1. Lógica proposicional

1. Considere la función booleana

$$f(x,y,z,w) = \overline{(y+\overline{z})\overline{(\overline{x}\,\overline{w})}} + \overline{(y+z)} \tag{1}$$

(a) Obtenga la forma normal disyuntiva de la función f, (1).

Solución:

Demostración. Considerando que (1) se puede escribir como

$$\overline{(y \lor \overline{z}) \land \overline{(\overline{x} \land \overline{w})}} \lor \overline{(y \lor z)} \tag{2}$$

entonces, se pueden aplicar equivalencias lógicas:

$$\equiv (\overline{y} \land \overline{\overline{z}}) \lor \overline{\overline{(\overline{x} \land \overline{w})}} \lor (\overline{y} \land \overline{z}) \qquad \text{D' Morgan} \tag{3}$$
$$\equiv (\overline{y} \land z) \lor (\overline{x} \land \overline{w}) \lor (\overline{y} \land \overline{z}) \qquad \text{Doble negación} \tag{4}$$
$$\equiv (\overline{y} \land z) \lor (\overline{y} \land \overline{z}) \lor (\overline{x} \land \overline{w}) \qquad \text{Conmutativa} \tag{5}$$
$$\equiv \overline{y} \lor (\overline{x} \land \overline{w}) \qquad \text{Distributiva} \tag{6}$$

La proposición (4) está en forma normal disyuntiva, incluso cuando no sea la expresión más sintética, como (6). □

(b) Calcule una función simplificada como productos de sumas mediante mapas de Karnaugh.

Solución:

Demostración. Considerando la proposición (6), se pueden obtener los *maxtérminos* en un mapa de Karnaugh

$$(\overline{y} + \overline{w})(\overline{x} + \overline{y}) \tag{7}$$

wz \ yx	00	01	11	10
00			0	
01			0	
11			0	0
10			0	0

□

(c) Calcule una función simplificada como sumas de productos mediante mapas de Karnaugh.

Solución:

Demostración. Considerando la proposición (6), se pueden obtener los *mintérminos* en un mapa de Karnaugh

$$\overline{y} + (\overline{x}\,\overline{w}) \tag{8}$$

$wz \backslash yx$	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1		1
11	1	1		
10	1	1		

□

(d) Calcule el dual de la función f, (1) y de la función simplificada como productos de sumas.

Solución:

Demostración. – □

(e) Dibuja el circuito de la función más simplificada usando compuertas NAND.

Solución:

Demostración. La función simplificada de f en términos de compuestas NAND es

$$\overline{\left(\overline{(\overline{w} \wedge \overline{x})} \wedge y\right)} \tag{9}$$

□

2. Sea $a, b, c, p \in \mathbb{Z}$ con p un primo.

(a) Demuestre que si $p \neq 2$, $p|(2a + 5b)$ y $(b, p) \neq 1$, entonces $p|a$.

Solución:

Demostración. – □

(b) Refute que si $ac = bc$, entonces $a = b$.

Solución:

Demostración. – □

3. Demuestre por inducción matemática la proposición P con $n \in \mathbb{N}$

$$P(n) : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) \tag{10}$$

Solución:

Demostración. Considerando que el dominio de la variable n es $\mathbb{N}$, el caso inicial es $n = 1$, por lo tanto:

$$P(1) : \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{i}} > 2\left(\sqrt{1+1} - 1\right)$$

Al verificar $P(1)$, resulta ser verdadera:

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{i}} > 2\left(\sqrt{1+1} - 1\right) \tag{11}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} > 2\left(\sqrt{2} - 1\right) \tag{12}$$

$$\frac{1}{1} > 2\left(\sqrt{2}\right) - 2 \qquad \text{con} \sqrt{2} \approx 1{,}4141 \tag{13}$$

$$1 > 2\left(\sqrt{2}\right) - 2 \approx 0{,}8284 \tag{14}$$

Luego, el argumento de inducción es:

$$P(k) \implies P(k+1) \qquad k \in \mathbb{Z}^{+} \tag{15}$$

es decir

$$\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{i}} > 2\left(\sqrt{k+1} - 1\right)}_{P(k)}\right) \implies \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{i}} > 2\left(\sqrt{k+2} - 1\right)}_{P(k+1)}\right) \tag{16}$$

La hipótesis de este argumento, $P(k)$, es:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\left(\sqrt{k+1} - 1\right) \tag{17}$$

y la conclusión del argumento, $P(k+1)$, es:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2\left(\sqrt{k+2} - 1\right) \tag{18}$$

Con base en (17), podemos tomar el $(k+1)$-ésimo término de la suma de (18), obteniendo (19)

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2\left(\sqrt{k+1} - 1\right) + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \tag{19}$$

y tomando (18) y (19), se tiene (20)

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2\left(\sqrt{k+1} - 1\right) + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2\left(\sqrt{k+2} - 1\right) \tag{20}$$

Finalmente, la demostración se reduce a probar la segunda desigualdad en (20):

$$2\left(\sqrt{k+1}-1\right)+\frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2\left(\sqrt{k+2}-1\right) \tag{21}$$

$$2\sqrt{k+1}\cancel{-2}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2\sqrt{k+2}\cancel{-2} \tag{22}$$

$$2\sqrt{k+1}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2\sqrt{k+2} \tag{23}$$

$$\left(2\sqrt{k+1}\right)^2+\left(2\cdot\left(2\sqrt{k+1}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2 > 4(k+2) \tag{24}$$

$$4(k+1)+4\frac{\cancel{\sqrt{k+1}}}{\cancel{\sqrt{k+1}}}+\frac{1}{(k+1)} > 4(k+2) \tag{25}$$

$$4(k+1)+4+\frac{1}{(k+1)} > 4(k+2) \tag{26}$$

$$\cancel{4k+4+4}+\frac{1}{(k+1)} > \cancel{4k+8} \tag{27}$$

$$\frac{1}{(k+1)} > 0 \tag{28}$$

□

4. Demuestre por inducción matemática la proposición $P(n)$ con $n \in \mathbb{N}$

$$P(n) : 8|\left(1-3^{2n}\right) \tag{29}$$

Solución:

