MATEMÁTICAS DISCRETAS

NOMBRE: ____________________________________ **GRUPO:** ____________ **FECHA:**

Sección 1

1. Simplifique si es posible, a la expresión más reducida. Indique las leyes utilizadas para justificar.

$$[(\boldsymbol{p} \rightarrow (\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r})) \wedge (\sim\boldsymbol{q} \rightarrow \sim\boldsymbol{p}) \wedge \boldsymbol{p}] \rightarrow \boldsymbol{r}$$

2. Valide por tablas de verdad: (Cita de Sir Isaac Newton)
"Si he visto más lejos que otros, es porque voy sobre los hombros de gigantes". No he visto más lejos que otros. Por lo tanto, No voy sobre los hombros de gigantes.

3. Resuelve:
   - Si q es verdadero, ¿cuál es el valor de verdad del enunciado $q \vee (q \wedge \sim p)$?
   - Si p es verdadero, entonces ¿cuál es el valor de verdad del enunciado $\sim p \rightarrow (q \vee r)$?
   - Si q es falso, ¿cuál es el valor de verdad del enunciado $(p \wedge \sim q) \wedge q$?
   - Si q es verdadero, entonces ¿cuál es el valor de verdad del enunciado $(p \wedge q) \rightarrow q$?

4. Resuelve lo que se pide:

- Haga uso de los cuantificadores para abreviar las siguientes funciones proposicionales y contesta, ¿Cuál función es verdadera o falsa?

i) Para todo x, si x es impar entonces x^2-1 es par

ii) Para cada entero "x", "2x+1 ≠ 5" o " x^2 ≠ 9"

- Escribe el conjunto de reales en "x" y "y", los cuales se encuentran involucrados en el lugar geométrico descrito

$\exists x \exists y\ (x^2 + y^2 = 1)$

5. Demostrar mediante inferencia lógica:

$$[\{\sim\boldsymbol{p} \rightarrow (\boldsymbol{r} \wedge \sim\boldsymbol{s})\} \wedge (\boldsymbol{t} \rightarrow \boldsymbol{s}) \wedge (\boldsymbol{u} \rightarrow \sim\boldsymbol{p}) \wedge \sim\boldsymbol{w} \wedge (\boldsymbol{u} \vee \boldsymbol{w})] \vdash \sim\boldsymbol{t}$$

MATEMÁTICAS DISCRETAS

NOMBRE: ________________________________ **GRUPO:** ____________ **FECHA:**

6. **En la parte trasera de un viejo armario descubre una nota firmada por un pirata famoso por su extraño sentido del humor y amor a los rompecabezas lógicos. En la nota escribió que él había escondido el tesoro en algún lugar de la propiedad. Hizo una lista de cinco enunciados verdaderos (del i) al v) que se muestran a continuación) y desafió al lector a usarlos para averiguar la ubicación del tesoro.**

i) Si esta casa está al lado de un lago, entonces el tesoro no está en la cocina.
ii) Si el árbol en el patio delantero es un olmo, entonces el tesoro está en la cocina.
iii) Esta casa está al lado de un lago.
iv) El árbol del patio delantero es un olmo o el tesoro está enterrado bajo el asta bandera.
v) Si el árbol del patio trasero es un roble, el tesoro está en el garaje.

¿Dónde está escondido el tesoro?

Sección 2

1. Mediante el álgebra de conjuntos,
   a) Demuestre:
$$(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B) = A \cup B$$
   b) Simplifique:
$$(A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B) =$$

2. **Las afirmaciones siguientes utilizan subconjuntos de algún conjunto universal no vacío U. Diga cuáles son verdaderas y cuáles son falsas. Para las falsas, proporcione un ejemplo en el que la afirmación no se cumpla.**
   a) $(A \cup B) \dot{\subseteq} (A \cap B)$ **implica que** $A = B$.
   b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ **para todo** A,B,C.
   c) $A \cap (\emptyset \cup B) = A$ **siempre que** $A \dot{\subseteq} B$
   d) $A \cap B = A^c \cup B^c$ **para todo** A,B.

3. **Considere las siguientes premisas:**
   S_1: Todos los diccionarios son útiles.
   S_2: María sólo tiene novelas rosa.
   S_3: Ninguna novela rosa es útil.

