ hay un punto $y \in B(x_0, \epsilon)$ que no pertenece a A^c, con lo cual $y \in A$, y así $y \in (B(x_0, \epsilon) \cap A)$. Ahora supóngase que $x_0 \notin A^- = (\text{Int } A^c)^c$, entonces $x_0 \in \text{Int } A^c$, y por (f) existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \subset A^c$. De esto se obtiene que $B(x_0, \epsilon) \cap A = \emptyset$.

□

2.3 Conjuntos conexos

Definición 2.8. Un espacio métrico (X, d) es *conexo* si los únicos subconjuntos de X que son a la vez abiertos y cerrados son X y $\emptyset$.

Normalmente se trabaja con subconjuntos de espacios métricos. La definición anterior también se usa para definir subconjuntos conexos de espacios métricos. Otra definición muy útil de conjunto conexo es la siguiente:

Definición 2.9. Un conjunto abierto [cerrado] X es conexo si no puede ser expresado como la unión de dos conjuntos abiertos [cerrados] no vacíos y disjuntos.

Esta definición intuitivamente dice que un conjunto es conexo si está conformado por una sola pieza; si está formado por dos o más conjuntos disjuntos no vacíos entonces está formado por más de una pieza y por lo tanto no es conexo. Como ejemplo considérese el subconjunto de $\mathbb{R}$, $X = (0, 1) \cup (2, 3)$, en este caso X no es conexo. El siguiente teorema dice cuáles subconjuntos de $\mathbb{R}$ son conexos.

Teorema 2.6. *Un subconjunto X de $\mathbb{R}$ es conexo si y sólo si es un intervalo.*

Demostración. Sea $X = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, y sea A un subconjunto abierto de X tal que $a \in A$ y $A \neq X$ (como $a \in A$, A no es abierto en $\mathbb{R}$, pero si en X). Si se prueba que A no es también cerrado, entonces se habrá probado que X es conexo.

Puesto que A es abierto, existe un $\epsilon > 0$ tal que $[a, a + \epsilon) \subset A$. Sea r el mayor ϵ para el cual $[a, a + \epsilon) \subset A$, es decir $r = sup\{\epsilon : [a, a + \epsilon) \subset A\}$. De este modo se tiene que $[a, a + r) \subset A$, pero $a + r \notin A$, porque de lo contrario, puesto que A es abierto, habría un $\delta > 0$ tal que $[a, a + r + \delta) \subset A$, contradiciendo la definición de r. Luego $a + r \notin A$, y por tanto $a + r \in X - A$. Si A es también cerrado, entonces $X - A$ es abierto, y por tanto se puede encontrar un $\delta > 0$ tal que $(a + r - \delta,\ a + r + \delta) \subset X - A$, lo cual contradice el hecho de que $[a, a+r) \subset A$. Por lo tanto, A no puede ser cerrado. Para los otros tipos de intervalos la demostración es similar.

Ahora supóngase que X no es un intervalo, entonces existen dos puntos $a, b \in X$, $a < b$, tal que $(a, b) \not\subset X$ (un teorema afirma que X es un intervalo si y sólo si para cualquier par de puntos $a, b \in X$, con $a < b$ se tiene que $(a, b) \subset X$). Entonces, existe un punto $c \notin X$ tal que $a < c < b$. Como $a \in (-\infty, c)$ y $b \in (c, \infty)$ se tiene que $X = (X \cap (-\infty, c)) \cup (X \cap (c, \infty))$, donde $(X \cap (-\infty, c))$ y $(X \cap (c, \infty))$ son conjuntos disjuntos no vacíos. Por lo tanto, X no es conexo. $\square$

Y este teorema dice cuales subconjuntos abiertos del plano son conexos:

Teorema 2.7. *En el plano, un conjunto abierto no vacío es conexo si y sólo si dos puntos cualesquiera en el conjunto puden ser unidos mediante un polígono contenido completamente en el conjunto.*

Demostración. Supongamos primero que A es un conjunto abierto conexo, hay que probar que cualesquiera dos puntos en A pueden ser unidos mediante un polígono contenido en A.