Demostración. Considerando que el dominio de la variable n es $\mathbb{N}$, el caso inicial es $n = 1$, por lo tanto:

$$P(1) : 8|\left(1-3^{2}\right) \tag{30}$$

Al verificar $P(1)$, resulta ser verdadera:

$$8|\left(1-3^2\right) \iff 8|(1-9) \iff 8|(-8) \iff \exists x \in \mathbb{Z} : -8 = 8x \tag{31}$$

dado que $x = -1$, entonces se puede afirmar que $P(1)$ es verdad.
Luego, el argumento de inducción es:

$$P(k) \implies P(k+1) \qquad k \in \mathbb{N} \tag{32}$$

es decir

$$\underbrace{\left(8|\left(1-3^{2k}\right)\right)}_{P(k)} \implies \underbrace{\left(8|\left(1-3^{2(k+1)}\right)\right)}_{P(k+1)} \tag{33}$$

De la hipótesis de inducción, $P(k)$, sabemos que:

$$8|\left(1-3^{2k}\right) \iff \exists x_k \in \mathbb{Z} : 1-3^{2k} = 8x_k \tag{34}$$

y podemos afirmar que x_k efectivamente existe.

De la conclusión del argumento, $P(k+1)$, sabemos que:

$$8|\left(1-3^{2(k+1)}\right) \iff 8|\left(1-3^{2k+2}\right) \iff 8|\left(1-\left(3^{2k}\cdot 3^{2}\right)\right) \tag{35}$$

□

2. Teoría de conjuntos

5. Sean los conjuntos

$$U = \{x \in \mathbb{N} \ : \ (0 < x \leq 10) \land (x \in \text{primera cuatro letras de su nombre})\} \tag{36}$$
$$A = \{x \in \mathbb{N} \ : \ (x = 3r+1) \land (1 \leq r \leq 3)\} \tag{37}$$

(a) Obtener el conjunto $(A \times B) \cup (A \times C)$ y su cardinalidad.

Solución:

Demostración. – □

(b) Obtener el conjunto $(A \cap B^c) \cup (P(C) \cap C)$ y su cardinalidad.

Solución:

Demostración. – □

6. Minimice la expresión mediante álgebra de conjuntos

$$((A \triangle B) - B) \cup (B - (A \triangle B)) \tag{38}$$

Solución:

Demostración. Es recomendable tener presentes algunas identidades de conjuntos, por ejemplo:

$$A^c = U - A \qquad \text{Id. Complemento} \tag{39}$$
$$A - B = A \cap B^c \qquad \text{Id. Diferencia} \tag{40}$$
$$A \triangle A = \varnothing \qquad \text{Id. Dif. Simétrica o Nilpotencia} \tag{41}$$
$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) \qquad \text{Id. Dif. Simétrica} \tag{42}$$
$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) \qquad \text{Id. Dif. Simétrica} \tag{43}$$
$$A \triangle B \triangle C = A \triangle (B \triangle C) \qquad \text{Id. Dif. Simétrica} \tag{44}$$
$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C) \qquad \text{Distributiva} \tag{45}$$

Tendiendo presentes estas equivalencias en conjuntos, si consideramos $D = A \triangle B$ por practicidad, resulta:

$$\begin{aligned}
((\underbrace{A \triangle B}_{D}) - B) \cup (B - (\underbrace{A \triangle B}_{D})) &= \\
(D - B) \cup (B - D) &= \qquad \text{Cambio a } D \\
D \triangle B &= \qquad \text{Id. Dif. Simétrica} \\
(A \triangle B) \triangle B &= \qquad \text{Cambio de } D \\
A \triangle B \triangle B &= \qquad \text{Nilpotencia} \\
A \triangle \varnothing &= \qquad \text{Id. Elemento Neutro} \\
A &
\end{aligned} \tag{46}$$

$\square$

7. Demuestre o refute las proposiciones

   (a)
   $$((A \triangle C) = (B \triangle C)) \implies A = B \tag{47}$$

   (b)
   $$A \subseteq B \iff A \cap B^c = \varnothing \tag{48}$$

8. Sean R_1 y R_2 las relaciones en un conjunto A representadas por las matrices:

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{49}$$

Determina las matrices que representan las relaciones $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ y $R_1 \triangle R_2$.

Solución:

Demostración. Por las matrices M_{R_1} y M_{R_2} que se definen en un conjunto A, se puede deducir que $A = \{1, 2, 3\}$ con la libertad de nombrar sus elementos como números naturales.

De esas matrices, se puede deducir las relaciones

$$R_1 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\} \tag{50}$$
$$R_2 = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\} \tag{51}$$

Así entonces,

$$R_1 \cup R_2 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\} \tag{52}$$
$$R_1 \cap R_2 = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\} \tag{53}$$
$$R_1 \triangle R_2 = \{(2, 1), (3, 2), (3, 3)\} \tag{54}$$

Finalmente, sus matrices correspondientes serían

$$M_{R_1 \cup R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, M_{R_1 \cap R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } M_{R_1 \triangle R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{55}$$

$\square$