Use un diagrama de Venn para determinar la validez de cada una de las siguientes conclusiones:

Las novelas rosas no son diccionarios.
María no tiene ningún diccionario.
Todos los libros útiles son diccionarios

MATEMÁTICAS DISCRETAS

NOMBRE: ______________________________ **GRUPO:** __________ **FECHA:**

4. **Demuestre de forma analítica (Sin diagramas de Venn y casos particulares de conjuntos, sólo de ser falsa la afirmación):**

   a) Si A-B $\dot{\subseteq}$ C Si y solo si A-C $\dot{\subseteq}$ B

   b) $B \setminus A \subsetneq B \cap A^c$

   c) Si A $\dot{\subseteq}$ B Si y solo si $B^c \dot{\subseteq} A^c$

5. **Demuestre,**

   a) para todo x,y,z en los enteros y n entero,

   $y \equiv x \bmod n$ y $z \equiv y \bmod n$, **entonces** $z \equiv x \bmod n$

   b) Use la identidad $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para demostrar por inducción matemática que:

   $$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 \quad \forall\, n \epsilon \boldsymbol{Z}^+$$

   c) Por inducción matemática: $8|(3^{2n} - 1)$

Sección 3

1. Considere las cuatro relaciones siguientes sobre el conjunto A={1,2,3}:
   R={(1,1), (1,2), (1,3), (3,3)**}**
   S={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)**}**
   $\emptyset = \boldsymbol{relación\ vacía}$
   T={(1,1), (1,2), (2,2), (2,3)**}**
   Determine si cada una de las relaciones indicadas sobre A es:
   Reflexiva, simétrica, transitiva o antisimétrica.
2. Sea **R** la siguiente relación de equivalencia sobre el conjunto
   A={1,2,3,4,5,6**}:**
   R={(1,1), (1,5), (2,2), (2,3), (2,6), (3,2), (3,3), (3,6), (4,4), (5,1), (5,5), (6,2), (6,3), (6,6)**}**
   a) Encontrar el conjunto partición y las diferentes clases de equivalencia
   b) Determinar si es Relación Binaria de Orden y además cuales son los elementos de $\mathbf{R}^{-1}$

MATEMÁTICAS DISCRETAS

NOMBRE: ________________________________ **GRUPO:** ___________ **FECHA:**

3. Sean **R** y**S** reflexivas sobre un conjunto A ={1,2,3}.
   A) Proponer ambas relaciones para casos particulares en los cuales se cumpla que R y S son reflexivas.
   B) Determinar la validez de: si para cualquier R y S sobre A que son reflexivas entonces $R \cup S$ es reflexiva.

4. Considere las tres relaciones siguientes sobre el conjunto A={1,2,3}:

   R={(1,1), (1,2), (1,3), (3,3)**}**

   S={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)**}**

   $\emptyset = \boldsymbol{relación\ vacía}$

   T={(1,1), (1,2), (2,2), (2,3)**}**

   Determine si cada una de las relaciones indicadas sobre A es:

   Reflexiva, simétrica, transitiva o antisimétrica. (haciendo uso de las definiciones o contraejemplos, según sea el caso)

   (2 Puntos c/u)

5. Sea **R** la siguiente relación de equivalencia sobre el conjunto

   A={1,2,3,4,5,6**}:**

   R={(1,1), (1,5), (2,2), (2,3), (2,6), (3,2), (3,3), (3,6), (4,4), (5,1), (5,5), (6,2), (6,3), (6,6)**}**

   c) Encontrar el conjunto partición y las diferentes clases de equivalencia
   d) Determinar si es Relación Binaria de Orden y además $\mathbf{R}^{-1}$

   (2 Puntos)

6. Sean **R** y**S** reflexivas sobre un conjunto A ={1,2,3}. Proponer ambas relaciones para casos particulares en los cuales se cumpla que R y S son reflexivas. Si R y S son reflexivas, entonces $R \cup S$ es reflexiva siempre sobre A

7. **Dar un ejemplo de funciones** $f: R \rightarrow R$ y $g: R \rightarrow R$ tales que existan f^{-1} y g^{-1} .