Elíjase un punto $a \in A$. Sea A_1 el conjunto de todos los puntos en A que pueden ser unidos a a mediante un polígono, y sea A_2 el conjunto de todos los puntos en A que no pueden ser unidos a a mediante un polígono. Si $a_1 \in A_1$ entonces existe un disco $D(a_1, \epsilon)$ que contiene puntos en A (porque A es abierto). Como todos los puntos en este disco pueden ser unidos a a_1 mediante un segmento de línea recta y desde a_1 hasta a mediante un polígono, entonces el disco entero está contenido en A_1 y por lo tanto A_1 es abierto. Si $a_2 \in A_2$ entonces $D(a_2, \epsilon)$, para algún $\epsilon > 0$, está contenido en A. Si un punto cualquiera en este disco puede ser unido a a mediante un polígono, entonces a_2 también puede ser unido a a mediante un polígono, lo cual contradice la definición de A_2, luego todo el disco está en A_2 y así A_2 es abierto. Como A es conexo y A_1 es no vacío (porque contiene a a) se tiene, por la definición de conjunto conexo, que A_2 es vacío. Luego todos los puntos en A pueden ser unidos a a mediante un polígono, y de este modo cualesquiera dos puntos pueden ser unidos entre sí mediante un polígono usando a como un punto intermedio.

Ahora supóngase que A está conformado por dos conjuntos abiertos disjuntos, $A = A_1 \cup A_2$, luego A no es conexo. Supóngase que $a_1 \in A_1$ puede ser unido a $a_2 \in A_2$ mediante un segmento de recta. Este segmento tiene una representación paramétrica $z = a_1 + (a_2 - a_1)t$, $0 \leq t \leq 1$. Los subconjuntos del intervalo $0 < t < 1$ que corresponde a puntos en A_1 y A_2 son abiertos, disjuntos y no vacíos. De este modo no todos los puntos en A pueden ser conectados mediante un polígono contenido completamente en A. $\square$

Definidos los conjuntos conexos, una importante definición es la siguiente:

Definición 2.10. Una *región* es un conjunto abierto que es no vacío y conexo.

De esta manera, $\mathbb{R}$, el plano, un intervalo abierto en $\mathbb{R}$, y un disco abierto en el plano son regiones. De hecho, las regiones pueden ser consideradas como las equivalentes multidimensionales de los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$.

2.4 Sucesiones

Muchos conceptos de la teoría de espacios métricos pueden ser expresados en términos de sucesiones, por lo cual es importante comprender los conceptos básicos de las sucesiones.

Definición 2.11. Una *sucesión infinita* o *secuencia infinita* es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos.

El contradominio de una sucesión puede ser cualquier conjunto, en particular si $\mathbb{R}$ es el contradominio de una sucesión se obtiene una sucesión de números reales, y si el contradominio es $\mathbb{C}$ se obtiene una sucesión de números complejos.

Si f es una sucesión infinita, entonces a cada entero positivo k le corresponde un valor $f(k)$. Los números en el contradominio de f se pueden denotar por $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$. Si se toma $a_n = f(n)$ para cada entero positivo n, entonces se obtiene la siguiente forma de una sucesión: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

Los valores a_k son los *términos* de la sucesión. Las sucesiones son ordenadas ya que a_1 es el primer término, a_2 es el segundo, y el enésimo término es a_n para todo entero positivo n. También se usa $\{a_n\}$ para denotar a una sucesión cuyo enésimo término es a_n.

Definición 2.12. Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico (X, d) *converge* a x si para cada $\epsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ siempre que $x_n \geq N$. Si $\{x_n\}$ converge a x, entonces x es el *límite* de $\{x_n\}$, lo cual se escribe $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, o como $x_n \to x$. Si $\{x_n\}$ no converge a algún $x \in X$, entonces se dice que $\{x_n\}$ es *divergente.*

El siguiente teorema afirma que el límite de una sucesión convergente es único:

Teorema 2.8. *Si una sucesión converge, entonces su límite es único.*

Demostración. Sean x y x' dos límites de la sucesión convergente $\{x_n\}$. Para $\epsilon > 0$ arbitrario existen enteros N y N' tales que $d(x_n, x) < \epsilon/2$ siempre que $n \geq N$, y $d(x_n, x') < \epsilon/2$ siempre que $n \geq N'$. Si $n \geq max\{N, N'\}$, entonces por la desigualdad del triángulo $d(x, x') \leq d(x_n, x) + d(x_n, x')$. De este modo, $d(x, x') \leq d(x_n, x) + d(x_n, x') < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$, luego $d(x, x') < \epsilon$. Entonces, haciendo ϵ arbitrariamente pequeño, $d(x, x')$ se aproxima a 0, con lo cual $d(x, x') = 0$, y $x = x'$. $\square$

El siguiente teorema muestra algunas propiedades de las sucesiones de números complejos:

Teorema 2.9. *Supóngase que* $\{s_n\}$ *y* $\{t_n\}$ *son sucesiones complejas, y que* $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, *y* $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. *Entonces:*

(a) $\lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = s + t$.

(b) $\lim_{n\to\infty}(cs_n) = cs$, *para cualquier número* c.

(c) $\lim_{n\to\infty}(s_n t_n) = st$.

Demostración. La función de distancia usada comúnmente en $\mathbb{C}$ es el valor absoluto.

(a) Para cualquier $\epsilon > 0$ existen enteros positivos N_1 y N_2 tales que si $n \geq N_1, N_2$, entonces $|s_n - s| < \epsilon/2$, y $|t_n - t| < \epsilon/2$. Si $N = max\{N_1, N_2\}$, entonces $n \geq N$ implica que $|(s_n + t_n) - (s + t)| = |(s_n - s) + (t_n - t)| \leq |s_n - s| + |t_n - t| < \epsilon$.

(b) Dado $\epsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que si $n \geq N$ entonces para cualquier número c es $|s_n - s| < \epsilon/|c|$. Así para $n \geq N$ $|cs_n - cs| = |c(s_n - s)| = |c||s_n - s| < |c|(\epsilon/|c|) = \epsilon$.

(c) Dado $\epsilon > 0$ existe enteros N_1 y N_2 tales que si $n \geq N_1, N_2$ entonces $|s_n - s| < \sqrt{\epsilon}$, y $|t_n - t| < \sqrt{\epsilon}$. Si $N = max\{N_1, N_2\}$, entonces $n \geq N$ implica que $|(s_n - s)(t_n - t)| = |s_n - s||t_n - t| < \epsilon$. De este modo, $\lim_{n\to\infty}(s_n - s)(t_n - t) = 0$, debido a que ϵ puede escogerse arbitrariamente pequeño. Usando este hecho y usando que $lim_{n\to\infty} s_n = s$ y $lim_{n\to\infty} t_n = t$ en la identidad $s_n t_n - st = (s_n - s)(t_n - t) + s(t_n - t) + t(s_n - s)$, se llega a que $\lim_{n\to\infty}(s_n t_n - st) = 0$, con lo cual $\lim_{n\to\infty}(s_n t_n) = st$.

□

Las sucesiones de Cauchy son muy importantes en topología:

Definición 2.13. Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico X es llamada una *sucesión de Cauchy* si para cada $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ para todo $n, m \geq N$.

Teorema 2.10. *En cualquier espacio métrico X cada sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión converge en un espacio métrico X. Si $\{x_n\}$ converge a x entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ para todo $n \geq N$. Por lo tanto, para $n, m \geq N$ se tiene que $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < 2\epsilon$. Y así $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. □

Muchas veces en topología se llama *puntos* a los elementos de los conjuntos. La siguiente definición utiliza esto:

Definición 2.14. Si A es un subconjunto de un espacio métrico X, entonces un punto $x \in X$ es un *punto límite* de A si existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos en A tal que $x = \lim x_n$.

El siguiente teorema muestra la relación entre puntos límite y conjuntos cerrados:

Teorema 2.11. *Un conjunto A es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos límite.*

Demostración. Supóngase que A es cerrado y que $x = \lim x_n$ donde cada x_n pertenece a A. Así para cada $\epsilon > 0$ siempre hay cuando menos un punto de $\{x_n\}$ en $B(x, \epsilon)$. De manera que $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$, y por el teorema 2.5 (g) se tiene que $x \in A^-$, y por (b) del mismo teorema $x \in A$.