MATEMÁTICAS DISCRETAS

NOMBRE: ______________________________ **GRUPO:** __________ **FECHA:**

<u>Sección 4</u>

- Para cada una de las siguientes expresiones construir los circuitos (lógicos), utilizando en el primero compuertas NAND y en el segundo compuertas NOR:
  a) $g(w,x,y) = (w + y')(x + y')\, w'$
  b) $h(w,x,y) = (wx \oplus xy)'$
- Escribir en la forma normal conjuntiva y disyuntiva compacta (maxterminos y minterminos), $f(w, x, y)= x + y'x$. Mediante tabla de verdad.
- Determinar la expresión simplificada para el mapa K y escribir la función $g(w,x,y,z)$, registrada en el mapa en su forma normal conjuntiva y disyuntiva, algebraica.

1	1	0	1
0	0	0	0
1	0	0	1
1	1	0	1

- Cambiar la siguiente expresión a la forma normal disyuntiva (polinomial) y de la forma normal disyuntiva a la conjuntiva (polinomial). Mediante desarrollo algebraico.
  $h(w,x,y,z) = wx + w'y + x'yz$
- Escribir en su forma normal disyuntiva y conjuntiva compacta,
  $h(w,x,y,z) = wx + w'y + x'yz$

Problema (1 punto)

Si se tiene las proposiciones

a: Invierto mi dinero en acciones b: Deposito mi dinero en una cuenta de ahorros.

Una equivalencia de la proposición: "si invierto mi dinero, no lo deposito en una cuenta de ahorro", es:

a) $(a \vee b) \wedge (a \wedge b)$
b) $(a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)$
c) $\neg(a \wedge b)$
d) $\neg(a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)$
e) $(a \vee \neg b) \wedge (\neg a \wedge b)$

Justifica tu respuesta con base en el álgebra de proposiciones

Problema 2 (1 punto)

Si $(\neg p \rightarrow q) \vee r$ es una proposición falsa, entonces, una y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera, identifíquela. **Justifica tu respuesta con base en las definiciones de los conectores lógicos**

a) La proposición $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow r$ es verdadera
b) La proposición $(p \wedge q) \vee \neg r$ es falsa
c) La proposición $(p \wedge \neg q) \vee r$ es falsa
d) La proposición $(\neg p \wedge q) \vee \neg r$ es falsa
e) La proposición $(\neg p \wedge q) \wedge \neg r$ es verdadera

Problema 3 (1 punto)

Los valores de verdad que deben de tener las proposiciones atómicas a, b, c para que la proposición compuesta: $[\neg(\neg a \rightarrow c) \rightarrow (a \vee \neg b] \wedge \neg(a \vee c)$ sea verdadera son:

$$a)\ a = 1; b = 0;\ c = 0$$

$$b)\ a = 0; b = 1;\ c = 0$$

$$c)\ a = 0; b = 0;\ c = 1$$

$$d)\ a = 0; b = 0;\ c = 0$$

$$e)\ a = 1;\ b = 1;\ c = 1$$

Justifica tu respuesta con base en las definiciones de los conectores lógicos

Problema 4 (1 punto)

La inversa de: “ No es verdad que, estudio pero salgo mal en los exámenes” es

a) Si estudio, entonces salgo mal en los exámenes
b) Si estudio, entonces salgo bien en los exámenes
c) Si no estudio, salgo mal en los exámenes
d) Si salgo bien en los exámenes, he estudiado
e) Ninguna de las anteriores es la inversa

Problema 5 (2 puntos)

Demuestre la validez del argumento

a) mediante leyes de inferencia b) mediante álgebra de proposiciones

Si hoy es sábado voy al cine; pero si hoy voy a la playa, comeré ceviche. No voy al cine o no comeré ceviche. Por lo tanto, hoy no es sábado o incluso no voy a la playa.

Problema 1)

Determina si la afirmación es falsa o verdadera

1) Sea B={1,2}. 1⊂B
2) Sea A={1}. {1}∈P(A)
3) Sean A={1} B={1,2}. A∈B
4) Sea B={1,2}. {{2}}⊂P(B)
5) Sean A={1} y B={1,2}. Ø∈P(AXB)
6) A∪(A∪B)=A
7) A-B⊂A
8) A∪(B-A)=A∪B
9) Si A∪C=B∪C entonces A=B
10) A⊕A=A
11) A⊕Ø=A
12) Sea A= {{ },{1}}. {1}$\subseteq A$
13) Los enteros 14,15,21 son primos relativos dos a dos

Problema 2)

a) Sea U ={{x, y}/ x, y son números naturales diferentes menores que 10}
La cardinalidad de B={{x,y}∈U / x+y es un número impar} es: ___________________
b) La cardinalidad de la potencia del conjunto potencia del conjunto vacío es: ________
c) Sea A= {{ },{1}}. La cardinalidad de la potencia del Producto Cartesiano AxA es: _____
d) ¿Cuántas divisiones se requieren para calcular el mcd (414,662) utilizando el algoritmo de Euclides? _______________________
e) ¿Cuál es el valor del tercer bit de arrastre que se tiene al sumar los números binarios 101010 y 1010? ________________________

Problema 3)

Utilizar el álgebra de conjuntos para simplificar a su mínima expresión el conjunto

$$((A \oplus B) - B) \cup (B - (A \oplus B))$$

Problema 4)

900 futbolistas profesionales fueron entrevistados con los siguientes resultados

200 tienen piscina
305 tienen una segunda casa
120 tienen un barco
45 tienen un barco y una segunda casa
30 tienen piscina y una segunda casa
32 tienen un barco y una piscina
16 tienen los tres.

a) Dibuje un diagrama de Venn para mostrar esta información. Utiliza A para representar el conjunto de futbolistas que tienen piscina, B el conjunto de futbolistas que tienen una segunda casa y C el conjunto de futbolistas que tienen un barco. (1 punto)
b) ¿Cuántos futbolistas tienen solo una de ellas? (3 puntos)
c) ¿Cuántos futbolistas tienen exactamente dos de ellas? (3 puntos)
d) ¿Cuántos futbolistas no tienen ninguna de las tres? (3 puntos)

Nota: en b), c) y d) Justifica ampliamente tu respuesta y escribe el conjunto que da respuesta a la pregunta.

Problema 5)

Usar el principio de inducción matemática para determinar la veracidad de la afirmación: "La suma de tres números enteros positivos consecutivos es siempre divisible por 6"

Problema 6)

Usar el principio de inducción matemática para determinar la veracidad de la afirmación:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$$

Problema 1

Considere la función booleana $f(x,y,z,w) = \overline{(y+\bar{z})\overline{(\bar{x}\,\overline{w})}} + (\overline{y+z})$

a) Llevar la función booleana a la FND
b) Determinar la función simplificada como productos de sumas mediante mapas K.
c) Determinar la función simplificada como sumas de productos mediante mapas K.
d) Escribir el dual de la función original y de la función simplificada en el inciso b)
e) Dibujar el circuito de la función más simplificada usando compuertas NAND

Problema 2

Considere la función booleana $f(x,y,z,w) = (\overline{\bar{y}\ \bar{z}})\quad \overline{\bar{y}\,z + \overline{(x+w)}}$

a) Llevar la función booleana a la FNC
b) Determinar la función simplificada como productos de sumas mediante mapas.
c) Determinar la función simplificada como sumas de productos mediante mapas K.
d) Determinar el dual del complemento de la función obtenida en el inciso c)
e) Dibujar el circuito de la función más simplificada usando solo compuertas OR y XOR

Problema 3

a) Analizar cada una de las propiedades de una relació0n y determinar cuáles de ellas cumple la relación R, definida como xRy si 3 divide a x-y en X={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}
b) Determinar si la relación es de equivalencia.
c) Determinar si R es de Orden parcial.
d) Determinar si R es de Orden total.
e) Si la relación es de equivalencia determine las clases de equivalencia y determine el conjunto cociente.

Problema 4

Dar un ejemplo de relación en el conjunto {a,b,c} que sea:

a) Simétrica y antisimétrica b) Reflexiva, simétrica y transitiva

Problema 5

Sean R_1 y R_2 relaciones en un conjunto A representadas por las matrices

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinar las matrices que representan las relaciones

a) $R_1 \cup R_2$
b) $R_1 \cap R_2$
c) $R_1 \oplus R_2$