Ahora supóngase que A no es cerrado; entonces hay un punto $x_0 \in A^-$ que no pertenece a A. De nuevo, por el teorema 2.5 (g) se tiene que para cada $\epsilon > 0$, $B(x_0, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. En particular, para cada entero n hay un punto x_n en $B(x_0, 1/n) \cap A$; así, $d(x_n, x_0) < 1/n$, lo cual implica que $x_n \to x_0$, y puesto que $x_0 \notin A$, resulta que A no contiene a todos sus puntos límite. □

2.5 Conjuntos completos

Los conjuntos completos se definen en base a las sucesiones de Cauchy:

Definición 2.15. Un espacio métrico X es *completo* si cada sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ de elementos pertenecientes a X converge a un elemento de X.

Teorema 2.12. $\mathbb{C}$ *es completo.*

Demostración. Si $\{x_n + y_n i\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$, entonces $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$. Dado que $\mathbb{R}$ es completo (la demostración de este hecho no se incluye en este documento) $x_n \to x$ y $y_n \to y$ para $x, y \in \mathbb{R}$. De esto se sigue que $x + yi = \lim\,(x_n + y_n i)$, y así $\mathbb{C}$ es completo. □

A continuación se presenta el concepto de diámetro de un subconjunto de un espacio métrico:

Definición 2.16. Sea A un subconjunto de un espacio métrico X. El *diámetro* de A, denotado diam A, es el valor $sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

Teorema 2.13. diam $A =$ diam A^-.

Demostración. De $A \subset A^-$ se deriva que diam $A \leq$ diam A^-. Ahora, sean x y y puntos arbitrarios en A^-. Para algún $\epsilon > 0$ existen puntos x' y y' en A tales que $d(x', x) < \epsilon$ y $d(y', y) < \epsilon$. Por la desigualdad del triángulo $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y)$, luego $d(x, y) < 2\epsilon + d(x', y') \leq 2\epsilon +$ diam A. Como esto se cumple para dos puntos cualesquiera en A^-, se sigue que diam $A^- \leq 2\epsilon +$ diam A, de donde finalmente se obtiene que diam $A^- \leq$ diam A. □

El teorema anterior es usado en la demostración del importante teorema de Cantor que se enuncia a continuación:

Teorema 2.14 (Teorema de Cantor)**.** *Un espacio métrico* (X, d) *es completo si y sólo si para cualquier sucesión* $\{F_n\}$ *de conjuntos cerrados no vacíos con* $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ *y* diam $F_n \to 0$, *se tiene que* $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ *consiste de un solo punto.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $\{F_n\}$ una sucesión de conjuntos cerrados tales que $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$, y diam $F_n \to 0$. Para cada entero n, sea x_n un punto arbitrario en F_n. Como $F_a \supset F_b$ si $a \leq b$, se tiene que si $n, m \geq N$ entonces $x_n, x_m \in F_N$, y por tanto $d(x_n, x_m) \leq$ diam F_N. Puesto que $F_n \to 0$, N puede ser elegido suficientemente grande tal que para cualquier $\epsilon > 0$ se tenga que diam $F_N < \epsilon$. Esto muestra que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Debido a que X es completo, existe $x_0 = \lim x_n$. Como x_n pertenece a cada F_n tal que $n \geq N$ (ya que $F_N \supset F_n$) y como $x_n \to x_0$, resulta que $x_0 \in F_n$ para cada n. Con esto, $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, y por tanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ contiene al menos el punto x_0. Si y también pertenece a $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, entonces tanto x_0 como y pertenecen a F_n para cada n, pero como diam $F_n \to 0$ y $d(x_0, y) \leq$ diam F_n se tiene que $d(x_0, y) = 0$, y así $y = x_0$. Con esto se ha probado que en un espacio métrico completo se cumple que para cualquier sucesión $\{F_n\}$ de conjuntos cerrados no vacíos con $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ y *diam* $F_n \to 0$, el conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ consiste de un solo punto.

Ahora sea $\{F_n\}$ una sucesión de conjuntos con $F_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}^-$, así $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en X, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ para todo los $n, m \geq N$; de esto se obtiene que diam $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \leq \epsilon$ para todo $n \geq N$. Por el teorema 2.12, diam $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} =$ diam $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}^-$, así que diam $F_n \leq \epsilon$ para todo $n \geq N$, y de esta manera diam $F_n \to 0$ porque ϵ puede ser arbitrariamente pequeño. Por hipótesis $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ solo contiene el punto $x_0 \in X$, lo cual implica que $x_0 \in F_n$ para todo n y que $d(x_0, x_n) \leq$ diam F_n para todo n. Entonces, como diam $F_n \to 0$, resulta que $x_0 = \lim x_n$; lo cual muestra que X es completo. □

2.6 Conjuntos compactos

Para definir a un conjunto compacto es necesaria la noción de cubrimiento de un conjunto:

Definición 2.17. Una colección $\mathscr{G}$ de conjuntos es un *cubrimiento* de X si X está contenido en la unión de los conjuntos pertenecientes a $\mathscr{G}$, es decir, $X \subset \bigcup\{G : G \in \mathscr{G}\}$. Si cada conjunto $G \in \mathscr{G}$ es abierto, entonces $\mathscr{G}$ es un *cubrimiento abierto* de X.

Definición 2.18. Un *subcubrimiento* de un cubrimiento $\mathscr{G}$ de X es una subcolección de $\mathscr{G}$ tal que X es un subconjunto de la unión de los conjuntos pertenecientes a la subcolección.

Un cubrimiento o subcubrimiento es finito si consiste de un número finito de conjuntos. Ahora se define lo que es un conjunto compacto:

Definición 2.19. Un subconjunto K de un espacio métrico X es *compacto* si y sólo si cada cubrimiento abierto de K contiene un subcubrimiento finito.

Como un ejemplo considérese el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Si $G_n = \{z : |z| < 1 - \frac{1}{n}\}$ para $n = 2, 3, \ldots$, entonces $\{G_2, G_3, \ldots\}$ es un cubrimiento abierto de A. Este cubrimiento no contiene un subcubrimiento finito de A, así que A no es compacto.

Teorema 2.15. *Sea K un subconjunto compacto de un espacio métrico X, entonces:*

(a) *K es cerrado.*

(b) *Si $F \subset K$ es cerrado, entonces F es compacto.*

Demostración. (a) Sea $x_0 \in K^-$; por el teorema 2.5 (g), $B(x_0, \epsilon) \cap K \neq \emptyset$ para cada $\epsilon > 0$. Sea $G_n = X - \bar{B}(x, 1/n)$. Así cada G_k es abierto puesto que es el complemento de un conjunto cerrado. Supóngase que $x_0 \notin K$, entonces $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ (porque $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}(x_0, 1/n) = \{x_0\}$, y así x_0 es el único elemento de X que no pertenece a $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$). Dado que K es compacto hay un entero m tal que $K \subset \bigcup_{n=1}^{m} G_n$. Como $G_1 \subset G_2 \subset \cdots$, resulta que $K \subset G_m = X - \bar{B}(x_0, 1/m)$. Pero $K \subset X - \bar{B}(x_0, 1/m)$ implica que $B(x_0, 1/m) \cap K = \emptyset$, que es una contradicción al hecho que $B(x_0, \epsilon) \cap K \neq \emptyset$ para cada $\epsilon > 0$. Luego no es posible que $x_0 \notin K$, así $x_0 \in K$, y por tanto $K^- \subset K$. Como $K \subset K^-$ resulta que $K = K^-$, y por el teorema 2.5 (b), K es cerrado.

(b) Sea $\mathscr{G}$ un cubrimiento abierto de $F \subset K$. Dado que F es cerrado $X - F$ es abierto, y $\mathscr{G} \cup (X - F)$ es un cubrimiento abierto de K, porque $(K - F) \subset (X - F)$. Como K es compacto hay un número finito m de conjuntos en el cubrimiento $\mathscr{G}$ de F tales que $K \subset \left(\bigcup_{n=1}^{m} G_n \cup (X - F)\right)$. Como $F \subset K$, se tiene que $F \subset \bigcup_{n=1}^{m} G_n$, y por tanto que F es compacto.

□

Se presenta ahora la definición de un importante concepto llamado propiedad de intersección finita:

Definición 2.20. Si $\mathscr{F}$ es una colección de subconjuntos de X se dice que $\mathscr{F}$ tiene la *propiedad de intersección finita* si siempre que $\{F_1, F_n, \ldots, F_n\} \subset \mathscr{F}$ entonces $(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n) \neq \emptyset$.

Sea $\mathscr{F}$ una colección de subconjuntos de X, entonces para la colección $\mathscr{G} = \{X - F : F \in \mathscr{F}\}$ se tiene que: $\bigcup\{X - F\} = \bigcup\{F^c\} = \left(\bigcap\{F\}\right)^c = X - \bigcap\{F\}$. Esto se utiliza en la demostración del siguiente teorema:

Teorema 2.16. *Si un conjunto $K \subset X$ es compacto, entonces cada colección (finita o infinita) $\mathscr{F}$ de subconjuntos cerrados de K con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía, esto es $\bigcap\{F : F \in \mathscr{F}\} \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $K \subset X$ compacto y sea $\mathscr{F}$ es una colección de subconjuntos cerrados de K con la propiedad de intersección finita. Supóngase que $\bigcap\{F : F \in \mathscr{F}\} = \emptyset$, y sea

$\mathscr{G} = \{X - F : F \in \mathscr{F}\}$. Entonces $\bigcup\{X - F : F \in \mathscr{F}\} = X - \bigcap\{F : F \in \mathscr{F}\} = X - \emptyset = X$, por la suposición que se hizo. De este modo $\mathscr{G}$ es un cubrimiento abierto de X, y en particular es un cubrimiento abierto de K. Debido a que K es compacto existen conjuntos $F_1, F_2, \ldots, F_n$ tales que $K \subset \bigcup_{k=1}^{n}(X - F_k) = X - \bigcap_{k=1}^{n} F_k$. De $K \subset X - \bigcap_{k=1}^{n} F_k$ se obtiene que $\bigcap_{k=1}^{n} F_k \subset X - K$, y puesto que cada F_k es subconjunto de K, $\bigcap_{k=1}^{n} F_k$ debe ser el conjunto vacío para que pueda ser subconjunto de $X - K$, lo cual contradice la propiedad de intersección finita de $\mathscr{F}$. Por lo tanto $\bigcap\{F : F \in \mathscr{F}\} \neq \emptyset$. □

Por último, se demuestra que todo espacio métrico compacto es completo.

Teorema 2.17. *Un espacio métrico compacto es completo.*

Demostración. Sea X un espacio métrico compacto. Entonces para cualquier colección $\mathscr{G}$ de conjuntos cerrados de X que tenga la propiedad de intersección finita se tiene que $\bigcap\{G : G \in \mathscr{G}\} \neq \emptyset$.

Sea $\mathscr{F}$ una colección de subconjuntos cerrados no vacíos de X en la cual $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ y diam $F_n \to 0$. De esta forma $\mathscr{F}$ tiene la propiedad de intersección finita porque siempre que $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \subset \mathscr{F}$ entonces $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n = F_n \neq \emptyset$. Y además como X es compacto $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$, es decir, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ contiene al menos un elemento. Pero debido a que diam $F_n \to 0$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ consiste de un solo elemento. Entonces, por el teorema de Cantor, X es completo. □

Bibliografía

[1] John B. Conway. *Functions of One Complex Variable*. Springer-Verlang, second edition, 1978.

[2] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, third edition, 1964.

[3] Lars V. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill, third edition, 1979.

[4] Liang-Shin Hahn, and Bernard Epstein. *Classical Complex Analysis*. Jones and Bartlett Publishers, 1996.

[5] Seymour Lipschutz. *Theory and Problems of General Topology*. McGraw-Hill, 1965.